

บทที่ 3

แบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

ท่ามกลางวิกฤตการณ์ด้านมลพิษทางอากาศที่นับวันจะรุนแรงขึ้นเรื่อยๆ อัตราการเกิดของโรคภูมิแพ้ในระบบทางเดินหายใจจึงเพิ่มขึ้นตามไปด้วย ซึ่งการรักษาโรคประเภทนี้จะใช้ยาชนิดพ่นเป็นยาหลัก ดังนั้น ในปัจจุบันการศึกษาเกี่ยวกับการพ่นยาหรือการใช้ยาชนิดพ่นจึงได้รับความสนใจอย่างมากจากนักวิจัยทั่วโลก โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาเทคโนโลยีการพ่นยาให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น และนำไปสู่การรักษาโรคที่ดีขึ้นนั่นเอง ทั้งนี้การศึกษาพฤติกรรมและการเคลื่อนที่ของอนุภาคยาในทางเดินหายใจเป็นหนทางหนึ่งสำหรับการวิจัย และมักจะถูกศึกษาควบคู่ไปกับการไหลของอากาศ เนื่องจากในท่อทางเดินหายใจมีการไหล เข้า-ออก ของอากาศอยู่ตลอดเวลา โดยที่ผ่านมาการศึกษาวิจัยทางด้านนี้มักจะถูกศึกษาโดยการทดลองในห้องปฏิบัติการ อย่างไรก็ตาม ด้วยข้อจำกัดที่มีอยู่ของการศึกษาโดยการทดลองโดยวิธีดังกล่าวทำให้การศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อการค้นคว้าวิจัยมากขึ้น และในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคยาในทางเดินหายใจ ภายใต้อิทธิพลการไหลของอากาศ โดยในลำดับแรกจะทำการสร้างแบบจำลองสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่มีประสิทธิภาพขึ้นมาก่อน

การสร้างแบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

สำหรับสมการที่ใช้อธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจโดยผ่านช่องปากนี้ถูกสร้างขึ้นภายใต้สมมติฐานว่า อากาศในทางเดินหายใจเป็นของไหลที่มีความสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันและอัดไม่ได้ โดยที่อุณหภูมิหนึ่งๆ ความหนืดของอากาศมีค่าคงที่ (homogenous, Newtonian and incompressible fluid) และความหนาแน่นของอากาศจะคงที่ตลอดจากการศึกษาทางวิจัยที่เกี่ยวข้องในเบื้องต้น พบว่างานวิจัยส่วนใหญ่ใช้สมการการไหลต่อเนื่องและสมการนาเวียร์-สโตกส์ เพื่ออธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ และมีบางงานวิจัยที่กล่าวถึงการกำหนดค่าขอบของปัญหาด้วยสมการ sinusoidal [2,7,15,18] ดังนั้นสำหรับงานวิจัยชิ้นนี้จึงใช้สมการการไหลต่อเนื่อง และสมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นสมการควบคุมสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่สร้างขึ้น ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

เนื่องจากอนุภาคยาซึ่งเคลื่อนที่ในทางเดินหายใจมีขนาดเล็กมาก จึงไม่ส่งผลกระทบใดๆต่อการไหลของอากาศ ดังนั้น แบบจำลองที่ใช้อธิบายการไหลของอากาศในงานวิจัยชิ้นนี้ จึงได้ละผลกระทบดังกล่าวไว้ เปรียบเสมือนว่ามีเพียงอากาศไหลอยู่ในท่อทางเดินหายใจเท่านั้น นอกจากนี้ การศึกษาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจโดยผ่านช่องปากครั้งนี้ ได้ทำการศึกษาในขณะที่ปากกำลังเปิดกว้าง ท่อทางเดินหายใจในขณะนั้นจึงมีลักษณะเป็นช่องตรงมากพอที่จะทำให้โครงสร้างของบริเวณทางเดินหายใจที่กำลังศึกษามีลักษณะไม่ซับซ้อนมากนัก ดังนั้นการไหลของอากาศในท่อทางเดินหายใจนี้ จึงถูกสมมติว่าเป็น การไหลแบบราบเรียบ (laminar flow)

จากการศึกษาระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ เพื่อหาระบบสมการที่เหมาะสมและสามารถอธิบายการไหลของอากาศได้ดีที่สุด พบว่าอากาศในช่องทางเดินหายใจมีการไหลเข้า-ออก ตามการเปลี่ยนแปลงของค่าความดันภายในถุงลมปอด โดยค่าความดันดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะที่เป็น ฟังก์ชันแกว่งกวัดตามคาบของเวลา (oscillating function) ทำให้การไหล เข้า-ออก ของอากาศเกิดวนเป็นวัฏจักร ดังนั้นจึงถือว่า การไหลของอากาศเป็นลักษณะการไหลแบบแกว่งกวัดตามคาบของเวลา (oscillating flow) และเป็นการไหลที่ไม่คงที่ขึ้นกับเวลา (transient flow) ด้วยเหตุนี้จึงสามารถอธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจด้วยสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่ขึ้นกับทั้งตำแหน่งและเวลา

เนื่องจากทางเดินหายใจที่ใช้ทำการศึกษาเป็นบริเวณในสามมิติ ตำแหน่งต่างๆในทางเดินหายใจ จึงแทนด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีพิกัดในทิศตาม แกนแนวนอน x แนวตั้ง y และแนวลึก z ดังนั้นจึงกำหนดให้ $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ แทนความเร็วของอากาศ ที่ตำแหน่งและเวลาใดๆ มีลักษณะเป็นเวกเตอร์ความเร็ว ซึ่งประกอบด้วยความเร็วใน ทิศตามแนวนอน x แนวตั้ง y และแนวลึก z คือ u_1 u_2 และ u_3 ตามลำดับ เพราะฉะนั้นแบบจำลองไหลของอากาศสามารถแสดงโดยสมการควบคุมที่ประกอบด้วย สมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + F_x \\ \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) + F_y \\ \rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) + F_z \end{aligned} \quad (3.2)$$

เนื่องจากโครงสร้างของทางเดินหายใจแบบสามมิตินั้นมีความซับซ้อน เพื่อความสะดวกและง่ายแก่การจำลอง เราจึงได้ศึกษาปัญหานี้ในสองมิติ โดยได้จำลองโดเมนให้มีรูปร่างที่ไม่ซับซ้อนเกินไป ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้ ได้เสนอแบบจำลองการไหลของอากาศ ดังนี้

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (3.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + F_y$$

เมื่อ u_1 และ u_2 คือ ความเร็วตามแนวนอนและแนวตั้งตามลำดับ p คือ ความดันของอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใดๆ ρ และ μ คือ ความหนาแน่น และความหนืดของอากาศในทางเดินหายใจ ตามลำดับ โดยที่ F_x คือ แรงที่ถูกกระทำจากภายนอกในทิศตามแนวนอน และ F_y คือ แรงที่ถูกกระทำจากภายนอกในทิศตามแนวแกนตั้ง

ค่าคงที่ที่ปรากฏในสมการ (3.3)-(3.4) นั้นมีค่าดังต่อไปนี้ $\rho = 1.148 \text{ kg/m}^3$ และ $\mu = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

สมการ (3.3)-(3.4) เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่แสดงถึงการอนุรักษ์มวลโมเมนตัม และพลังงาน ซึ่งเป็นระบบสมการที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลของของไหลแบบอัดไม่ได้รูปแบบหนึ่ง ภายใต้สภาวะที่ความเร็วมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งและเวลา โดยระบบสมการดังกล่าว มีค่าตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมดสามค่า คือ ค่าความเร็ว u_1 และ u_2 และค่าความดัน p ซึ่งขั้นต่อไปจะกำหนดโดเมนที่ใช้ทำการศึกษา รวมทั้งกำหนดค่าขอบและค่าเริ่มต้น เพื่อใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาดังกล่าว

บริเวณที่ใช้ทำการศึกษา

สำหรับขอบเขตของบริเวณที่ถูกใช้ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคนั้น จะเริ่มตั้งแต่บริเวณแรกที่อนุภาคเคลื่อนที่เข้าสู่ร่างกาย นั่นคือ ช่องปากผ่านเข้าสู่หลอดลมไป จนถึงบริเวณก่อนถึงขั้วปอดทั้งสองข้าง (two bronchi) ซึ่งเป็นการศึกษาเฉพาะทางเดินหายใจส่วนบน (upper respiratory tract) เท่านั้น

ความซับซ้อนของโครงสร้างทางเดินหายใจของมนุษย์ นับเป็นอุปสรรคสำคัญในการสร้างโดเมนให้สมจริง งานวิจัยส่วนมาก ได้ใช้ข้อมูลทางการแพทย์ประกอบกับโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีประสิทธิภาพสูง เพื่อจำลองรูปทางเดินหายใจทั้งแบบสองและสามมิติขึ้นมา ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงที่สุด ซึ่งในส่วนนี้เราได้ทำการค้นคว้าข้อมูลทางกายภาพ ของโครงสร้างทางเดินหายใจของมนุษย์จากงานวิจัยอื่นๆที่เกี่ยวข้อง [2,7,13,14] ดังแสดงค่าไว้ในตารางที่ 3.1 โดยได้ถูกนำมาใช้ เพื่อจำลองทางเดินหายใจส่วนบนแบบสองมิติด้วยโปรแกรม COMSOL Multiphysics® 3.5a ดังรูปที่ 3.1

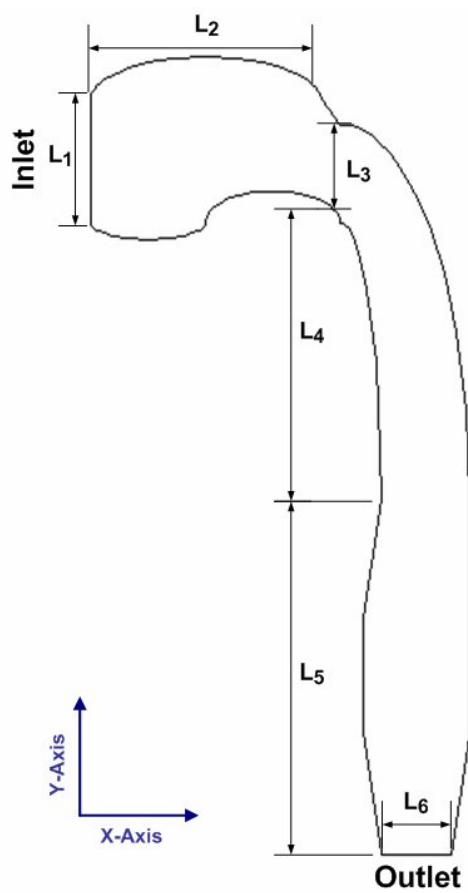
ตารางที่ 3.1

ค่าพารามิเตอร์สำหรับการจำลองทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์

พารามิเตอร์	ค่าพารามิเตอร์ (cm)
ความกว้างของทางเข้า (inlet) , L_1	3.125
ความลึกของช่องปาก(oral cavity) , L_2	7.0
เส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดลมตอนต้น , L_3	2.5
ความยาวของหลอดลมช่วงที่ 1 , L_4	7.0
ความยาวของหลอดลมช่วงที่ 2 , L_5	9.0
ความกว้างของทางออก (outlet) , L_6	2.0

รูปที่ 3.1

รูปจำลองทางเดินหายใจของมนุษย์ในสองมิติที่ถูกใช้ทำการศึกษา (โดเมน)



การกำหนดค่าขอบ

พิจารณาค่าขอบที่ใช้กับสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ ดังนี้

บริเวณทางเข้า (inlet) ซึ่งคือ ทางเข้าของช่องปาก เนื่องจากบริเวณนี้เป็นพื้นที่เปิด สัมผัสกับบรรยากาศภายนอกจึงไม่มีแรงดันใดๆเกิดขึ้น ทำให้ความดันอากาศที่บริเวณนี้มีค่าเป็น ศูนย์ [18]

$$p = 0 \quad (3.5)$$

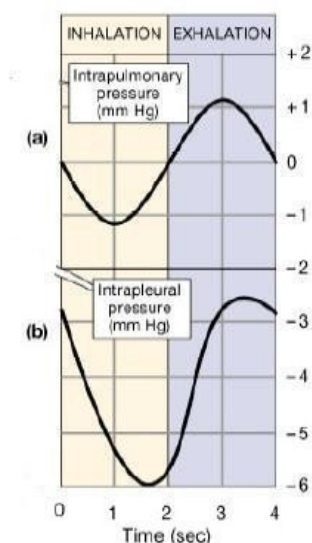
บริเวณผนังรอบทางเดินหายใจทั้งหมด กำหนดให้ความเร็วของอากาศ u สอดคล้องกับสภาวะที่ไม่มีการลื่นไถล (no-slip condition) นั่นคือ เมื่ออากาศเคลื่อนตัวเข้าไปใกล้ ผนังทางเดินหายใจความเร็วของอากาศจะมีค่าเป็นศูนย์ [18]

$$u = 0 \quad (3.6)$$

บริเวณทางออก (outlet) ซึ่งคือ ส่วนปลายของหลอดลมซึ่งติดกับข้อปอดทั้งสองข้าง การกำหนดค่าขอบที่บริเวณนี้ เกิดจากการสังเกตพฤติกรรมของการหายใจ เข้า-ออก ของมนุษย์ ซึ่งมีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร และความดันของอากาศภายในปอด เนื่องจากการหายใจ เข้า-ออก เกิดขึ้นเมื่อมีการบีบรัดและคลายตัวของปอด ซึ่งขณะที่ปอดคลายตัว ปริมาตรของอากาศภายในปอดเพิ่มขึ้น ทำให้ความดันอากาศภายในปอด (intrapulmonary pressure) และความดันอากาศในช่องเยื่อหุ้มปอด (intrapleural pressure) ลดต่ำกว่าความดันอากาศภายนอก (atmospheric pressure) [24] ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของอากาศในทางเดินหายใจมีทิศ **พุ่งเข้า** จากปากผ่านทางเดินหายใจไปยังปอด ซึ่งคือ **การหายใจเข้า** และเมื่อถึงจุดๆหนึ่งปอดจะขยายตัวเต็มที่ แล้วค่อยๆบีบตัวลง ทำให้ปริมาตรของอากาศภายในปอดลดลง ส่งผลต่อความดันของอากาศภายในปอดและบริเวณรอบๆ มีค่าสูงขึ้นกว่าความดันอากาศบริเวณภายนอก ความเร็วของอากาศจึงค่อยๆเปลี่ยนทิศทางเป็นมีทิศ **ไหลออก** จากปอด ผ่านทางเดินหายใจออกสู่ภายนอก ซึ่งคือ **การหายใจออก** เกิดวนเป็นวัฏจักรเช่นนี้เรื่อยไป

ดังนั้นหากพิจารณาเฉพาะทางเดินหายใจ ที่เริ่มตั้งแต่ช่องปากไปจนถึงบริเวณก่อนถึง ข้อปอดสามารถอธิบายได้ว่า สิ่งที่ควบคุมการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ คือ ความดันอากาศที่ปลายทางออกของโดเมนซึ่งอยู่ใกล้กับปอดนั่นเอง นอกจากนี้การหดและคลายตัวของปอดมีการหมุนเวียนเปลี่ยนวนเป็นวัฏจักร ทำให้ความดันอากาศที่บริเวณนี้ สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันคาบของเวลา ซึ่งแทนด้วยฟังก์ชัน $P(t)$

รูปที่ 3.2
 กราฟความดัน ภายในปอด (a) และเยื่อหุ้มปอด (b)
 ในหนึ่งรอบของการหายใจ ดัดแปลงมาจาก [23]



จากการศึกษากราฟของการเปลี่ยนแปลงความดันอากาศภายในปอด รูปที่ 3.2(a) พบว่าในช่วงแรกของกราฟ ค่าความดันติดลบน้อยๆ จากนั้นจึงค่อยๆ ติดลบมากขึ้นจนถึงจุดต่ำสุด และเมื่อเวลาผ่านไปค่าดังกล่าวจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นจนกลับมาเป็นบวกและถึงจุดสูงสุด แล้วลดลงอีก แกว่งไปมาเช่นนี้เรื่อยไป ดังนั้นค่าความดันที่บริเวณนี้จะถูกอธิบายด้วยฟังก์ชันไซน์ที่แอมพลิจูดเป็นลบนั่นเอง โดยค่าความดันสูงสุด หรือแอมพลิจูดในแต่ละคาบเวลามีค่าเป็น 1 มม.ปรอท (mmHg) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $133.32 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ และ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ จะเป็นหน่วยที่ถูกใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาต่อไป นอกจากนี้จากงานวิจัย [21] พบว่าคาบของการหายใจ เข้า-ออก ของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที เพราะฉะนั้นที่ปลายขอบของทางเดินหายใจด้านที่ติดกับปอด จึงกำหนดฟังก์ชันของความดันอากาศเป็น

$$P(t) = -133.32 \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = P(t) = -133.32 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.7)$$

สำหรับความดันอากาศในช่องเยื่อหุ้มปอด ในการหายใจปกติจะมีค่าระหว่าง -2.5 มม.ปรอท ถึง -6 มม.ปรอท ดังแสดงดัง รูปที่ 3.2(b)

วิธีการและขั้นตอนในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้จะเป็นการนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของของความเร็วอากาศ เพื่อนำผลเฉลยนั้นมาจำลองและศึกษาลักษณะการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ และนำไปใช้ในกระบวนการหาคำตอบของแบบจำลองสำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาคยาต่อไป

สมการการไหลต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ในงานวิจัยชิ้นนี้ เป็นระบบสมการที่ถูกใช้เพื่ออธิบายพฤติกรรมของการไหลของอากาศภายในทางเดินหายใจ ซึ่งเป็นของไหลชนิดอัดไม่ได้ (incompressible fluids) และมีความหนืดคงที่ภายใต้สภาวะที่มีค่าความเร็วเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งและเวลาในโดเมนสองมิติ จากแบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่ประกอบด้วยสมการการไหลต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ ตามสมการ (3.3)–(3.4) คือ

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + F_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + F_y$$

โดยมีค่าขอบตามสมการ (3.5)–(3.7) ดังนี้

บริเวณทางเข้าที่ปาก (inlet)

$$p = 0$$

บริเวณผนังรอบทางเดินหายใจทั้งหมด

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

บริเวณทางออกปลายหลอดลมจนถึงซี่ปอด (outlet)

$$P(t) = -133.32 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

จากสมการควบคุมและสมการค่าขอบข้างต้น ทำให้เกิดเป็นปัญหาค่าขอบ (boundary value problem, B.V.P.) สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ที่ขึ้นกับทั้งตำแหน่งและเวลา (transient problem) และเนื่องจากสมการเนเวียร์-สโตกส์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) ดังนั้นปัญหานี้จึงเป็นปัญหาค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น

การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวมีความซับซ้อนมาก เพราะเป็นระบบสมการที่ขึ้นแก่กันและกัน (coupled equations) และอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) อีกทั้งเมื่อประกอบกับค่าที่ขอบต่างๆ มีผลต่อเนื่องทำให้การประยุกต์ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขนั้นมีความซับซ้อนมากตามขึ้นไป ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics® 3.5a เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบนี้ กระบวนการหาคำตอบเริ่มจากการนำโดเมนของการศึกษาการไหลที่สร้างไว้ บนโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics® 3.5a ดังแสดงใน รูปที่ 3.1 มาแบ่งออกเป็นหน่วย (element) เล็กๆหรือเป็นโครงตาข่าย (mesh) ย่อยๆ จำนวน 1116 หน่วย โดยโครงตาข่ายเหล่านี้ตัดกันที่จุดต่อ (node) เป็นจำนวน 1222 จุด จากนั้นกำหนดคุณสมบัติของของไหล และเงื่อนไขค่าขอบของปัญหาตามที่ได้บรรยายไว้ก่อนหน้านี้ แล้วนำเข้าสู่กระบวนการคำนวณและวิเคราะห์ โดยจะประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าแก้ระบบสมการเพื่อหาผลลัพธ์ของการไหลที่จุดต่อ ซึ่งในที่นี้ คือ ความเร็ว u_1 และ u_2 และความดัน p ซึ่งแต่ละขณะเวลาจะใช้วิธีการ UMFPACK แก้ปัญหากับระบบเชิงเส้น และได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆสำหรับใช้ในโปรแกรม COMSOL Multiphysics® 3.5a ไว้ตามที่แสดงในตารางที่ 3.2 และ 3.3 ในที่สุดจะได้เป็นผลเฉลยโดยประมาณและอยู่ในรูปแบบเป็นค่าของตัวเลข แล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้ซึ่งปกติจะมีจำนวนมาก (ตามจำนวนของจุดต่อ) มาจำลองพฤติกรรมการไหลของอากาศ

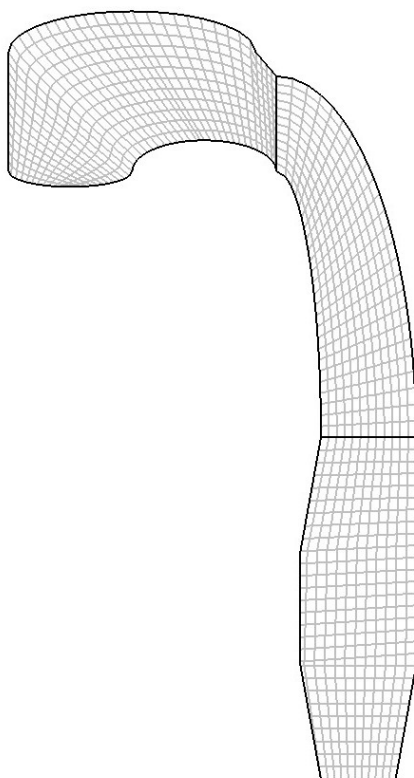
ตารางที่ 3.2

ค่าพารามิเตอร์สำหรับคุณสมบัติของอากาศในทางเดินหายใจ

พารามิเตอร์ (Parameter)	ค่า (Value)
ความหนาแน่น (Air density $\rho, kg / m^3$)	1.148
ความหนืด (Air dynamic viscosity $\mu, Pa \cdot s$)	1.82×10^{-5}
ความเร่งจากแรงโน้มถ่วงของโลก (Acceleration due to gravity $g, m / s^2$)	[0, -9.8]

รูปที่ 3.3

โดเมนที่ถูกแบ่งออกเป็นโครงตาข่าย (mesh) ย่อยๆ



ตารางที่ 3.3

ค่าพารามิเตอร์สำหรับใช้ใน Solver Parameters

การกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ใช้แก้ปัญหา(Solver Parameters)	
เวลาเริ่มต้น (Start time) :	0.0
เวลาสิ้นสุด (Stop time) :	8.0
ช่วงห่างของระยะเวลาเริ่มต้น (Initial time step) :	0.001
ช่วงห่างของระยะเวลามากที่สุด (Maximum time step) :	0.1
ความคลาดเคลื่อนยินยอมสัมพัทธ์ (Relative tolerance) :	10^{-6}
ความคลาดเคลื่อนยินยอมสัมบูรณ์ (Absolute tolerance) :	10^{-7}

ผลเฉลยเชิงเลขสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการแก้ปัญหการไหลของอากาศ ซึ่งเราต้องการนำไปใช้ในกระบวนการแก้ปัญหการเคลื่อนที่ของอนุภาคยา คือ **ค่าความเร็วอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใดๆ $u(t, x)$** โดยค่าดังกล่าวจะถูกนำไปใช้เพื่อหาความเร็วและตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่าง ๆ ต่อไป อย่างไรก็ตามความเร็วอากาศที่หาได้ในขั้นตอนนี้ จะทราบค่าเฉพาะที่บางจุดของเวลาและที่จุดต่อ (node) ของโดเมนเท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นต้องหาวิธีการประมาณค่าความเร็วอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใดๆ จากความเร็วอากาศตามจุดต่อในโดเมนและบางจุดของเวลาที่มีอยู่ เตรียมไว้สำหรับการแก้ปัญหาดต่อไป

ถ้าสังเกตการแบ่งโดเมนตามที่แสดงในรูปที่ 3 จะพบว่าโดเมนถูกแบ่งเป็นสี่เหลี่ยมย่อยๆ แทนการแบ่งด้วยสามเหลี่ยม ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อศึกษาข้อมูลของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการแก้ปัญาโดยโปรแกรมสำเร็จรูป เมื่อแบ่งโดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมย่อยดังแสดงตัวอย่างในตารางที่ 3.4 และตารางที่ 3.5 พบว่า ข้อมูลดังกล่าวสามารถที่จะนำไปใช้ประโยชน์ได้ง่ายและสะดวกกว่า ในกรณีที่โดเมนถูกแบ่งเป็นสามเหลี่ยมย่อย การนำไปใช้ประโยชน์ที่ว่า คือ การนำค่าความเร็วอากาศที่ได้ตามจุดต่อต่างๆ ไปประมาณค่าเข้าด้วยกันแบบเชิงเส้น ซึ่งในกระบวนการนี้ทำได้โดยสร้างสมการระนาบของความเร็วอากาศ สำหรับแต่ละบริเวณสมาชิกย่อย ทำให้สามารถหาความเร็วอากาศของทุกๆ จุดในบริเวณสมาชิกย่อยได้จากสมการระนาบที่สร้างขึ้นมานั่นเอง ทั้งนี้ขั้นตอนการคำนวณจะถูกนำเสนออย่างละเอียดในบทต่อไป

ตารางที่ 3.4

แสดงตัวอย่างผลเฉลยของความเร็วอากาศในทิศตามแกนนอน (u_1)ที่ตำแหน่ง (x_m, y_n) ใดๆ ณ เวลา t_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$\mathbf{x}(x, y)$		u_1			
x	y	$t_i = t_1$	$t_i = t_2$	...	$t_i = t_n$
0.0704	0.16	0.0	0.0		0.0
0.07032781	0.16070853	0.0	0.0		0.0
0.07010228	0.16143458	0.0	0.0		0.0
0.0704	0.16125	-6.536855E ⁻⁵	-3.064118E ⁻⁵		-4.751340E ⁻⁴
0.0702309	0.16196047	-1.460460E ⁻⁴	-6.702279E ⁻⁵		-0.00103948
0.0700618	0.16267093	-3.010406E ⁻⁴	-1.361930E ⁻⁴		-0.00211232
0.0704	0.1625	-3.625345E ⁻⁴	-1.637118E ⁻⁴		-0.00253905
0.070210665	0.16320364	-5.767067E ⁻⁴	-2.575899E ⁻⁴		-0.00399510
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
0.08298639	0.001875	-7.852212E ⁻⁵	-3.886839E ⁻⁵		-6.027966E ⁻⁴
0.08158441	0.00375	-1.700577E ⁻⁵	-8.052575E ⁻⁶		-1.248887E ⁻⁴
0.08172507	0.0028125	-1.103694E ⁻⁵	-5.397098E ⁻⁶		-8.370266E ⁻⁵
0.08186573	0.001875	7.520242E ⁻⁶	2.569643E ⁻⁶		3.986369E ⁻⁵

หน่วยย่อย
(element) ที่ 1หน่วยย่อย
(element) ที่ 2หน่วยย่อย
(element) ที่ M

ตารางที่ 3.5

แสดงตัวอย่างผลเฉลยของความเร็วอากาศในทิศตามแกนตั้ง (u_2)ที่ตำแหน่ง (x_m, y_n) ใดๆ ณ เวลา t_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$\mathbf{x}(x, y)$		u_2			
x	y	$t_i = t_1$	$t_i = t_2$	...	$t_i = t_n$
0.0704	0.16	0.0	0.0		0.0
0.07032781	0.16070853	0.0	0.0		0.0
0.07010228	0.16143458	0.0	0.0		0.0
0.0704	0.16125	-5.576855E ⁻⁵	-3.054118E ⁻⁵		-4.751340E ⁻⁴
0.0702309	0.16196047	-1.250460E ⁻⁴	-6.622279E ⁻⁵		-0.00003948
0.0700618	0.16267093	-3.110406E ⁻⁴	-1.465930E ⁻⁴		-0.00111232
0.0704	0.1625	-3.515345E ⁻⁴	-1.634118E ⁻⁴		-0.00243905
0.070210665	0.16320364	-5.767067E ⁻⁴	-2.575899E ⁻⁴		-0.00388510
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
0.08298639	0.001875	-6.952212E ⁻⁵	-3.886839E ⁻⁵		-6.024966E ⁻⁴
0.08158441	0.00375	-1.800577E ⁻⁵	-8.132575E ⁻⁶		-1.246887E ⁻⁴
0.08172507	0.0028125	-1.113694E ⁻⁵	-5.407098E ⁻⁶		-8.370166E ⁻⁵
0.08186573	0.001875	7.310242E ⁻⁶	2.619643E ⁻⁶		3.994369E ⁻⁵

หน่วยย่อย
(element) ที่ 1หน่วยย่อย
(element) ที่ 2หน่วยย่อย
(element) ที่ M

ตารางที่ (3.4)-(3.5) แสดงตัวอย่างของผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป ซึ่งเป็นข้อมูลของความเร็วอากาศที่ตำแหน่งและเวลาต่างๆ โดยสองหลักแรกของข้อมูลแสดงตำแหน่งต่างๆในโดเมน ซึ่งคือ จุดต่อของโครงตาข่ายย่อย ส่วนในแนวหลัก (column) ที่เหลือแสดงค่าความเร็วอากาศที่เวลาต่างๆ โดยที่ความเร็วอากาศในแต่ละหลัก จะถูกแสดงตามตำแหน่งที่ละหน่วยย่อย หรือ mesh จนครบทุกหน่วยย่อย ซึ่งในที่นี้หน่วยย่อย (element) เป็นรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ดังนั้นหนึ่งหน่วยย่อยจึงประกอบด้วยตำแหน่งในโดเมนทั้งหมดสี่จุดนั่นเอง

ผลการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

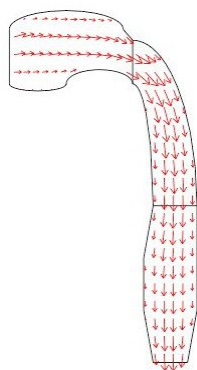
เพื่อความเข้าใจในพฤติกรรมการไหลของอากาศ ผลลัพธ์หรือผลเฉลยที่ได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แก้ปัญหา ซึ่งหาค่าได้ตามจุดต่อและอยู่ในรูปแบบของค่าตัวเลขนั้น จะถูกนำมาประมาณค่าเข้าด้วยกัน (interpolate) เพื่อแสดงขนาดและทิศทางการไหลของอากาศที่เวลาต่างๆ ซึ่งในที่นี้โปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics® 3.5a มีขีดความสามารถในการประมาณค่าและนำเสนอผลในรูปแบบของแผนภาพลูกศร (arrow plot) และแผนภาพพื้นผิว (surface plot) ไว้อยู่แล้ว ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเสนอผลการวิจัย โดยจำลองการไหลของอากาศในท่อทางเดินหายใจ รวมทั้งแสดงแผนภาพของค่าความเร็วและความดันในโดเมนที่เวลาต่างๆด้วย

เนื่องจากคาบการหายใจของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที แต่ในขั้นตอนการหาผลเฉลย ผู้วิจัยได้กำหนดให้ดำเนินการจนถึงวินาทีที่ 8 ซึ่งหมายถึงเกิดการหายใจ เข้า-ออก ประมาณสองรอบ เพื่อแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่นำเสนอมีความเสถียรและถูกต้องแม่นยำ ในลำดับแรกของการแสดงผลการวิจัย จะทำการเปรียบเทียบการไหลของอากาศในแต่ละรอบของการหายใจ เมื่อเวลาของแต่ละรอบผ่านไปเท่าๆกัน ดังรูปที่ 3.4

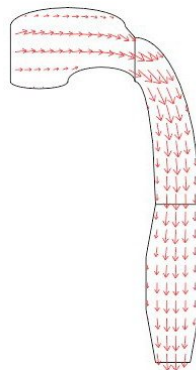
รูปที่ 3.4 (ก-ค) และ รูปที่ 3.4 (ง-จ) แสดงทิศทางการไหลแบบแผนภาพลูกศรของอากาศในทางเดินหายใจของการหายใจรอบที่หนึ่งและรอบที่สอง เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที 2.05 วินาที และ 2.5 วินาที ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบทิศทางการไหลของอากาศในสองรอบการหายใจ พบว่ามีทิศทางการไหลที่เหมือนกัน โดยที่ ณ เวลาต่างกันค่าความเร็วอากาศที่ตำแหน่งเดียวกัน จะมีขนาดและทิศทางต่างกันด้วย ทั้งนี้ในแต่ละขณะเวลาความเร็วจะมีขนาดโตที่สุดบริเวณแนวแกนกลางของทางเดินหายใจแล้วลดขนาดลงตามสัดส่วน และมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ที่ผนังทางเดินหายใจ จากผลการจำลอง พบว่าในช่วงสองวินาทีแรกการไหลของอากาศจะมีทิศทางการไหลจากภายนอกเข้าสู่ท่อทางเดินหายใจ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อปอดมีการคลายตัว ปริมาตรอากาศภายในเพิ่มขึ้น แรงดันลดลง หลังจากนั้นทิศทางการไหลจะเริ่มเปลี่ยนเป็นทิศตรงข้ามเมื่อเข้าสู่วินาทีสองของการหายใจในแต่ละรอบ โดยเป็นผลสืบเนื่องมาจากการที่ปอดขยายตัวเต็มที่เต็มที่แล้วจึงค่อยๆบีบตัวลง ทำให้ปริมาตรของอากาศภายในปอดลดลง ส่งผลต่อความดันของอากาศภายในจนทำให้เกิดการเปลี่ยนทิศของการไหลนั่นเอง เนื่องจากขนาดและทิศทางการไหลของอากาศในท่อทางเดินหายใจ ในแต่ละรอบของการหายใจที่เวลาต่างๆ มีความคล้ายคลึงกัน ดังนั้นการนำเสนอผลการวิจัยต่อจากนี้ จะแสดงเฉพาะผลของการหายใจรอบที่หนึ่งเท่านั้น

รูปที่ 3.4

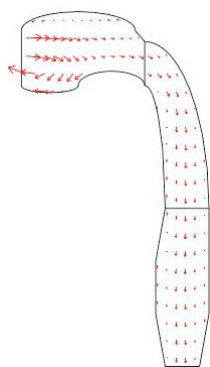
แสดงทิศทางการไหลของอากาศแบบแผนภาพลูกศร (arrow plot) ในทางเดินหายใจ ณ เวลาต่างๆ ของการหายใจรอบที่หนึ่ง (ก-ค) และ รอบที่สอง (ง-ฉ)



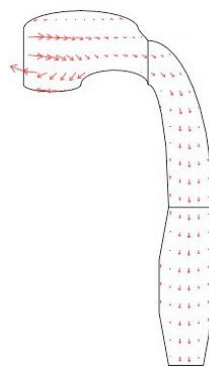
(ก) 1.4 วินาที



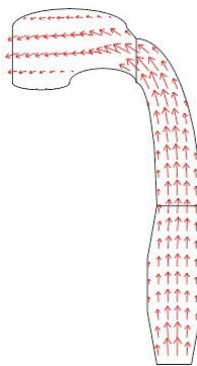
(ง) 5.4 วินาที



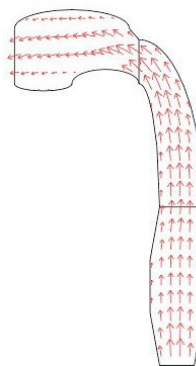
(ข) 2.055 วินาที



(จ) 6.055 วินาที



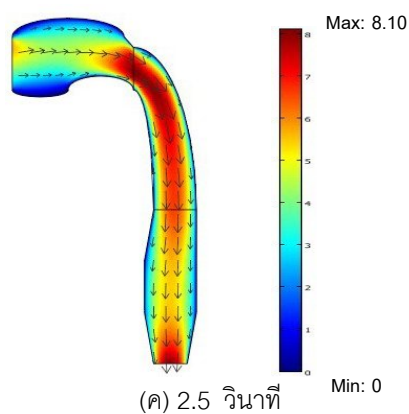
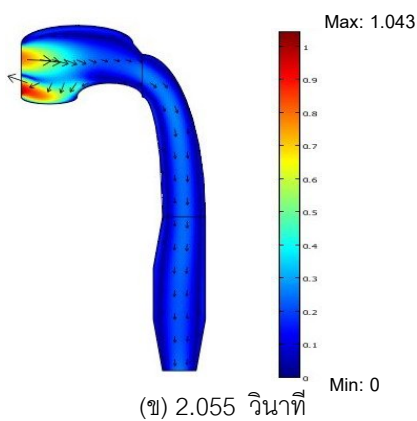
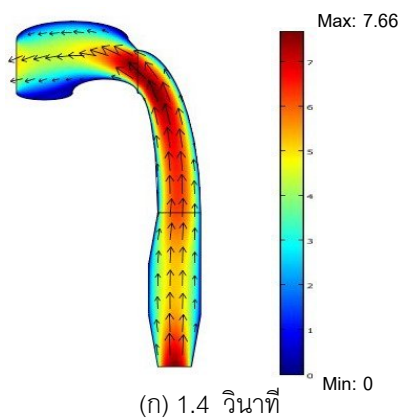
(ค) 2.5 วินาที



(ฉ) 6.5 วินาที

รูปที่ 3.5

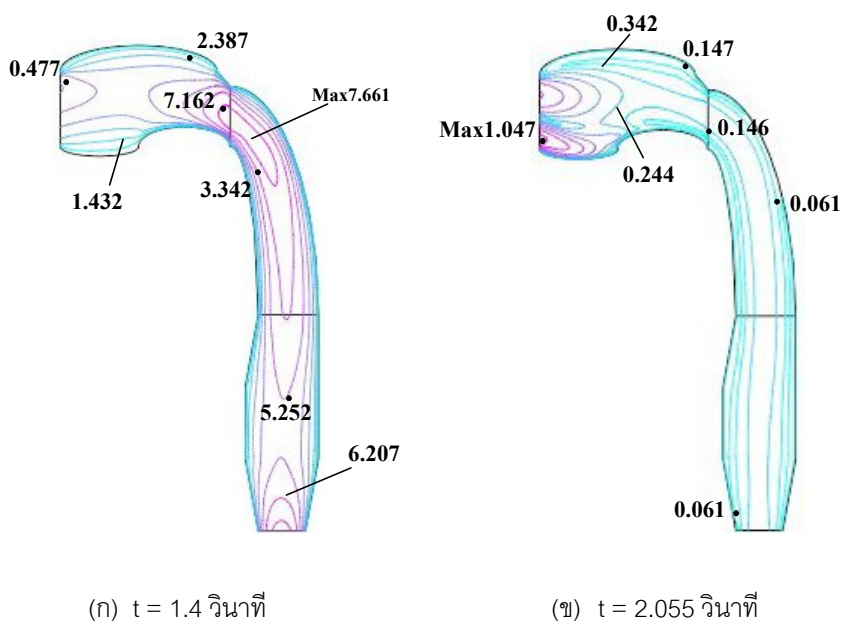
ความเร็วอากาศแบบแผนภาพพื้นผิว (surface plot, m/s) ในทางเดินหายใจ ณ เวลาต่างๆ ของการหายใจหนึ่งรอบ เมื่อเวลาผ่านไป (ก) 1.4 วินาที (ข) 2.055 วินาที และ (ค) 2.5 วินาที



รูปที่ 3.5 แสดงแผนภาพพื้นผิวของค่าความเร็วอากาศในทางเดินหายใจ เมื่อพิจารณาที่บางขณะเวลาของการหายใจรอบที่หนึ่ง เช่น เมื่อเวลาของการหายใจผ่านไป 1.4 วินาที ดังรูป (ก) และ 2.5 วินาที ดังรูป (ค) พบว่าขนาดของความเร็วจะมีค่าสูงสุด ที่บริเวณแกนกลางตอนต้นและตอนปลายของหลอดลม ส่วนในรูป (ข) ซึ่งเป็นผลการจำลอง ณ เวลาที่การไหลของอากาศกำลังเปลี่ยนทิศเป็นการไหลออกจากร่างกายได้ค่าความเร็วที่มีขนาดน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับช่วงเวลาอื่น โดยมีค่ามากที่สุดที่บริเวณช่องปากตอนต้นซึ่งมีค่าประมาณ 1.043 เมตร/วินาที เท่านั้น ส่วนบริเวณตั้งแต่ตอนปลายของช่องปากไปจนถึงหลอดลมมีค่าความเร็วน้อยมากจนเป็นศูนย์

รูปที่ 3.6

แสดงค่าความดันอากาศแบบแผนภาพระดับชั้น (contour plot, $Pa \cdot s$) ในทางเดินหายใจของการหายใจหนึ่งรอบ เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที (ก) และ 2.055 วินาที (ข)



รูปที่ 3.6 (ก) และ (ข) แสดงเส้นบอกระดับความดันอากาศในทางเดินหายใจ ของการหายใจรอบหนึ่งรอบ จากการจำลองพบว่า เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที (รูป ก) ความดันอากาศมีค่าสูงบริเวณแนวแกนกลางของหลอดลม โดยมีค่าสูงสุดประมาณ 7.661 $Pa \cdot s$ และมีค่าความดันต่ำที่บริเวณใกล้ขอบโดเมน ส่วนใน รูปที่ 3.6 (ข) พบว่ามีค่าความดันน้อยมากซึ่งมี

ค่าสูงสุดเพียง $1.047 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ เท่านั้นและเกิดขึ้นที่บริเวณตอนต้นของช่องปาก จากผลการจำลอง ดังแสดงในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 ทำให้สังเกตพบสัมพันธ์ว่า ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของความดันและความเร็วที่เวลาต่างๆ มีความสอดคล้องกัน กล่าวคือ ที่ช่วงเวลาเดียวกันบริเวณใดที่มีความดันสูงบริเวณนั้นก็จะมีความเร็วสูงด้วย

สรุปผลการวิจัยการไหลของอากาศ

เนื่องจากจุดประสงค์ของการศึกษาในบทนี้ คือ การศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศในท่อทางเดินหายใจ โดยผู้วิจัยได้เสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อจำลองการไหลของอากาศ ซึ่งผลที่ได้จากแบบจำลองพบว่า การไหลของอากาศมีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางตามการเปลี่ยนแปลงของเวลา คือ มีการไหล เข้า-ออก เป็นคาบของเวลาซึ่งสอดคล้องกับความเป็นจริงตามการทำงานของระบบทางเดินหายใจ สำหรับในช่วงสองวินาทีแรกของแต่ละรอบการหายใจ อากาศจะมีทิศไหลจากภายนอกเข้าสู่ร่างกายและเริ่มเปลี่ยนเป็นทิศตรงข้ามเมื่อเข้าสู่วินาทีที่สอง สำหรับค่าของความเร็วอากาศเมื่อเปรียบเทียบในแต่ละบริเวณ ณ เวลาต่างกันพบว่า ค่าความเร็วในตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดและทิศทางต่างกัน ทั้งนี้ในแต่ละช่วงเวลาความเร็วสูงสุดจะเกิดที่บริเวณแนวแกนกลางของทางเดินหายใจ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง 7-9 เมตร/วินาที และมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ ที่บริเวณผนังทางเดินหายใจ ในส่วนของความดัน พบว่าการเปลี่ยนแปลงของความดันอากาศในทางเดินหายใจ มีลักษณะสอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็วอากาศ กล่าวคือ ความดันอากาศมีค่าสูงบริเวณแนวแกนกลางของหลอดลม โดยมีค่าสูงสุดประมาณ $7-8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ และมีค่าความดันต่ำที่บริเวณใกล้ขอบโดเมน

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าแบบจำลองการไหลของอากาศนี้มีความถูกต้องแม่นยำอยู่ในระดับที่น่าพอใจ และหากแบบจำลองนี้ถูกนำไปพัฒนาเข้ากับโดเมนที่สมจริงมากขึ้นโดยเฉพาะโดเมนสามมิติ ก็จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษากฎธรรมชาติของอนุภาคขนาดเล็กในทางเดินหายใจได้อย่างดี สำหรับขั้นตอนต่อไปของงานวิจัย จะนำผลเฉลยของปัญหาการไหลของอากาศไปใช้กับแบบจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคยา เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคยาในทางเดินหายใจต่อไป