บทที่ 2
หลักการและทฤษฎีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา โดยกล่าวถึงสมการแมกซ์เวลล์ [13] การเดินทางของคลื่นในตัวกลางชนิดต่างๆ พื้นฐานการกระจายความร้อนในเนื้อเยื่อ การหาค่าการดูดซับความร้อน และสมการความร้อนทางชีววิทยา (Bio – heat Equation)

2.2 การวิเคราะห์ทางด้านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปทั่วไปแล้วจะเป็นคลื่นซึ่งเป็นสัญญาณที่มีฮาร์โมนิก (Time – Harmonic Field) หรืออีกนัยหนึ่งคือ เป็นสัญญาณที่มีคาบการแกว่งที่แน่นอน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วมักจะแทนด้วยผลรวมของสัญญาณรูปซายน์ที่สามารถใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ เขียนได้ทั้งฟังก์ชันโคซายน์ ฟังก์ชันซายน์ หรือฟังชันก์เอ็กโปแนนเชียลเชิงซ้อน ถ้าพิจารณาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณโคซายน์ก็จะได้ $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = j\omega \bar{E}$ ในกรณีที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณรูปซายน์นั้น สามารถวิเคราะห์ผลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีต่อตัวกลางได้ง่ายได้ง่ายโดยพิจารณาการตอบสนองของช่วงเวลาที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีต่อตัวกลางได้ง่ายโดยพิจารณาการตอบสนองของช่วงเวลาที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณซายน์คงตัว (Steady state) ซึ่งสามารถอนุมานอัตราการเปลี่ยนแปลงกับเวลา $\frac{\partial}{\partial t}$ คือ การเฉลี่ยด้วยค่า $j\omega$ ทำให้ได้สมการแมกซ์เวลล์ตามหัวข้อที่ 2.2.1 ซึ่งเป็นการเขียนในลักษณะเฟสเซอร์

2.2.1 สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equations)

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \tag{2.1}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \tag{2.2}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{2.4}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{2.5}$$

เมื่อ $\bar{E}$ = สนามไฟฟ้า

$\bar{D}$ = ฟลั๊กของสนามไฟฟ้า

$\bar{H}$ = ความเข้มสนามแม่เหล็ก

ρ = ความหนาแน่นของประจุเชิงปริมาตร

$\bar{B}$ = สนามแม่เหล็ก

ε = ค่าความยินยอมทางไฟฟ้า

μ = ค่าความซึมซาบแม่เหล็ก

2.2.2 สมการคลื่นสำหรับตัวกลางที่เป็นตัวนำ

เมื่อพิจารณาตัวกลางที่เป็นตัวนำ ในตัวกลางนี้ค่าสภาพนำไฟฟ้าจะไม่เป็นศูนย์ และมีกระแสการนำเกิดขึ้นซึ่งจากสมการของแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \tag{2.6}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{J} \tag{2.7}$$

ถ้า σ เป็นสภาพการนำของตัวกลาง จากกฎของโอห์มจะได้ความหนาแน่นกระแสการนำมีค่าดังสมการที่ (2.8)

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \tag{2.8}$$

ดังนั้น จากสมการ (2.1) และ (2.2) จะได้

$$\nabla \times \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma\bar{E} \tag{2.9}$$

หาเคิร์ลของสมการ (2.1) จะได้

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\mu\nabla \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{H}$$

แทนค่า $\nabla \times \bar{H}$ จากสมการ (2.9) จะได้

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}=-\mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$$

แต่
$$\nabla\times\nabla\times\bar{E}=\nabla(\nabla\bullet\bar{E})-\nabla^2\bar{E}$$

ดังนั้น
$$\nabla(\nabla\bullet\bar{E})-\nabla^2\bar{E}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}-\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2E-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}=\nabla(\nabla\bullet E) \tag{2.10}$$

สำหรับตัวกลางที่เป็นเนื้อเดียวกัน ε มีค่าคงที่

$$\nabla\bullet\bar{E}=\frac{1}{\varepsilon}\nabla\bullet\bar{D}$$

แต่ $\nabla\bullet\bar{D}=\rho$ เนื่องจากประจุสุทธิของตัวนำอยู่ที่ผิว ภายในตัวนำไม่มีประจุ σ จึงเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\nabla\bullet\bar{E}=\frac{1}{\varepsilon}\nabla\bullet\bar{D}=\frac{1}{\varepsilon}\rho=0$$

จากสมการ (2.10) จะได้

$$\nabla^2\bar{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=0 \tag{2.11}$$

สมการ (2.11) คือ สมการคลื่นสำหรับ $\bar{E}$ ในทำนองเดียวกัน สามารถหาสมการคลื่นสำหรับ $\bar{H}$ ได้โดยหาเคิร์ลของสมการ (2.9) จะได้

$$\nabla\times\nabla\times\bar{H}=\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=0 \tag{2.12}$$

สมการ (2.12) คือ สมการคลื่นสำหรับ $\bar{H}$

2.2.3 สมการของแมกซ์เวลล์ที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

ในการปฏิบัติแหล่งกำเนิดส่วนมากจะให้ความแตกต่างและกระแสไฟฟ้ารวมทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กแปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ ตัวอย่างเช่น

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cos\omega t = \bar{E}_0 \cos 2\pi f t$$

หรือ
$$\bar{E} = \bar{E}_0 \sin\omega t = \bar{E}_0 \sin 2\pi f t \qquad (2.13)$$

เมื่อเป็นความถี่ของการแปรเปลี่ยน จากสมการ (2.13) แสดงว่ามีแฟกเตอร์ (factor) ของเวลาที่เป็นเส้นโค้งรูปซายน์ปรากฏในทุกพจน์ในสมการใดๆ

เมื่อกำหนดให้ $\bar{E}$ (r,t) เป็นสนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

$\bar{E}$ (r) เป็นสนามไฟฟ้าที่จุดๆหนึ่งในปริภูมิ (space)

จะได้สนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลามีรูปแบบดังนี้

$$\bar{E}(r,t) = \mathrm{Re}[\bar{E}(r)\, e^{j\omega t}] \qquad (2.14)$$

เมื่อ $\bar{E}$ (r) เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex number) ในทำนองเดียวกัน จะได้การขจัดไฟฟ้าความเข้มของสนามแม่เหล็ก และสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาดังนี้

$$\bar{D}(r,t) = \mathrm{Re}[\bar{D}(r)e^{j\omega t}] \qquad (2.15)$$

$$\bar{H}(r,t) = \mathrm{Re}[\bar{H}(r)e^{j\omega t}] \qquad (2.16)$$

$$\bar{B}(r,t) = \mathrm{Re}[\bar{B}(r)e^{j\omega t}] \qquad (2.17)$$

เมื่อ $\bar{D}$ (r), $\bar{H}$ (r), $\bar{B}$ (r) และเป็นจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาจากสมการของแมกซ์เวล เคิร์ลของสนามแม่เหล็ก เมื่อมีการแปรเปลี่ยนตามเวลา

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \qquad (2.18)$$

แทนค่า $\bar{D}$ (r,t) และ $\bar{H}$ (r,t) จากสมการ (2.15) และ (2.16) ในสมการ (2.18) จะได้

$$\nabla \times \left[\mathrm{Re}\,\bar{H}(r)e^{j\omega t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\,\bar{D}(r)e^{j\omega t}\right] + \mathrm{Re}\left[\bar{J}(r)e^{j\omega t}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[\nabla \times \bar{H}(r)\right] = \mathrm{Re}\left[j\omega\bar{D}(r) + \bar{J}(r)\right]$$

ถ้าความสัมพันธ์นี้เป็นจริงทุกค่าของ t จะได้

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J} \tag{2.19}$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการของแมกซ์เวลล์ เคิร์ลของสนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลาจะได้

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.20}$$

แทนค่า $\vec{E}$ (r, t) และ $\vec{B}$ (r, t) จากสมการ (2.15) และ (2.16) ในสมการ (2.20) จะได้

$$\nabla \times \left[\mathrm{Re}\,\vec{E}(r)e^{j\omega t}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\,\vec{B}(r)e^{j\omega t}\right]$$
$$\mathrm{Re}\left[\nabla \times \vec{E}(r)\right] = -\mathrm{Re}\left[j\omega\vec{B}(r)\right]$$
$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \tag{2.21}$$

ดังนั้น สมการของแมกซ์เวลล์ที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นค้างรูปซายน์ จึงมีรูปแบบดังสมการทั้งสี่ (2.22) ข้างล่าง โดยจัดในรูปแบบอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \vec{D} &= \sigma \\ \nabla \bullet \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\vec{D} + \vec{J} \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2.4 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย

สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ สมการคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานมีรูปดังนี้

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

แทนค่า $\vec{E}$ (r, t) = Re[$\vec{E}$ (r)e$^{j\omega t}$] จะได้

$$\nabla^2\left[\mathrm{Re}\,\vec{E}(r)e^{j\omega t}\right]=\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\,\vec{E}(r)e^{j\omega t}\right]$$

$$\mathrm{Re}\,\nabla^2\vec{E}(r)=\mu\varepsilon\,\mathrm{Re}(j\omega)^2\vec{E}(r)$$

$$\nabla^2\vec{E}=-\omega^2\mu\varepsilon\vec{E} \tag{2.23}$$

เรียกสมการ (2.23) ว่าสมการของเฮล์มโฮลซ์ ดังนั้นในตัวกลางที่เป็นตัวนำ ถ้าสนามไฟฟ้าแปรเปลี่ยนตามเวลา สมการคลื่น (2.11) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}-j\mu\sigma\vec{E}=0$$

$$\nabla^2\vec{E}+(\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}-j\mu\sigma)\vec{E}=0 \tag{2.24}$$

เมื่อ $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=j\omega\vec{E}$ และ $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\omega^2\vec{E}$

ในทำนองเดียวกัน สมการคลื่นสำหรับสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ (2.12) สามารถเขียนได้ในรูปแบบเดียวกัน ดังนี้

$$\nabla^2\vec{E}+(\omega^2\mu\varepsilon-j\omega\mu\sigma)\vec{H}=0 \tag{2.25}$$

เมื่อ $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=j\omega\vec{E}$ และ $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\omega^2\vec{H}$

สำหรับคลื่นระนาบสม่ำเสมอที่ไม่แปรเปลี่ยนตาม x และ y สมการคลื่นมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

หรือ

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\beta^2\vec{E} \tag{2.26}$$

เมื่อ

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

พิจารณาองค์ประกอบ $E_x(z)$ ผลเฉลยของสมการ (2.26) อาจเขียนอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$E_x(z)=C_1e^{-j\beta z}+C_2e^{jBz} \tag{2.27}$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน (Complex constant) สนามที่แปรเปลี่ยนตามเวลาคือ

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}[E_x(z)e^{j\omega t}]$$

แทนค่า $E_x(z)$ จากสมการ (2.27) จะได้

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}[C_1 e^{j(\omega t-\beta z)} + C_2 e^{j(\omega t+\beta z)}] \qquad (2.28)$$

ถ้าใช้ส่วนจริง (real part) ในสมการ (2.28) ผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบเส้นโค้งรูปซายน์ ตัวอย่างเช่นเมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าจริง สมการ (2.28) จะกลายเป็น

$$E_x(z,t) = C_1\ \cos(\omega t - \beta z) + C_2\cos(\omega t + \beta z) \qquad (2.29)$$

จะเห็นได้ว่าตัวกลางที่เป็นเนื้อเดียวกันและไม่มีการสูญเสียพลังงาน ถ้าสมมุติว่าการแปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ จะทำให้การแปรเปลี่ยนของปริภูมิ หรือพิกัดเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ด้วย

สมการ (2.28) และ (2.29) แทนสนามไฟฟ้าที่เป็นผลบวกของคลื่น 2 ขบวนที่เคลื่อนที่ในทิศตรงข้าม ถ้า $C_1 = C_2$ คลื่นเดินหน้า (traveling wave) ทั้ง 2 ขบวนจะรวมกันเป็นคลื่นนิ่ง (standing wave) โดยความเร็วของคลื่นหรือความเร็วเฟส (phase velocity) มีค่าดังนี้

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega}{\beta}$$

ถ้า f เป็นความถี่ของคลื่น

λ เป็นความยาวของคลื่น

จะได้ $$v = f\lambda = \frac{\omega}{\beta}$$

แต่ $$\omega = 2\pi f$$

ดังนั้น $$v = f\lambda = \frac{2\pi f}{\beta}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2.30)$$

เรียก β ว่า ค่าคงที่ทางเฟส (Phase constant) ของคลื่น

2.2.5 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางที่เป็นตัวนำ

สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ สามารถหาผลเฉลยของสมการคลื่นในตัวกลางทีเป็นตัวนำได้ สมการคลื่น (2.24) สามารถเขียนในรูปแบบสมการของ เฮล์มโฮลซ์ ได้ดังนี้

$$\nabla^2\vec{E}-\gamma^2\vec{E}=0 \tag{2.31}$$

เมื่อ $$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon = j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon) \tag{2.32}$$

เรียก γ ว่าคงตัวการแผ่ (Propagation constant) โดย γ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีส่วนจริง (Real) คือ α โดยมีหน่วยเป็น Neper/m และส่วนจินตภาพ (imaginary part) มีหน่วยเป็น radian/m คือ β

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

เมื่อ $$\alpha = \mathrm{Re}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

และ $$\beta = \mathrm{Im}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

เรียก α ว่า ค่าคงที่ของการลดทอน (Attenuation constant) ตามความเป็นจริงแล้ว รากที่สองของ γ^2 มี 2 ค่า คือ ค่าที่เป็นบวกค่าที่เป็นลบ แต่เพื่อความสะดวกจะต้องใช้ค่าที่เป็นบวก เมื่อพิจารณาคลื่นระนาบสม่ำเสมอที่เคลื่อนที่ในทิศ z สนามไฟฟ้าต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}=\gamma^2\vec{E} \tag{2.33}$$

ผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ

$$E(z) = E_0e^{-\gamma z} \tag{2.34}$$

ในรูปแบบการแปรเปลี่ยนตามเวลา จะได้

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{E}_0e^{j(\omega t-\beta z)}] \tag{2.35}$$

สมการ (2.35) คือ ผลเฉลยของสมการของคลื่นที่ในทิศ z และมีสนามไฟฟ้าลดลงโดยแฟกเตอร์ $e^{-\alpha z}$ ตามระยะทางที่เพิ่มขึ้น เช่นเดียวกันกรณีของตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานค่าคงตัวของการเลื่อนเฟส และความเร็วเฟสของคลื่นมีค่าดังนี้

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{และ} \quad v = f\lambda = \frac{\omega}{\beta}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียน α และ β เป็นพจน์ของ σ, μ และ ε ดังนี้

$$\alpha = \mathrm{Re}\sqrt{(j\omega\mu)(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)} - 1\right]} \tag{2.36}$$

$$\beta = \mathrm{Im}\sqrt{(j\omega\mu)(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)} + 1\right]} \tag{2.37}$$

2.2.6 ตัวนำและไดอิเล็กตริก

ในทางแม่เหล็กไฟฟ้า วัสดุถูกแบ่งออกเป็น 2 พวก คือ ตัวนำ และไดอิเล็กตริก หรือ ฉนวน (Insulator) เส้นแบ่งระหว่าง 2 พวกนี้ไม่ชัดเจน ตัวอย่างเช่นโลก ในช่วงของความถี่วิทยุจัดเป็นตัวนำแต่ช่วยอื่นจัดเป็นไดอิเล็กตริก พิจารณาสมการของแมกซ์เวลล์ที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา

$$\bar{V} \times \bar{H} = \bar{J} \times j\omega\bar{D}$$

แทนค่า $\bar{J} = \sigma\bar{E}$ และ $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ จะได้

$$\bar{V} \times \bar{H} = \sigma\bar{E} + j\omega\varepsilon\bar{E}$$

พจน์แรกทางขวาของสมการคือ ความหนาแน่นกระแสการนำไฟฟ้า (Conduction current density) และพจน์ที่สองคือ ความหนาแน่นกระแสการขจัด (displacement current density)

อัตราส่วน $\frac{J}{\omega D} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ คือ อัตราส่วนระหว่างความหนาแน่นกระแสการนำ และความหนาแน่นกระแสการกระจัดในตัวกลางเรียกอัตราส่วนนี้ว่า แฟกเตอร์การกระจาย (dissipation factor) ดังนั้น $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1$ คือ เส้นแบ่งระหว่างตัวนำและไดอิเล็กติก สำหรับตัวนำ $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 1$ ส่วนไดอิเล็กตริก $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 1$

สำหรับตัวนำที่ดี เช่น โลหะ ในช่วงสเปกตรัมความถี่วิทยุ $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$ จากสมการ (2.36) และ (2.37) จะได้

$$\alpha = \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าพิจารณาทองแดง ที่มีค่าความถี่สูงถึง 30,000 เมกกะเฮิรตซ์ $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ มีค่าประมาณ 3.5×10^{8}

สำหรับไดอิเล็กตริกหรือฉนวนที่ดี ในช่วงความถี่วิทยุ $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$ ตัวอย่างเช่น ไมกาในช่วงความถี่วิทยุที่คนได้ยิน $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ อยู่ในระดับ 0.0002

สำหรับตัวนำที่ดี σ และ ε เกือบจะไม่ขึ้นกับความถี่ แต่สำหรับไดอิเล็กตริก σ และ ε เป็นฟังก์ชันของความถี่ แต่อัตรส่วน $\sigma / \omega\,\varepsilon$ เป็นค่าคงที่ในช่วงความถี่ที่พิจารณา ด้วยเหตุผลนี้สมบัติของไดอิเล็กตริกถูกกำหนดด้วยพจน์ของค่าคงตัวไดอิเล็กตริก σ และอัตราส่วน $\sigma / \omega\varepsilon$

2.2.7 การเดินทางของคลื่นในไดอิเล็กตริกที่ดี

กรณีของไดอิเล็กตริกที่ดี $\sigma / \omega\varepsilon << 1$ ดังนั้นจากการใช้ทฤษฎีบทไบโนเมียล (binomial theorem)

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} = 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2}$$

ซึ่งมีเพียงสองพจน์แรกของการขยายไบโนเมียลเท่านั้น จากสมการ (2.36) จะได้ α มีค่าดังนี้

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2}\right) - 1\right]}$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.38}$$

ในทำนองเดียวกัน จากการใช้ทฤษฎีบทไบโนเมียล พจน์สำหรับ β จากสมการ (2.37) มีค่าดังนี้

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2}\right)+1\right]}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2}}$$

จากการใช้ทฤษฎีบทไบโนเมียลอีกครั้งจะได้

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right] \tag{2.39}$$

$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ คือ แฟกเตอร์การเลื่อนเฟส (Phase factor) สำหรับไดอิเล็กตริกสมบูรณ์ (perfect dielectric) ถ้า v เป็นความเร็วคลื่นในไดอิเล็กตริก v มีค่าดังนี้

$$v = \frac{\omega}{\beta} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right]} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1+\frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right]$$

$$v = v_0\left[1-\frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right] \tag{2.40}$$

เมื่อ $v_0 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ เป็นความเร็วของคลื่นในไดอิเล็กตริกเมื่อสภาพนำไฟฟ้าเป็นศูนย์ ผลของการสูญเสียพลังงานเพียงเล็กน้อย ทำให้ความเร็วของการแผ่คลื่นลดลง

สำหรับความต้านทางเชิงซ้อนในตัว หรือความต้านทานเชิงซ้อนเฉพาะ Z ของตัวกลางที่เป็นตัวนำบางส่วน ซึ่งมีค่าสภาพนำคงที่ และสนามแปรเปลี่ยนตามเวลา นิพจน์ทั่วไปของ Z มีค่ดังนี้

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\left[\frac{1}{1+\dfrac{\sigma}{j\omega\varepsilon}}\right]} \tag{2.41}$$

จะเห็นได้ว่าในตัวนำที่ดี (Good conductor) σ มีค่ามากกว่า $\omega\varepsilon$ มากๆ ซึ่งหมายความว่า α, β และ γ มีค่ามากด้วย แสดงว่า คลื่นจะลดลงมากเมื่อเคลื่อนที่ผ่านตัวนำ และการเลื่อนเฟสต่อหนึ่งหน่วยความยาวมีค่ามาก ความเร็วของคลื่นซึ่งเป็นปฏิภาคผกผันกับ β จะมีค่าน้อยในตัวนำที่ดี ส่วนความต้านทานเชิงซ้อนเฉพาะมีค่าน้อย มุมของความต้านทานเชิงซ้อนมีค่า 45° เสมอสำหรับตัวนำที่ดี

$$Z = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\angle 45^0 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j\pi/4} \tag{2.42}$$

สำหรับฉนวนสมบูรณ์ $\sigma = 0$ จากสมการ (2.41) จะได้

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.43}$$

สำหรับสุญญากาศ $Z = Z_0$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \tag{2.44}$$

2.2.8 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางกึ่งไดอิเล็กตริกกึ่งตัวนำ

สารกึ่งไดอิเล็กตริกกึ่งตัวนำ คือสารไดอิเล็กตริกที่มีสภาพการนไฟฟ้าสูงพอประมาณ โดยมีค่า σ อยู่ระหว่าง 0.01 $\approx$ 100 เท่าของ ε ค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ γ (α กับ β) และค่าอิมพีแดนซ์ของสาร Z จะได้ค่าสุดท้ายเป็นจำนวนเชิงซ้อนค่าหนึ่งซึ่งสามารถจะนำมาหาค่าสัมประสิทธิ์การลดทอน α ค่าคงที่ทางเฟส β ตามลำดับดังนี้

$$\alpha = \mathrm{Re}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\mu\varepsilon)} \tag{2.45}$$

$$\beta = \mathrm{Im}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\mu\varepsilon)} \tag{2.46}$$

และอิมพีแดนซ์ของเนื้อสาร Z

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \tag{2.47}$$

2.2.9 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางที่เป็นเนื้อเยื่อ

เนื้อเยื่อปอดจัดเป็นตัวกลางที่มีค่าคงที่ประจำตัวกลาง เป็นตัวกลางชนิดกึ่งไดอิเล็กตริกกึ่งตัวนำ จากสมการของเฮล์มโฮลตซ์ (Helmholtz) ในฟรีสเปซความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าจะได้ดังสมการที่ (2.48)

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E} = 0 \tag{2.48}$$

ในกรณีที่ตัวกลางมีสภาพความนำไฟฟ้าจำกัดที่ค่าๆหนึ่ง เช่น คลื่นเดินทางผ่านตัวกลางที่เป็นเนื้อเยื่อจะได้ความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าดังสมการที่ (2.49)

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \left(1 + j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\vec{E} = 0 \tag{2.49}$$

และสมการหาสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเมื่อให้คลื่นเดินทางในทิศทาง +Z

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\gamma_z z} \tag{2.50}$$

เมื่อกำหนดให้ γ มีค่าดังสมการที่ (2.51)

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{(j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} - 1)} \tag{2.51}$$

โดยที่ γ เป็นค่าคงที่ในการเดินทางของคลื่น

α =Re(γ) สัมประสิทธิ์ในการลดทอนของคลื่น

β =Im(γ) ค่าคงที่ทางเฟส

สามารถหาสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นได้ดังสมการที่ (2.52)

$$\vec{H} = \frac{\gamma}{j\omega\mu}(E_0 e^{-j\gamma_z z}) \tag{2.52}$$

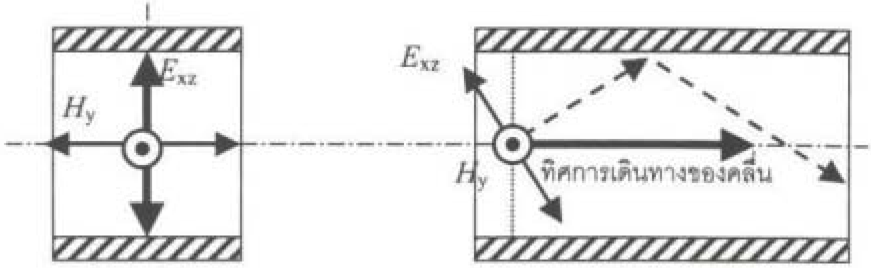
2.3 โหมดสำหรับการเดินทางของคลื่น (Wave Propagation Modes)

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในสายส่งใดๆนั้นจะมีลักษณะโหมดการเคลื่อนที่ หรือลักษณะการเคลื่อนที่ภายในสายส่งนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะการพุ่งเข้าของคลื่นและรูปทรงภาคตัดขวางของสายส่งสัญญาณไฟฟ้านั้น โดยแต่ละโหมดจะมีรูปแบบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีรูปร่างลักษณะที่สอดคล้องกับภาคตัดขวางภายในของสายนั้นๆซึ่งในทางคณิตศาสตร์แล้วจะเปรียบเหมือนรูปทรงภาคตัดขวางว่าเป็นเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่อยู่ภายในสายส่งสัญญาณไฟฟ้านั้นๆ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภาคตัดขวาง (Transverse fields) ที่เกิดขึ้นมานี้จะมีรูปแบบของสนามเฉพาะตัวที่เรียกว่า โหมดภาคตัวขวาง (Transverse mode) โดยทั่งไปแล้วสายส่งได้จำแนกตามประเภทของโหมดการเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า โดยจำแนกออกเป็นโหมดพื้นฐานได้สามแบบ คือ

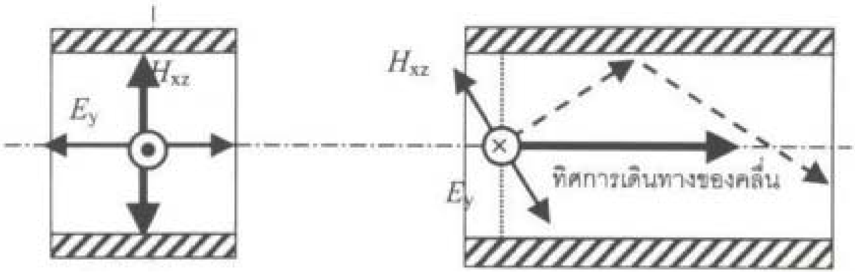
ก) โหมดสนามแม่เหล็กตัดขวาง (Transverse Magnetic Mode :TM mode) เป็นโหมดที่คลื่นที่เคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยมีส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กเท่านั้นที่ตั้งฉากกับทิศการเดินทางของคลื่นในสายส่งนั้นหรืออีกนัยหนึ่งคือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยไม่มีสนามแม่เหล็กในทิศทางของคลื่นในสายส่ง ดูรูปประกอบการอธิบายได้ในรูปที่ 2.1(ก)

ข) โหมดสนามไฟฟ้าตัดขวาง (Transverse Electric Mode :TE mode) เป็นโหมดที่คลื่นที่เคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าเท่านั้นที่ตั้งฉากกับทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่งนั้นหรืออีกนัยหนึ่งคือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยไม่มีสนามไฟฟ้าในทิศการเดินทางของคลื่นในสายส่ง ดูรูปประกอบการอธิบายได้ในรูปที่ 2.2(ข)

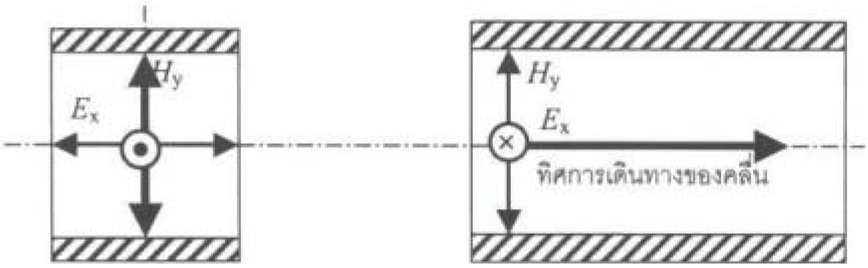
ค) โหมดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง (Transverse Electromagnetic Mode :TEM mode) เป็นโหมดที่คลื่นที่เคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศตั้งฉากกับทิศการเดินทางของคลื่นในสายส่งนั้น หรืออีกนัยหนึ่งคือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยไม่มีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่งเลย ดูรูปประกอบการอธิบายได้ในรูปที่ 2.2(ค) โดยทั่วไปแล้วการเคลื่อนที่ในโหมดนี้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะต้องมีความสมมาตรกันหมด ดังเช่น คลื่นเคลื่อนที่ในอากาศ ในสายโคแอกเซียล (Coaxial) และสายส่งอื่นๆในรูปที่ 2.1(ก) แต่ก็อาจมีโอกาสที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นมีความสมมารตไม่สมบูรณ์หมดดังเช่นคลื่นที่เคลื่อนที่ในสายส่งแบบไมโครสตริป (Microstrip) ในรูปที่ 2.1(ก) จึงเรียกโหมดย่อยนี้ว่า โหมดกึ่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง(Quasi-TEM)



(ก) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามแม่เหล็กตัดขวาง(TM mode)



(ข) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามไฟฟ้าตัดขวาง(TE mode)



(ค) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง(TEM mode)

รูปที่ 2.1 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กกับทิศการเดินทางของคลื่นในโหมดการเคลื่อนที่แบบต่าง ๆ

ตัวอย่างของโหมดการเคลื่อนที่ทั้งสามแบบของคลื่นที่เคลื่อนที่ในแผ่นตัวนำคลื่นรูปเหลี่ยมนี้ (Slab Waveguide) ได้แสดงดังในรูปที่ 2.1

ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสายส่งนั้น โดยทั่งไปแล้วจะต้องหาสมการคำตอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนแกนต่างๆในที่ว่างอิสระทั้งหมดหกสนามด้วยกันคือ $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y,$ และ H_z แต่เมื่อมาทำการวิเคราะห์การเคลื่อนที่นของคลื่น

ในสายส่งสัญญาณแล้ว สามารถที่จะกำหนดรูปแบบโหมดของการเคลื่อนที่เพื่อที่จะลดจำนวนองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่จะคำนวณลงไปได้ เช่นในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ z ในโหมด TM สามารถไม่นำ H_z(โดยมี $H_z = 0$) มาพิจารณาจึงเหลือส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดห้าสนามด้วยกันคือ $E_x, E_y, E_z, H_x,$ และ H_y ในทำนองเดียวกันในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมด TE จะเหลือส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดห้าสนามด้วยกันคือ $E_x, E_y, H_x, H_y,$ และ H_z (โดยมี $E_z = 0$)สำหรับการเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสุดท้ายหรือโหมด TEM จะไม่มีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางเคลื่อนที่หรือมีสนาม E_z กับ $H_z = 0$ จึงเหลือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเพียงแค่สี่สนามคือ $E_x, E_y, H_x,$ และ H_y เท่านั้น

นอกจากนี้แล้วการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของโหมดต่างๆสามารถทำให้ง่ายยิ่งขึ้นมาก ถ้าสมมุติการวิเคราะห์คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้านั้นมีสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าสนามใดสนามหนึ่งอยู่บนหลักต่างๆนั่นคือ แกน x หรือ แกน y แล้วจะทำให้สามารถลดจำนวนสนามบนระนาบ xy สี่สนาม $E_x, E_y, H_x,$ และ H_yลงมาเหลือเป็น E_x กับ H_y หรือ E_y กับ H_xเพียงแค่สองสนามเท่านั้น ดังนั้นสำหรับในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ z ในโหมด TM จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดที่ต้องพิจารณาเหลือเพียงสามสนามด้วยกันคือ E_x, H_y กับ E_z, E_y เพียง H_x กับ E_z เช่นเดียวกันสำหรับในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ z ในโหมด TE จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดที่ต้องพิจารณาเหลือเพียงสามสนามด้วยกันคือ E_x, H_y กับ H_z หรือ E_y, H_x กับ E_z ในทำนองเดียวกันการวิเคราะห์ของคลื่นในสายส่งเป็นคลื่นที่อยู่ในรูปแบบของโหมด TEM สามารถจะทำการวิเคราะห์ได้ง่ายที่สุดโดยมีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเพียงแค่ E_x กับ H_y หรือ E_y กับ H_x เพียงแค่คู่สนามเดียวเท่านั้น เราจึงมักเริ่มทำการวิเคราะห์หาสมการของคลื่นที่โหมด TEM ก่อนเสมอเนื่องจากเป็นโหมดที่ง่ายที่สุด

2.4 สนามไฟฟ้าในช่องว่างวัสดุ (Electric Fields in Material Space)

การพิจารณาถึงสนามไฟฟ้าสถิตในช่องว่างอวกาศว่าง(free space) หรือสุญญากาศ(vacuum) หรือบริเวณที่ไม่มีวัสดุอยู่(no material) ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 4 ในบทนี้เราจะพัฒนาขึ้นไปอีก สนามไฟฟ้าสามารถเกิดขึ้นได้ในอวกาศว่าง มันอาจจะเกิดขึ้นได้ในตัวกลางวัสดุ(material media) เช่น ตัวกลางที่เป็นกระดาษ ฯลฯ ที่คั่นอยู่ระหว่างขั้วทั้งสองของตัวเก็บประจุ เราจะเรียกว่าเป็นตัวกลางวัสดุ วัสดุอาจถูกจำแนกอย่างคร่าวๆตามคุณสมบัติทางไฟฟ้าของมันได้ดังเช่น ตัวนำไฟฟ้า(conductor) และตัวไม่นำไฟฟ้า(nonconductor) ซึ่งไม่นำไฟฟ้าหรือวัสดุไม่นำไฟฟ้า(nonconducting material) โดยปกติจะเรียกว่า ตัวฉนวน(insulator) หรือ ไดอิเล็กตริก(dielectric) และโดยทั่วๆไป การพิจารณาอย่างคร่าวๆ ถึงคุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุจะขึ้นอยู่กับพื้นฐานความเข้าใจถึง

แนวความคิดเกี่ยวกับ การนำ (conduction), กระแสไฟฟ้า (electric current) และการโพลาไรซ์ (polarization) และนอกจากนั้นก็จะต้องพิจารณาถึงคุณสมบัติของวัสดุไดอิเล็กตริก(dielectric material)

2.4.1 วัสดุตัวกลาง(Material Media) ในสนามไฟฟ้าสถิต(Static Electric Field)

เราได้พิจารณาถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการกระจายของประจุอยู่กับที่ในอากาศหรืออวกาศว่างมาแล้ว และจากนี้ไปเราจะได้ศึกษาถึงพฤติกรรมของสนามในวัสดุตัวกลาง(material media) โดยทั่วไปเราสามารถจำแนกวัสดุตามคุณสมบัติทางไฟฟ้าได้เป็นสามชนิดคือ ตัวนำ(conductor) สารกึ่งตัวนำ(semiconductor) และตัวฉนวน(insulator หรือ dielectric) ตามการพิจารณาข้างต้นเราได้ทราบแล้วว่าการที่วัสดุจะเป็นตัวนำสารกึ่งตัวนำ หรือตัวนำฉนวนนั้น จะขึ้นอยู่กับอิเล็กตรอนอิสระที่เคลื่อนที่จากอะตอมหนึ่งไปยังอีกอะตอมหนึ่ง

2.4.2 ตัวนำ (Conductors) ในสนามไฟฟ้าสถิต

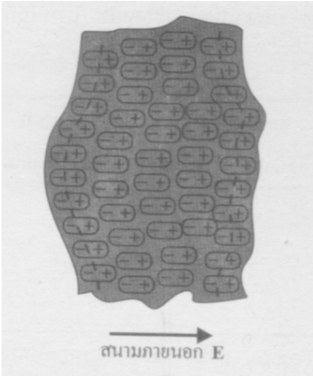
โดยทั่วไปแล้วปัญหาแม่เหล็กไฟฟ้าจะเกี่ยวข้องกับตัวกลางที่มีคุณสมบัติทางฟิสิกส์หลายอย่าง และยังต้องทราบถึงความสัมพันธ์ของปริมาณสนามที่ขอบร่วม (interface) ระหว่างสองตัวกลาง ดังเช่น เราอาจจะต้องการหาวิธีการที่ E และ D เปลี่ยนไปตรงบริเวณขอบร่วม ซึ่งเราทราบมาแล้วว่าเงื่อนไขขอบจะต้องสอดคล้องที่ขอบร่วมระหว่างตัวนำกับอากาศว่าง และเงื่อนไขเหล่านี้ได้กำหนดไว้ในสมการที่ (2.53) และ (2.54)

$$\vec{E}_t = 0 \tag{2.53}$$

$$\vec{E}_n = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \tag{2.54}$$

2.4.3 ไดอิเล็กตริก (Dielectrics) ในสนามไฟฟ้าสถิต

ตัวกลางวัสดุทุกชนิดจะประกอบไปด้วยอะตอมที่มีนิวเคลียสประจุบวกถูกล้อมรอบด้วยอิเล็กตรอนประจุลบ ถึงแม้ว่าโมเลกุลของไดอิเล็กตริกจะเป็นกลางแบบมาโครสโคปิก (macroscopically neutral) แต่การมีสนามไฟฟ้าอยู่ภายนอกจะเป็นเหตุทำให้เกิดแรงกระทำบนแต่ละอนุภาคประจุ และเป็นเหตุทำให้เกิดการเข้าแทนที่กันของประจุบวกและประจุลบในระยะสั้นๆใน ทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งประจุเหล่านี้คือ ประจุผูกพัน(bound charge) การเข้าแทนที่กันถึงแม้ว่าจะเป็นระยะสั้นๆ เมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของอะตอม การเป็นขั้วหรือโพลาไรซ์(polarize) ของวัสดุไดอิเล็กตริกจะเข้ามาเกี่ยวข้อง และไดโพลไฟฟ้า(electric dipole) จะเกิดขึ้นเสมอ ตำแหน่งในการเคลื่อนที่ดังกล่าวนี้ได้แสดงไว้ดังรูปที่ 2.2 ซึ่งในขณะที่ไดโพลไฟฟ้าเกิดขึ้นนั้นศักย์ไฟฟ้าและความเข้มสนามไฟฟ้าจะต้องปรากฏขึ้นด้วย



รูปที่ 2.2 ภาคตัดขวางของตัวกลางไดอิเล็กตริกโพลาไรซ์

2.4.4 เงื่อนไขขอบ (Boundary Condition) ของสนามไฟฟ้าสถิต (Electrostatic Field)

จากนี้ไปเราจะพิจารณาถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในตัวกลางไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous medium) ดังเช่นสนามที่เกิดขึ้นในบริเวณที่ประกอบด้วยสองตัวกลางที่ต่างกัน ทั้งนี้เงื่อนไขต่างๆที่สนามจะต้องสอดคล้องที่ขอบร่วมซึ่งแยกระหว่างตัวกลางทั้งสอง เรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขขอบ (boundary condition) เงื่อนไขต่างๆเหล่านี้จะเป็นประโยชน์ในการหาสนามบนด้านหนึ่งถ้ารู้สนามบนอีกด้านหนึ่งของขอบ เงื่อนไขจะช่วยให้เราจำแนกชนิดของวัสดุได้อย่างชัดเจนว่าเป็นตัวกลางอะไร เราจะพิจารณาเงื่อนไขขอบที่การแยกขอบร่วมระหว่าง

1. ไดอิเล็กตริก ε_{r1}และไดอิเล็กตริก ε_{r2}
2. ตัวนำไฟฟ้า และไดอิเล็กตริก
3. ตัวนำไฟฟ้า และอากาศว่าง

ซึ่งก่อนที่จะพิจารณาขอบร่วมทั้งสามข้างต้น ในการกำหนดเงื่อนไขขอบ เราต้องใช้สมการของแมกซ์เวลล์สำหรับสนามไฟฟ้าสถิตคือ

$$\oint_L \vec{E}\cdot dl = 0 \tag{2.54}$$

สมการที่ (2.54) เป็นสมการสนามไฟฟ้าสถิต E ของแมกซ์เวลล์ ซึ่ง $\oint_L$ เป็นการอินทิเกรตวิถีปิด (close path) และ

$$\oint_L \vec{D}\cdot ds = Q_{enc} \tag{2.55}$$

สมการที่ (2.55) เป็นสมการสนามไฟฟ้าสถิต $\vec{D}$ ของแมกซ์เวลล์ซึ่ง $\oint_S$ เป็นการอินทิเกรตพื้นผิวปิด (close surface) และในเวลาเดียวกันเราจะต้องแยกความเข้มสนามไฟฟ้า ออกเป็นสองส่วนประกอบตั้งฉาก (orthogonal component) คือ

$$\vec{E}=\vec{E}_t+\vec{E}_n \tag{2.56}$$

เมื่อ E_t คือส่วนประกอบแนวสัมผัส(tangential component) กับขอบร่วมและ E_t คือส่วนประกอบแนวตั้งฉาก(normal component) กับขอบร่วม และในลักษณะเดียวกันนี้เราสามารถแยกความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า D ออกเป็นสองส่วนประกอบด้วย

2.4.5 เงื่อนไขขอบระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก (Dielectric-Dielectric Boundary Condition)

พิจารณาสนาม E ที่เกิดขึ้นในบริเวณที่ประกอบด้วยไดอิเล็กตริกสองชนิด ซึ่งกำหนดคุณลักษณะของไดอิเล็กตริกที่ 1 ด้วย $\varepsilon_1= \varepsilon_0\varepsilon_{r1}$ และ คุณลักษณะของไดอิเล็กตริกที่ 2 กำหนดด้วย $\varepsilon_2= \varepsilon_0\varepsilon_{r2}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.3(ก) $\vec{E}_1$ และ $\vec{E}_2$ เป็นสนามไฟฟ้าในตัวกลางที่ 1 และตัวกลางที่ 2 เราสามารถแยกสนามไฟฟ้าได้คือ

$$\vec{E}_1 =\vec{E}_{1t} +\vec{E}_{1n} \tag{2.57}$$

$$\vec{E}_2 =\vec{E}_{1n} +\vec{E}_{2n} \tag{2.58}$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ (2.57) กับวิถีปิด abcda ของรูปที่ 2.3(ก)โดยสมมุติให้วิถีมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ E จะได้

$$0= \vec{E}_{1t}\,\Delta w-\vec{E}_{1n}\left(\frac{\Delta h}{2}\right)- \vec{E}_{2n}\left(\frac{\Delta h}{2}\right)-\vec{E}_{2t}\Delta w+ \vec{E}_{2n}\left(\frac{\Delta h}{2}\right)+ \vec{E}_{1n}\left(\frac{\Delta h}{2}\right) \tag{2.59}$$

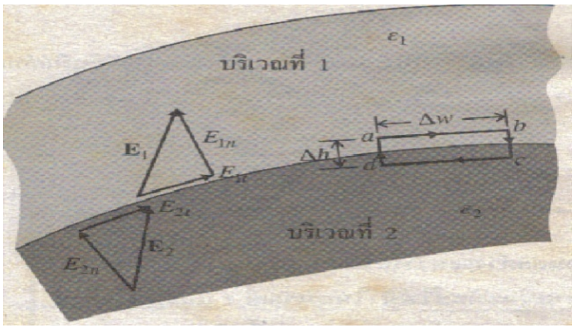
เมื่อ $\vec{E}_t = |\boldsymbol{E_t}|$ และ $\vec{E}_n = |\boldsymbol{E_n}|$ ในขณะที่ Δh เข้าสู่ 0 (วิถีขนาดเล็กมาก) สมการที่ (2.59) จะเปลี่ยนเป็น

$$\vec{E}_{1t}= \vec{E}_{2t} \tag{2.60}$$

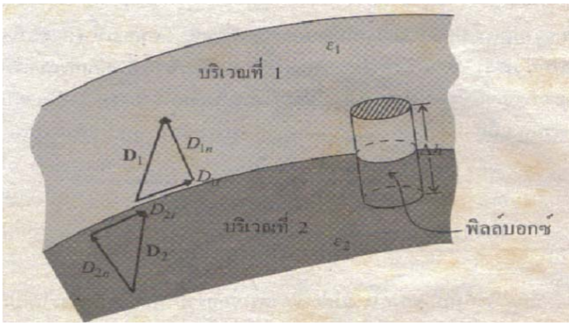
ส่วนประกอบแนวสัมผัสในตัวกลางที่ ($\vec{E}_{1t}$) เหมือนกับส่วนประกอบแนวสัมผัสในตัวกลางที่2 ($\vec{E}_{2t}$)

ดังนั้นส่วนประกอบแนวสัมผัสของ E บนด้านทั้งสองของขอบจะเหมือนกัน ($\vec{E}_{1t}=\vec{E}_{2t}$) หรืออาจหมายถึงว่า E_t จะไม่เปลี่ยนแปลงบนขอบและจะกล่าวได้ว่า $\vec{E}_t$ **ต่อเนื่อง (continuous)** ตรงบริเวณขอบ เนื่องจาก $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon\vec{E}_t+\varepsilon\vec{E}_n=\vec{E}_t+\vec{E}_n$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.61) จะกำหนดได้ว่า

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_1}=\vec{E}_{1t}=\vec{E}_{2t}=\frac{\vec{D}_{2t}}{\varepsilon_2} \tag{2.61}$$



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.3 ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก

หรือ
$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_1}=\frac{\vec{D}_{2t}}{\varepsilon_2} \tag{2.62}$$

นั่นคือ $\vec{D}_1$จะเปลี่ยนแปลงตรงขอบร่วม $\vec{D}_t$ ดังนั้น กล่าวได้ว่า **ไม่ต่อเนื่อง(discontinuous)** ตรงขอบร่วม

ในทำนองเดียวกันนี้ เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.55) กับพิลบอกซ์ (pillbox) หรือ พื้นผิวแบบเกาส์ (Gaussian surface) ในรูปที่ 2.3(ข) โดยให้ Δh เข้าสู่ศูนย์จะได้ว่า

$$\Delta q=\rho_S\Delta S=\vec{D}_S\Delta S-\vec{D}_S\Delta S \tag{2.63}$$

หรือ

$$\vec{D}_{1n}\text{-}\vec{D}_{2n} = \rho_s \tag{2.64}$$

ความแตกต่างระหว่างส่วนประกอบแนวตั้งฉากของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในบริเวณที่ 1 และบริเวณที่ 2 เท่ากับความหนาแน่นประจุพื้นผิว ρ_s

เมื่อ ρ_s เป็นความหนาแน่นประจุอิสระที่อยู่อย่างมั่นคงที่ขอบ สมการที่ (2.64) จะขึ้นอยู่กับพื้นฐานของการสมมุติว่า $\vec{D}$ มีทิศทางจากบริเวณที่ 2 ไปยังบริเวณที่ 1และสมการที่ (2.64) จะต้องถูกนำมาประยุกต์ใช้ตามนี้ด้วยถ้าไม่มีประจุอิสระเกิดขึ้นที่ขอบร่วม $\rho_s = 0$ และสมการที่ 2.64 จะกลายเป็น

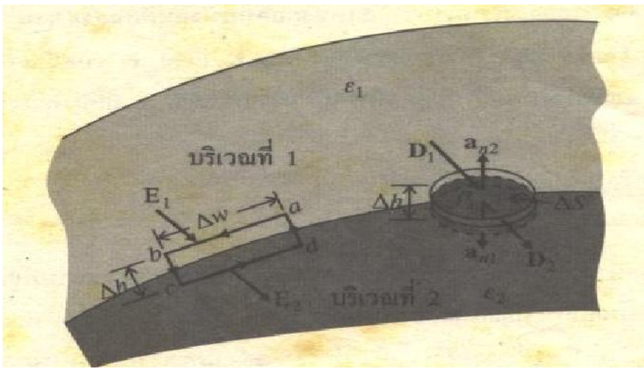
$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \tag{2.65}$$

ตรงบริเวณขอบร่วมไม่มีประจุพื้นผิว ρ_s

ดังนั้นส่วนประกอบแนวตั้งฉากของ $\vec{D}_n$ จึงต่อเนื่องตรงขอบร่วมนั่นคือ $\vec{D}_n$ จะไม่เปลี่ยนแปลงที่ขอบเนื่องจาก $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ สมการที่ (2.65) จึงสามารถกำหนดได้ว่า

$$\varepsilon_1\vec{E}_{1n} = \varepsilon_2\vec{E}_{2n} \tag{2.66}$$

สมการที่ (2.66) แสดงให้เห็นว่า ส่วนประกอบแนวตั้งฉากของ $\vec{E}$ ไม่ต่อเนื่องที่ขอบ สมการที่ (2.61) และ (2.64) หรือ (2.65) จะกล่าวได้อย่างถูกต้องว่าเป็น เงื่อนไขขอบ (boundary conditions) ซึ่งสมการเหล่านี้ต้องสอดคล้องตามสนามไฟฟ้าที่ขอบที่ถูกแยกด้วยไดอิเล็กตริกที่ต่างกันทั้งสอง



รูปที่ 2.4 ขอบร่วมระหว่างสองตัวกลาง

การพิจารณาความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และความหนาแน่นสนามไฟฟ้า $\vec{D}$ ข้างต้นอาจจะพิจารณาได้จากการอินทิเกรตวิถีปิด (close path) เราลองมาพิจารณาขอบร่วมระหว่างสองตัวกลางทั่วไปในรูปที่ 2.4 ซึ่งถ้าเรามากำหนดวิถีขนาดเล็ก (small path) abcda ซึ่งประกอบด้วยด้าน ab ในบริเวณที่ 1 และด้าน cd ในบริเวณที่ 2 โดยทั้งนี้ด้านทั้งสองจะขนานกับขอบร่วมและยาวเท่ากับ Δw เราจะประยุกต์ใช้สมการที่ (2.54) กับเส้นทางเดิน(วิถี) ขนาดเล็กนี้ ถ้ากำหนดให้ bc=da= Δh มีค่าเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นอินทิกรัลตามเส้นทางทั้งสองนี้สามารถตัดทิ้งได้ เพราะฉะนั้นอินทิกรัลตามเส้นบนทางเดิน(วิถี) abcda คือ

$$\oint_{abcda} \vec{E} \cdot dl = \vec{E}_{1} \cdot \Delta w + \vec{E}_{1} \cdot \Delta w$$
$$= \vec{E}_{1t} \cdot \Delta w + \vec{E}_{2t} \cdot \Delta w$$
$$= 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \text{ V/m} \tag{2.67}$$

เงื่อนไขขอบของส่วนประกอบแนวสัมผัสของ *E*

(Boundary condition for tangential component of *E*)

ในสมการที่ (2.67) แสดงให้ทราบว่า **ส่วนประกอบแนวสัมผัสของสนาม $\vec{E}$ ต่อเนื่องตรงบริเวณขอบร่วม (tangential component of an E field is continuous across an interface)** เมื่อบริเวณที่ 1 มีสภาพยอมเป็น ε_1 และบริเวณที่ 2 มีสภาพยอมได้ทางไฟฟ้าเป็น ε_2ดังนั้นสามารถกำหนดได้ว่า

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{1n}}{\varepsilon_1} \tag{2.68}$$

เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบแนวฉากของสนามที่ขอบ เราจะต้องสร้างพิลล์บอกซ์ขนาดเล็ก (pillbox) ที่มีผิวด้านบนอยู่ในบริเวณที่ และมีผิวด้านล่างอยู่ในบริเวณที่ 2 ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ถ้าผิวมีพื้นที่ ΔSและความสูงของพิลล์บอกซ์ขนาดเล็กคือ Δh เมื่อประยุกต์ใช้กฎของเกาส์ ในสมการที่ (2.55) กับพิลล์บอกซ์ขนาดเล็กนี้จะได้รับ

$$\oint_L \vec{D} \cdot ds = (\vec{D}_1 \cdot a_{n1} + \vec{D}_2 a_{n1}) \Delta S$$
$$= a_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\, \Delta S$$
$$= \rho_s\, \Delta S \tag{2.69}$$

ในสมการข้างต้นเราได้ใช้ความสัมพันธ์ $a_{n_2} = - a_{n_1}$ โดยที่เวกเตอร์ a_{n_1} และ a_{n_2} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากชี้ออกจากบริเวณที่ 1 และบริเวณที่ 2 ตามลำดับ ซึ่งจากสมการที่ (2.69) เราจะได้ว่า

$$a_{n2}\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2) = \rho_s \tag{2.70}$$

หรือ

$$\vec{D}_1-\vec{D}_1= \rho_s \quad C/m^2 \tag{2.71}$$

ซึ่งแนวฉากหนึ่งหน่วยอ้างอิง (reference unit normal) จะชี้ออก(พุ่งออก) จากบริเวณที่

สมการที่ (2.71) แสดงให้เห็นว่า ส่วนประกอบแนวฉาก (ตั้งฉาก) ของสนาม จะไม่ต่อเนื่องตรงบริเวณขอบร่วมที่ซึ่งมีประจุตามพื้นผิวเกิดขึ้น ซึ่งจำนวนที่ไม่ต่อเนื่องจะเท่ากับความหนาแน่นประจุตามพื้นผิว ถ้าบริเวณที่2 เป็นตัวนำ $\vec{D}_2 = 0$สมการที่ (2.4.5.14) จะกลายเป็น

$$\vec{D}_{1n}= \varepsilon_2\vec{E}_{2n}= \rho_s \tag{2.72}$$

ซึ่งเพื่อให้ง่ายเข้า สมการที่ (2.72) จะกลายเป็น $\vec{E}_n=\rho_s/\varepsilon_0$ เมื่อบริเวณที่ 1 เป็นอากาศว่าง

เมื่อเรานำเอาไดอิเล็กตริกสองอันมาประกบกันโดยไม่มีประจุอิสระที่ขอบร่วมระหว่างไดอิเล็กตริกทั้งสอง ρ_s ดังนั้น

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \tag{2.73}$$

หรือ

$$\varepsilon_1\vec{E}_{1n} = \varepsilon_2\vec{E}_{2n} \tag{2.74}$$

ตามที่ได้กล่าวข้างต้นเราพอจะสรุปเงื่อนไขขอบที่จะต้องสอดคล้องในกรณีของสนามไฟฟ้าสถิตได้ดังนี้คือ

ส่วนประกอบแนวสัมผัส $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ (2.75)

ส่วนประกอบแนวตั้งฉาก $a_{n2}\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2) = \rho_s$ (2.76)

เงื่อนไขขอบของสนามไฟฟ้าสถิต

(Boundary conditions for electrostatic fields)

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่า โดยปกติเงื่อนไขขอบจะประยุกต์ใช้หาสนามไฟฟ้าบนด้านหนึ่งเมื่อทราบสนามไฟฟ้าบนอีกด้านหนึ่งของขอบ และนอกจากนี้เรายังสามารถใช้เงื่อนไขขอบเพื่อกำหนดการหักเห (refraction) ของสนามไฟฟ้าตรงของร่วม ซึ่งตามการพิจารณา $\vec{D}_1$ หรือ $\vec{E}_1$ และ $\vec{D}_2$ หรือ E_2 จะเห็นว่ามันทำมุมกับเส้นปกติ เส้นแนวฉาก เป็นมุม θ_1 และ θ_2 ดังแสดงในรูปที่ 2.5 และโดยอาศัยสมการที่ (2.60) จะได้ว่า

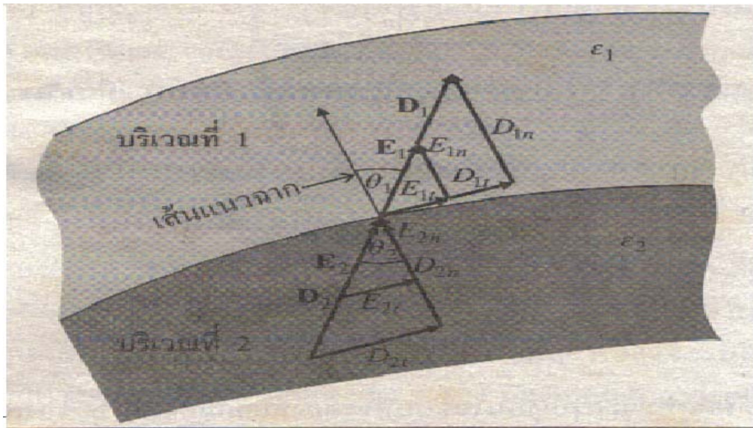
$$\vec{E}_1\sin\theta_1 = \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = \vec{E}_2\sin\theta_2 \quad (2.77)$$

หรือ

$$\vec{E}_1\sin\theta_1 = \vec{E}_2\sin\theta_2 \quad (2.78)$$

ในลักษณะเดียวกันนี้ เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.65) หรือ (2.66) จะได้รับ

$$\varepsilon_1\vec{E}_1\cos\theta_1 = \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} = \varepsilon_2\vec{E}_2\cos\theta_2 \quad (2.79)$$



รูปที่ 2.5 การหักเหของ $\vec{E}$ หรือ $\vec{D}$ ที่ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก

หรือ

$$\varepsilon_1\vec{E}_1\cos\theta_1 = \varepsilon_2\vec{E}_2\cos\theta_2 \quad (2.80)$$

หารสมการที่ (2.79) ด้วยสมการที่ (2.80) จะได้

$$\frac{\tan\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2} \quad (2.81)$$

เนื่องจาก $\varepsilon_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}$ และ $\varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}$ ด้วยสมการที่ (2.81) จะได้

$$\frac{tan\theta_1}{tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \quad (2.82)$$

กฎการหักเหของสนามไฟฟ้าที่ขอบซึ่งปราศจากประจุ

สมการที่ (2.82) เป็นกฎการหักเหของสนามไฟฟ้าที่ขอบซึ่งปราศจากประจุ (เนื่องจากสมมุติให้ $\rho_s = 0$ ที่ขอบร่วม) ดังนั้นโดยทั่วไปที่ขอบร่วมระหว่างสองไดอิเล็กตริกที่แตกต่างกันจะทำให้เกิดการโค้งตัวของเส้นฟลักซ์ ตามผลลัพธ์ของประจุการโพลาไรซ์ที่ไม่เท่ากัน ซึ่งจะสะสมเพิ่มพูนขึ้นบนด้านทั้งสองของขอบร่วม

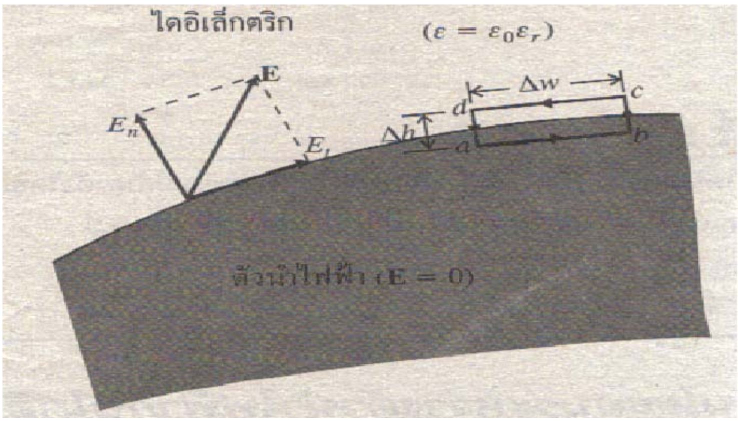
2.4.6 เงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก(Conductor-Dielectric Condition)

เงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริกจะพิจารณาได้จากรูปที่ 2.6 ซึ่งสมมุติให้ตัวนำไฟฟ้าเป็นตัวนำที่สมบูรณ์ (คือมี $\sigma \to \infty$ หรือ $\rho_c \to 0$) ทั้งนี้ถึงแม้ว่าในทางปฏิบัติจะไม่มีตัวนำชนิดนี้ก็ตาม แต่เราอาจจะพิจารณาให้ตัวนำไฟฟ้า อย่างเช่น ทองแดง และเงิน เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ จากกฎของโอห์ม $\vec{J} = \sigma E$ จะยังคงรักษาความหนาแน่นกระแสจำนวน ไว้ในตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ ในขณะที่สนามไฟฟ้าภายในตัวนำจะไม่เกิดขึ้น หรือในอีกความหมายหนึ่งนั้น $E \to 0$ เนื่องจากว่า $\sigma \to \infty$ $(E=J/\sigma)$ในตัวนำไฟฟ้า ซึ่งถ้ามีประจุอยู่ภายในตัวนำไฟฟ้าข้างต้น ประจุจุเคลื่อนย้ายไปยังพื้นผิวตัวนำไฟฟ้า และจะกระจายอีกครั้งหนึ่งในลักษณะที่สนามภายในตัวนำไฟฟ้าไม่ปรากฏขึ้น(ไม่มีสนาม) ตามกฎของเกาส์ถ้า $E=0$ ความหนาแน่นประจุ ρ_v จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ไม่สามารถรวบรวมสนามไฟฟ้าสถิตไว้ภายในตัวมันได้

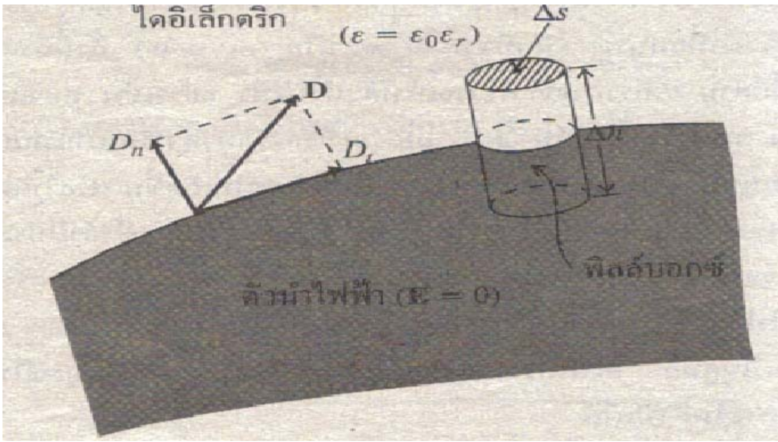
เพื่อที่จะกำหนดเงื่อนไขขอบของขอบร่วมระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก เราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ใช้พิจารณาขอบร่วมระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก ซึ่งเรากำหนดตามความจริงได้ว่า ภายในตัวนำไฟฟ้า และเมื่อประยุกต์ใช้สมการ กับวิถีปิด(วิถี abcda) ของรูปที่ 2.6(ก) จะได้ว่า

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0\left(\frac{\Delta h}{2}\right) + \vec{E}_n\left(\frac{\Delta h}{2}\right) - \vec{E}_t \cdot \Delta w - \vec{E}_n\left(\frac{\Delta h}{2}\right) - 0\left(\frac{\Delta h}{2}\right) \quad (2.83)$$

ในขณะที่ $\Delta h \to 0$



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.6 ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก

ในทำนองเดียวกัน เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.55) กับพิลล์บอกซ์ของรูปที่2.6ข และกำหนดให้ $\Delta h \rightarrow 0$ จะได้

$$\Delta Q = D_n \cdot S - 0 \cdot \Delta S \tag{2.84}$$

เพราะว่า $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ภายในตัวนำไฟฟ้า สมการที่ (2.84) จะเขียนได้ว่า

$$\vec{D}_{\mathrm{n}} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s \tag{2.85}$$

หรือ $$\vec{D}_{\mathrm{n}} = \rho_s \tag{2.86}$$

ดังนั้นภายใต้เงื่อนไขสถิตที่เกี่ยวข้องกับตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ พอจะสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ไม่มีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นภายในตัวนำไฟฟ้า นั่นคือ

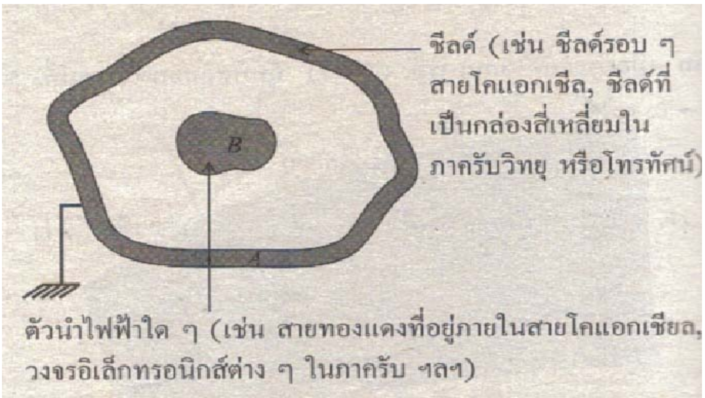
$$\rho_v=0 \text{ และ } \vec{E}=0 \tag{2.87}$$

2. เนื่องจาก E=-V=0ดังนั้นจึงไม่มีความต่างศักย์ ระหว่างจุดสองจุดใดๆในตัวนำไฟฟ้า นั่นคือ ตัวนำไฟฟ้าเป็นวัตถุศักย์เท่า (equipotential body)

3. สนามไฟฟ้า E จะอยู่ภายนอกตัวนำไฟฟ้าเท่านั้น และจะตั้งฉากกับพื้นผิวของตัวนำไฟฟ้า คือ

$$\vec{D}_t = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_t = 0, \quad \vec{D}_n = \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E}_t = 0 \tag{2.88}$$

การประยุกต์ใช้ที่สำคัญจริงๆ ที่ว่า E=0 ภายในตัวนำไฟฟ้าอยู่ในการกลั่นกรองไฟฟ้าสถิต (electrostatic screening หรือ electrostatic shielding : การชิลด์ไฟฟ้าสถิต) ดังตัวอย่าง ชิลด์ที่อยู่รอบๆ สายโคแอคเชียล(coaxial cable : สายเคเบิบร่วม) ดังรูปที่ 2.7 ซึ่งภาคตัดขวางของสาย(หรืออุปกรณ์) ใดๆ ที่ต้องการชิลด์ประกอบด้วย A ซึ่งทำหน้าที่กลั่นกรอง(screen หรือ shield) ทางไฟฟ้าเพื่อทำให้ศักย์รอบๆ ตัวนำไฟฟ้า B ซึ่งเกิดขึ้นจากระบบไฟฟ้าอื่นๆ เป็นศูนย์



รูปที่ 2.7 การกลั่นกรองไฟฟ้าสถิต

2.4.7 เงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศว่าง (Conductor-Free-Space Boundary Conditions)

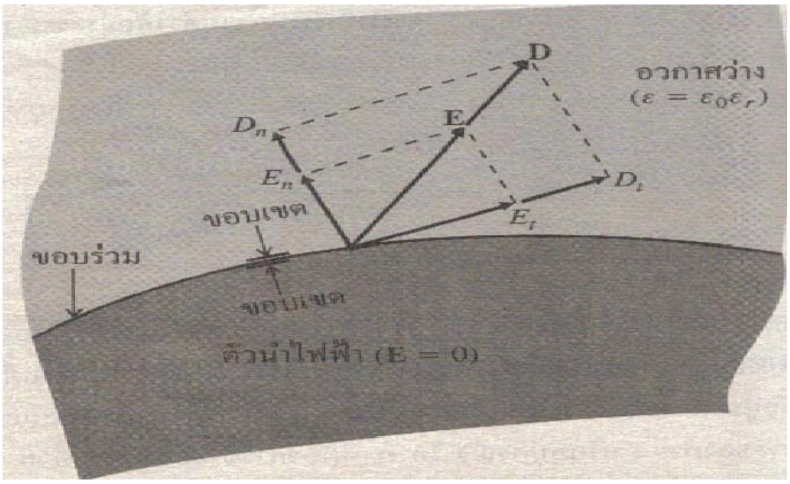
เงื่อนไขนี้เป็นกรณีพิเศษของเงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก ในรูปที่ 2.7 จะแสดงถึงเงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศว่าง (ไดอิเล็กตริก) ซึ่งเงื่อนไขขอบในกรณีพิเศษนี้จะได้รับจากสมการที่ (2.88) โดยแทน ε_r ด้วย 1 (เพราะว่าอากาศว่างจะคำนึงว่าเป็นไดอิเล็กตริก

พิเศษ ซึ่งมี $\varepsilon_r = 1$) เนื่องจากสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ อยู่ภายนอกตัวนำและตั้งฉากกับพื้นผิวของมัน ดังนั้น เงื่อนไขขอบคือ

$$\vec{D}_\mathrm{t} = \varepsilon_0\vec{E}_\mathrm{t} = 0, \quad \vec{D}_\mathrm{n} = \varepsilon_0\vec{E}_\mathrm{n} = \rho_\mathrm{s} \tag{2.89}$$

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าแนวสัมผัส กับขอบเป็นศูนย์ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าแนวตั้งฉาก กับขอบจะเกิดความหนาแน่นประจุพื้นผิว

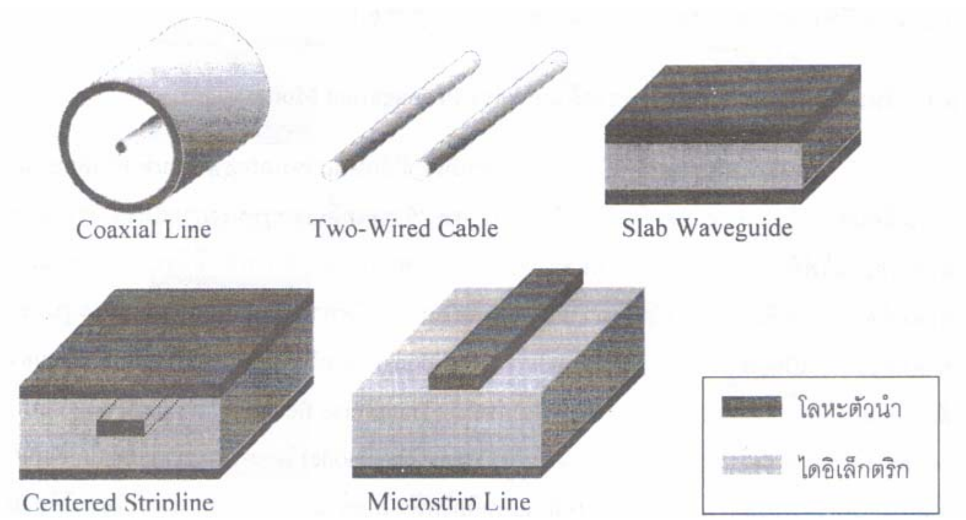
สมการที่ (2.89) แสดงให้ทราบว่า สนามไฟฟ้า $\vec{E}$ จะต้องเข้าสู่พื้นผิวในแนวตั้งฉาก



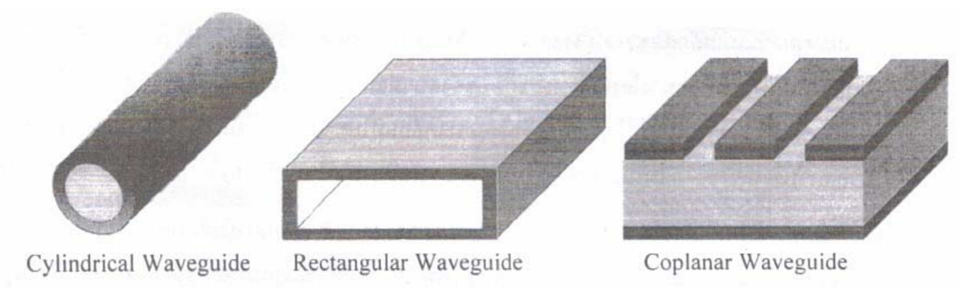
รูปที่ 2.8 ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอวกาศว่าง

2.5 สายส่งไมโครเวฟและท่อนำคลื่น (Microwave Transmission Line and Wave Guides)

ในการส่งสัญญาณไฟฟ้าจากแหล่งกำเนิดไปยงโหลดหรือแหล่งที่ใช้พลังงานทางไฟฟ้านั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องพึ่งตัวกลางส่งผ่านสัญญาณหรือพลังงานทางไฟฟ้านั้น ซึ่งส่วนใหญ่แล้วสำหรับในทางไฟฟ้านั้นมักจะใช้สายตัวนำไฟฟ้าสองเส้นเป็นตัวกลางนำส่งสัญญาณหรือกระแสไฟฟ้านั้นๆ โดยทั่วไปคู่สายตัวนำที่ใช้ในการนำกระแสไฟฟ้านั้นเรียกว่า สายส่งสัญญาณไฟฟ้า (Transmission Lines)



ก) สายส่งสัญญาณโหมดTEM(TEM transmission lines)



ข) สายส่งสัญญาณโหมด(Multi-mode transmission lines)

รูปที่ 2.9 ตัวอย่างสายส่งสัญญาณแบบต่างๆ

สายส่งสัญญาณไฟฟ้านั้นมีอยู่ด้วยกันหลายประเภทขึ้นอยู่กับความถี่และลักษณะการเคลื่อนที่ของสัญญาณในสายส่งนั้นๆ โดยที่ความถี่ต่ำมักจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของสัญญาณคล้ายกับการไหลของกระแสน้ำตามท่อน้ำทั่วไป แต่สำหรับที่ความถี่สูงแล้วมักจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของสัญญาณคล้ายกับการเคลื่อนที่ของคลื่นสัญญาณที่ประกอบด้วยสนามไฟฟ้ากับสนามแม่เหล็กหรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั่นเอง

เนื่องจากว่าสายสัญญาณความถี่สูงนั้นจะมีรูปแบบต่างๆที่ได้รับการวิเคราะห์มาแล้วมากมายตากลักษณะโครงสร้างของภาคตัดขวางต่างๆที่แน่นอน โดยทั่งไปแล้วในการวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้าในสายส่งต่างๆนั้นมักจะสมมุติให้สายส่งเหล่านี้มีคุณสมบัติทางไฟฟ้าตามแนวความยาวที่แน่นอนโดยกำหนดให้มีการกระจายค่างทางไฟฟ้าเหล่านั้นอย่างสม่ำเสมอกันตลอดทั้งเส้น

ดังนั้นจึงมักเรียกสายส่งเหล่านี้ว่าสายส่งสัญญาณไฟฟ้าแบบราบเรียบสม่ำเสมอ (Uniform transmission lines) โดยมีตัวอย่างของสาส่งประเภทนี้ดังรูปที่ 2.8

2.5.1 สายส่งเป็นอุปกรณ์ที่ใช้นำคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่ง โดยสายส่งมีโครงสร้างที่ใช้กันทั่วไปสี่แบบคือ

1) สายตัวนำคู่ขนาน

2) สายโคแอกเซียล

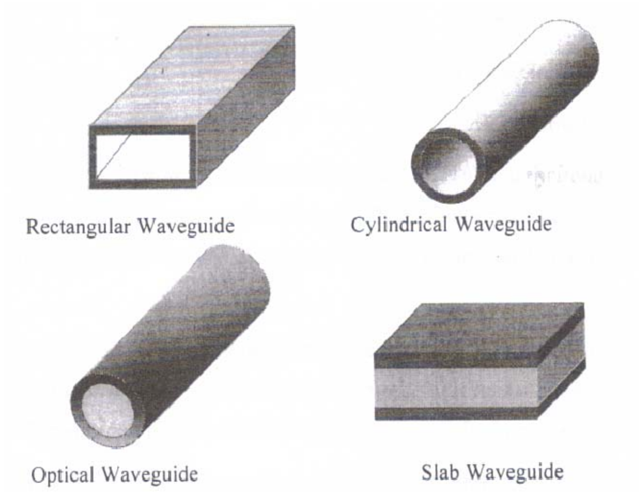
3) ท่อนำคลื่นหรือเวฟไกด์ (Wave Guide)

4) ไมโครสตริพ หรือ สายสตริพ

สายตัวนำคู่ขนานมักใช้ในย่านความถี่ไมโครเวฟช่วงความถี่ต่ำเท่านั้น ข้อจำกัดหลักนี้ได้มาจากการสูญเสียในการกระจายคลื่นซึ่งเป็นการสูญเสียเนื่องมาจากสารไดอิเล็กตริกและปรากฏการณ์ความลึกผิว (Skin depth) ที่ย่านความถี่เหนือ 200 MHz สายโคแอกเซียลจะมีประสิทธิภาพดีกว่าที่ความถี่สูงกว่านี้

สายโคแอดเซียลมีการพัฒนาในเรื่องการลดการสูญเสียพลังงานในการเคลื่อนที่ของคลื่นจากโครงสร้างการชิลด์ของสายที่เป็นตัวนำทรงกระบอกหุ้มรอบแกนตัวนำด้านใน แต่ยังคงมีข้อจำกัดในเรื่องการสูญเสียพลังงานอันเนื่องมาจากฉนวนไดอิเล็กตริกภายในและปรากฏการณ์ความลึกผิวอยู่ดี

ท่อนำคลื่นหรือเวฟไกด์จัดเป็นสายส่งย่านความถี่ไมโครเวฟหรือเป็นท่อนำคลื่นในย่านความถี่สูงที่ดีที่สุดสำหรับโครงสร้างทั้งหมดที่ได้กล่าวมาแล้ว ท่อนำคลื่นที่ใช้งานได้มีการออกแบบโครงสร้างและส่วนประกอบที่แตกต่างกันไปตามความเหมาะสมกับย่านความถี่ที่ใช้งานโครงสร้างตัวอย่างที่แสดงในรูปที่2.3 แต่เนื่องจากคลื่นเดินทางท่อนำคลื่นทั่งไปนั้นไม่อาจจะเป็นเพียงแค่โหมดพื้นฐาน TEM บริสุทธิ์เท่านั้นแต่มีโหมดการเคลื่อนที่แบบอื่นๆอีกที่สามารถเคลื่นที่อยู่ในท่อนำคลื่นนั้นๆได้ ดังนั้นการวิเคราะห์คลื่นบนท่อนำคลื่นจะต้องคำนึงถึงโหมดการเดินทางของคลื่นโหมดอื่นๆที่สามารถจะเป็นไปได้คือโหมด TM กับ TE



รูปที่ 2.10 ท่อนำคลื่นแบบต่างๆ

2.6 สมการความร้อนในทางชีววิทยา (The Bio-heat Equation)

ในการวิเคราะห์ด้วยความถี่ไมโครเวฟได้พิจารณาถึงสนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก และความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในเนื้อเยื่อปอด การดูดซับความร้อนที่เกิดขึ้นในเนื้อเยื่อปอด ซึ่งรูปแบบของสมการ หรือตัวแปรต่างๆ ที่ส่งผลต่อการกระจายความร้อน [16-17] ในปอดแสดงดังสมการที่ (2.90)

$$pc\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \bullet \nabla T) - h_b c_b \omega_b (T_b - T) + Q_m + Q_{ext} \tag{2.90}$$

เมื่อ $h_{b1} = \rho_{b1} c_{b1} \omega_{b1}$

ρ	=	ความหนาแน่นจำเพาะของเนื้อเยื่อ (kg/m^3)
c	=	ค่าความจุความร้อนจำเพาะของเนื้อเยื่อ (J/kg.K)
k	=	ค่าความนำความร้อนของเนื้อเยื่อ (W/m.K)
h_b	=	สัมประสิทธิ์การพาความร้อนจากเลือดที่ไหลซึมอยู่ในเนื้อเยื่อ
ρ	=	ความหนาแน่นเลือด (kg/m^3)
c_b	=	ค่าความร้อนจำเพาะของเลือด (J/kg•K)
ω_b	=	อัตราฉีดเลือด (1/s)
T_b	=	ค่าอุณหภูมิเลือด (37 °C)
Q_m	=	ค่าความร้อนจากกระบวนการเมตาโบลิซึมของเม็ดเลือด (W/m^3)

Q_{ext} = ค่าความร้อนจากภายนอก (W/m^3)

จากสมการ Bioheat (2.90) ที่นำมาใช้ในงานวิจัยฉบับนี้ ได้ละทิ้งค่าตัวแปรจำนวน 2 ตัว คือ สัมประสิทธิการพาความร้อนจากเลือดที่ไหลซึมอยู่ในเนื้อเยื่อ (h_b) และพลังงานที่สร้างขึ้นโดยกระบวนการเมตาโบลิซึมของเม็ดเลือด (Q_m) ซึ่งค่าตัวแปรทั้ง 2 นี้ จะถือว่ามีค้าน้อยมาก เมื่อเทียบกับปริมาณ Q_{ext}

2.6.1 สมการการดูดซับความร้อน

พิจารณาจาก สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก ที่มีการแพร่กระจายลงเนื้อเยื่อปอด จะเกิดการสูญเสียพลังงานในเนื้อเยื่อปอด [18] ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของสมการ ดังสมการที่ (2.91)

$$SAR = \frac{1}{\rho} Q_{ext} = \frac{\sigma}{\rho} |E|^2 \qquad (2.91)$$

เมื่อ

SAR = Specific absorption rate (W/kg)

Q_{ext} = ค่าความร้อนที่เกิดขึ้นจากภายนอกเนื้อเยื่อ (W/m^3)

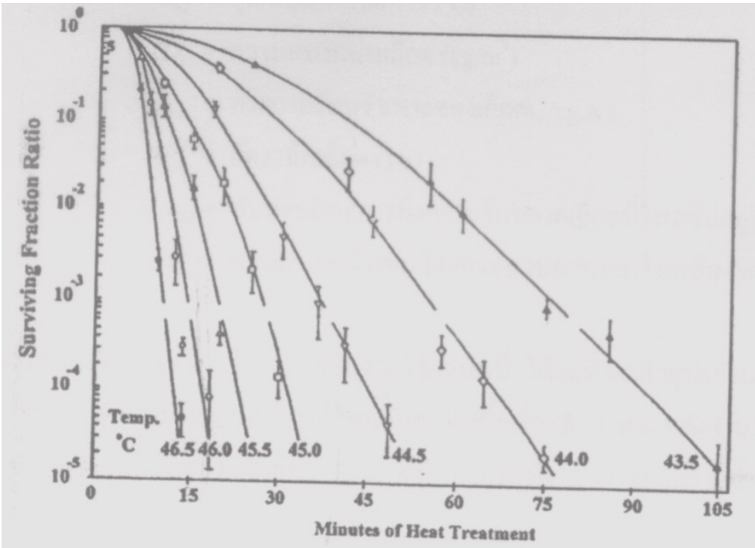
σ = สภาพความนำไฟฟ้าของเนื้อเยื่อ (S/m)

ρ = ความหนาแน่นจำเพาะ (kg/m^3)

2.7 พื้นฐานการกระจายความร้อนภายในเนื้อเยื่อ

การใช้ความร้อนในการรักษาโรค เป็นการรักษาที่ทำให้อุณหภูมิ ณ บริเวณนั้น สูงขึ้นอยู่ในช่วง 41 – 46 องศาเซลเซียส [14 – 15] เซลล์ที่อยู่บริเวณนั้นๆ จะได้รับผลกระทบ และมีการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับอุณหภูมิ การใช้ความร้อนในการรักษาโรคมะเร็ง ได้มีการพัฒนาเทคนิค ที่เรียกว่า Hyperthermal cancer therapy ซึ่งมีการเริ่มใช้มาตั้งแต่ปี ค.ศ.1960 โดยการรักษาโรคมะเร็งโดยใช้ความร้อน เป็นรูปแบบการรักษาโรคมะเร็งแบบใหม่ ซึ่งมีพื้นฐาน และหลักการทางชีววิทยาที่สามารถพิสูจน์ ทดลอง และสามารถอธิบายได้ ซึ่งในปัจจุบันการรักษาโรคมะเร็งโดยใช้ความร้อนนี้สามารถรักษาโรคมะเร็งชนิดต่างๆ ได้ทั่วร่างกาย และได้ผลการรักษาที่น่าสนใจ การรักษาโรคมะเร็งด้วยความร้อน อาศัยหลักการให้ความร้อนกับเซลล์มะเร็งอยู่ในช่วง 41 – 46 องศาเซลเซียส และรักษาระดับของอุณหภูมิไว้ให้คงที่ พื้นฐานของปรากฏการณ์ทางชีววิทยาสำหรับการรักษาโรคมะเร็งด้วยความร้อน จะมีอยู่สองปริมาณที่มีความสำคัญในการรักษา คือ อุณหภูมิ และเวลาในการให้ความร้อน ซึ่งตาม รูปที่ 2.1 จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง

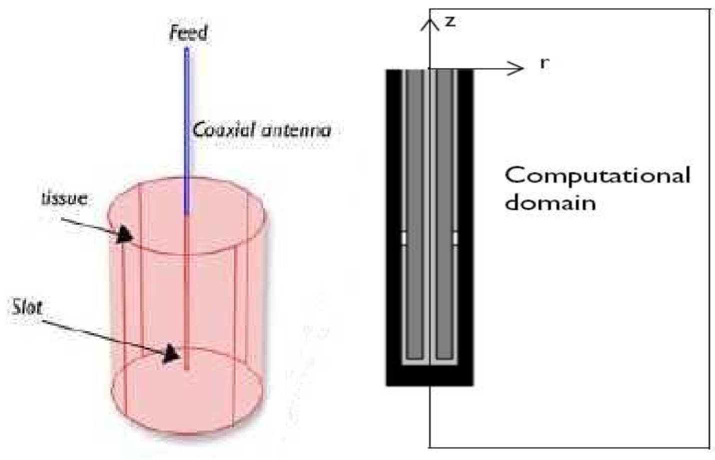
อุณหภูมิและเวลา ที่ส่งผลต่อปริมาณเซลล์มะเร็งที่รอนตายจากการให้ความร้อน รูปที่ 21 เมื่อให้อุณหภูมิสูงแก่เซลล์มะเร็งในช่วงเวลาเริ่มต้นเซลล์มะเร็งจะสูญเสียเป็นจำนวนมาก แต่เมื่อมีการลดอุณหภูมิที่ให้แก่เซลล์มะเร็งผลกระทบที่เกิดขึ้นคือ ต้องใช้เวลามากขึ้นเพื่อทำให้เซลล์มะเร็งตาย ในการเพิ่มอุณหภูมิให้สูงๆ แก่ เซลล์ จำนวนเซลล์จะเกิดการสูญเสียมาก และจะทำให้เซลล์ปกติที่อยู่รอบๆ เซลล์มะเร็งได้รับความเสียหายได้เช่นกัน ดังนั้นในการเพิ่มอุณภูมิให้เหมาะสมนั้นสามารถทำลายเซลล์มะเร็งได้จำนวนมาก และไม่เป็นอันตรายแก่เซลล์ปกติ



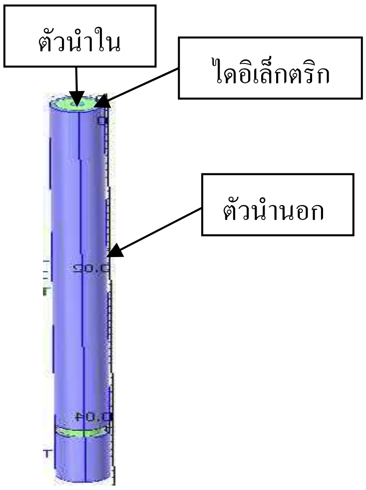
รูปที่ 2.11 กราฟแสดงผลกระทบของอุณหภูมิที่มีต่อเซลล์มะเร็ง[18]

2.8 หลักการของเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการจำลอง

จากรูปที่ 2.11 เป็นการแสดงให้เห็นถึงแบบจำลองของการรักษาด้วยคลื่นไมโครเวฟโดยใช้สายอากาศแบบโคแอกเชียลแบบสล็อต โดยทรงกระบอกกลมแทนเนื้อเยื่อทดสอบ โดยสายอากาศโคแอกเชียลถูกแทงเข้าไปในเนื้อเยื่อทดสอบ และสายอากาศจะถูกจ่ายกำลังงานคลื่นไมโครเวฟที่จุดบนตรงส่วนของชั้นฉนวน (Feed) และคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะถูกปล่อยออกมาบริเวณสล็อต จากนั้นเนื้อเยื่อจะถูกทำให้เกิดความร้อนซึ่งเป็นไปตามสมการของซาร์ โดยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเดินทางในสายโคแอคเชียลอยู่ในโหมดของ TEM โดยสมมุติว่าคลื่นเป็นคลื่นฮาโมนิกส์แบบเชิงซ้อน



รูปที่ 2.12 แสดงลักษณะของสายอากาศแบบโคแอกเชียลในเนื้อเยื่อทดสอบ

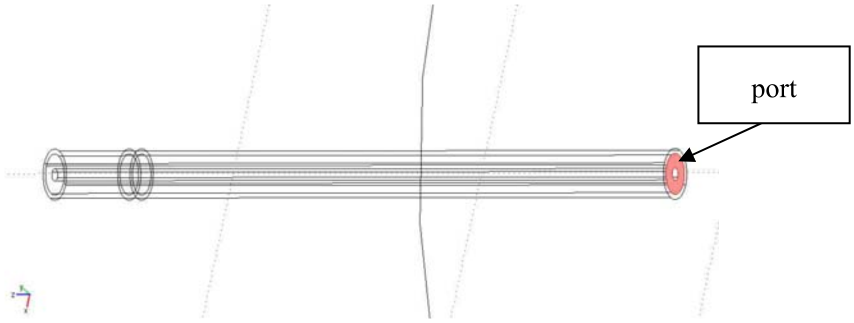


รูปที่ 2.13 แสดงโครงสร้างของสายอากาศแบบสล็อตโคแอกเชียล

สายอากาศโคแอกเชียลจะประกอบไปด้วยชั้นสามชั้นด้วยกันชั้นแรกเป็นชั้นของตัวนำใน ชั้นถัดมาเป็นชั้นของไดอิเล็กตริก และชั้นสุดท้ายเป็นชั้นของตัวนำนอกโดยเมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางผ่านสายโคแอกเชียลจะมีกระบวนการจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับแบบจำลองโดยตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการกำหนดเงื่อนไขขอบของสายอากาศแบบหนึ่งสล็อต

2.8.1 เงื่อนไขขอบเขตของพอร์ต (Port)

ใช้เงื่อนไขนี้สำหรับใส่ค่ากำลังของคลื่นไมโครเวฟที่จ่ายให้กับสายอากาศโดยกำหนดเป็นค่ากำลัง เช่น 5 W. โดยจะจ่ายให้กับชั้นไดอิเล็กตริกตามรูปเนื่องจากคลื่นจะเดินทางในชั้นนี้

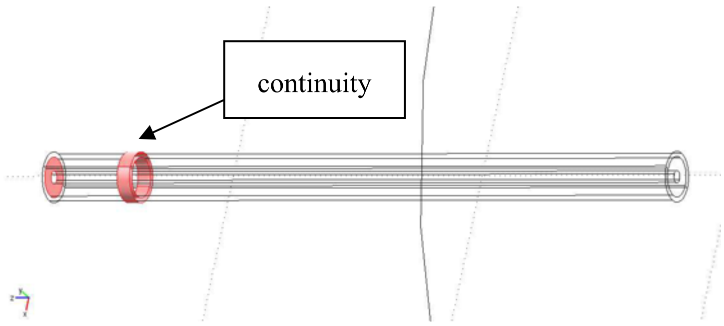


รูปที่ 2.14 แสดงจุดจ่ายกำลังงานคลื่นไมโครเวฟให้กับสายอากาศ

2.8.2 เงื่อนไขขอบเขตของความต่อเนื่อง (Continuity)

เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขที่เกิดขึ้นโดยธรรมชาติที่แสดงให้ถึงความต่อเนื่องขององค์ประกอบในแนวเส้นสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$$
$$n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \qquad (2.92)$$



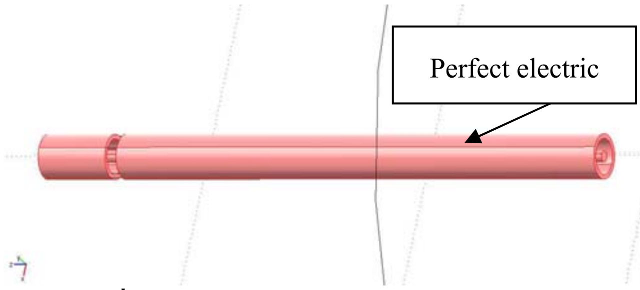
รูปที่ 2.15 แสดงบริเวณที่เป็นขอบเขตต่อเนื่อง

จากรูปบริเวณที่เป็นความต่อเนื่อง (continuity) จะเป็นบริเวณที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านจากตัวกลางหนึ่งไปสู่อีกตัวกลางหนึ่ง

2.8.3. เงื่อนไขขอบเขตของตัวนำ(Perfect Electric Conductor)

เป็นกรณีของเงื่อนซึ่งกำหนดให้องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวขนานกับผิวตัวนำมีค่าเป็นศูนย์

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (2.93)$$



รูปที่ 2.16 แสดงบริเวณที่เป็นขอบเขตตัวนำ

จากสมการแสดงให้เห็นว่าไม่มีความต่างศักดิ์บริเวณผิวตัวนำหรือเรียกได้ว่าไม่มีเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีทิศขนานกับผิวตัวนำ

2.8.4 เงื่อนไขขอบของเนื้อเยื่อ (Scattering boundary)

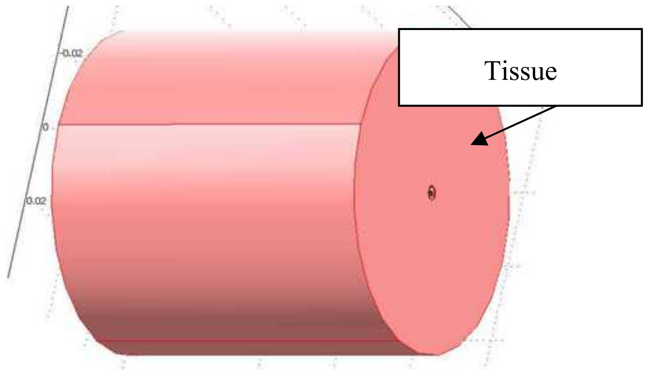
ใช้เงื่อนไขนี้เมื่อต้องการขอบเขตที่ไม่ก่อให้เกิดการสะท้อนของคลื่น โดยมีสมการที่ใช้คือ

$$\vec{E} = \vec{E}_{sc}e^{-jk(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})} + \vec{E}_{s}e^{-jk(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \quad \text{Plane scattered wave}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{sc}\frac{e^{-jk(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})}}{\sqrt{r}} + \vec{E}_{s}e^{-jk(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \quad \text{Cylindrical scattered wave}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{sc}\frac{e^{-jk(n\cdot r)}}{\sqrt{r_s}} + \vec{E}_{s}e^{-jk(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \quad \text{Spherical scattered wave} \qquad (2.94)$$

r_s = รัศมีของทรงกลม



รูปที่ 2.17 แสดงบริเวณที่เป็นขอบเขตสะท้อน

E_0 เป็นระนาบตกกระทบของคลื่นระนาบซึ่งเดินทางในทิศ k โดยเงื่อนไขขอบเขตนี้จะปล่อยให้คลื่นผ่านตัวมันไปในทุกๆมุนตกกระทบ