

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x; r, \theta) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{x-r} & ; \quad x = r, r+1, r+2, \dots \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

โดยที่ X คือ ตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จครบ r ครั้ง

และ θ คือ ความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จของการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง

4.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

$$\begin{aligned} \text{ในที่นี้ } L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; r_i, \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{x_i-1}{r_i-1} \theta^{r_i} (1-\theta)^{x_i-r_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{x_i-1}{r_i-1} \theta^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i} \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\begin{aligned} \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} &< c \\ \text{จะได้ } \frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}} &< c \\ \frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n r_i}} &< c \\ \left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} &< c \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} < c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

ใส่ $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < \ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 < 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} = c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] \leq \alpha$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

$$\text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$$

$$\text{และ} \quad \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i | \theta = \theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r=1$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0 = 0.50$ และ $\theta_1 = 0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]} \\ &= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = 0.50\right]} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบ (Power of the test) ได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = 0.25\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = 0.25\right] \quad \dots (2)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (1) พบว่า $c_1 = 4$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 4 | \theta = 0.50\right] = 0.03125, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 4 | \theta = 0.50\right] = 0.03125$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 4 | \theta = 0.25\right] = 0.2373046875, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 4 | \theta = 0.25\right] = 0.0791015625$$

แทนค่าลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{0.05 - 0.03125}{0.03125} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad 1 - \beta &= 0.2373046875 + 0.6(0.0791015625) \\ &= 0.284765625 \end{aligned}$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.50$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.25, \theta_1 < \theta_0$ เมื่อ $r = 1$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 4 \\ 0.60 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 4 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.1 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการ

ทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ

$H_1:\theta=\theta_1, \theta_1 < \theta_0$

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.01	1	0.5	0.1	0.2800000000	6	0.4931772480
			0.2	0.2800000000	6	0.2243952640
			0.3	0.2800000000	6	0.0922368160
			0.4	0.2800000000	6	0.0332190720
	2	0.5	0.1	0.8480000000	9	0.7302101377
			0.2	0.8480000000	9	0.3676492005
			0.3	0.8480000000	9	0.1437879725
			0.4	0.8480000000	9	0.0439065059
	3	0.5	0.1	0.7415384615	11	0.8597908236
			0.2	0.7415384615	11	0.4877983337
			0.3	0.7415384615	11	0.1917152736
			0.4	0.7415384615	11	0.0532214574
	4	0.5	0.1	0.8512857143	13	0.9294769602
			0.2	0.8512857143	13	0.5908089392
			0.3	0.8512857143	13	0.2393200413
			0.4	0.8512857143	13	0.0623622436
	5	0.5	0.1	0.0676078431	14	0.9652791201
			0.2	0.0676078431	14	0.6761997215
			0.3	0.0676078431	14	0.2856330937
			0.4	0.0676078431	14	0.0712738147

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.05	1	0.5	0.1	0.6000000000	4	0.6298560000
			0.2	0.6000000000	4	0.3768320000
			0.3	0.6000000000	4	0.2112880000
			0.4	0.6000000000	4	0.1088640000
	2	0.5	0.1	0.5428571429	6	0.8332994880
			0.2	0.5428571429	6	0.5431623680
			0.3	0.5428571429	6	0.2955342880
			0.4	0.5428571429	6	0.1347425280
	3	0.5	0.1	0.7866666667	8	0.9256766884
			0.2	0.7866666667	8	0.6649146245
			0.3	0.7866666667	8	0.3678404222
			0.4	0.7866666667	8	0.1569701929
	4	0.5	0.1	0.1436363636	9	0.9670635278
			0.2	0.1436363636	9	0.7541103578
			0.3	0.1436363636	9	0.4309345550
			0.4	0.1436363636	9	0.1767321516
	5	0.5	0.1	0.5566300366	11	0.9853803346
			0.2	0.5566300366	11	0.8191306651
			0.3	0.5566300366	11	0.4864117803
			0.4	0.5566300366	11	0.1947942724

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ที่ $\theta_0=0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้ว γ และ c_1 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0=0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วน c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า r , θ_0 และ θ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ จะมีค่า $1-\beta$ มากกว่าเมื่อ $\alpha=0.01$

4.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ

$$H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$$

จากหัวข้อที่ 4.1.1

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < \ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

$$\text{แต่ } \theta_1 > \theta_0 \text{ จะได้ } 1-\theta_0 > 1-\theta_1 \text{ และ } \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) > 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i < \frac{\ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)} = c_2$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] \leq \alpha$

$$\text{และ } \gamma = \frac{\alpha - P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right]}{P \left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0 \right]}$$

$$\text{เมื่อ } P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] < \alpha, \quad P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 + 1 | \theta = \theta_0 \right] > \alpha$$

$$\text{และ } \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ } P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] = \alpha$$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E \left[\sum_{i=1}^n X_i | \theta = \theta_1 \right] \\ &= P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_1 \right] + \gamma P \left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1 \right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r=5$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0=0.50$ และ $\theta_1=0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_2 และ γ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right]} \\ &= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = 0.50\right]} \quad \dots (3)\end{aligned}$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบ (Power of the test) ได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = 0.75\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = 0.75\right] \quad \dots (4)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (3) พบว่า $c_2 = 1$ โดยที่

$$\begin{aligned}P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 1 | \theta = 0.50\right] &= 0.03125, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 | \theta = 0.50\right] = 0.078125 \\ P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 1 | \theta = 0.75\right] &= 0.2373046875, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 | \theta = 0.75\right] = 0.2966308594\end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการ (3) และ (4) จะได้

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{0.05 - 0.03125}{0.078125} \\ &= 0.24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad 1 - \beta &= 0.2373046875 + 0.24(0.2966308594) \\ &= 0.3084960938\end{aligned}$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha=0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = 0.50$ เทียบกับ $H_1: \theta = 0.75, \theta_1 > \theta_0$ เมื่อ $r=1$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \\ 0.3084960938 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 1 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.2 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_2	$1-\beta$
0.05	1	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	0.5	0.6	0.24	1	0.1150848
			0.7	0.24	1	0.2285752
			0.8	0.24	1	0.4063232
			0.9	0.24	1	0.6613488

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า $r = 5$ และ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.6 ถึง 0.9 แล้ว γ และ c_2 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่า $r = 1$ ถึง 4 จะไม่สามารถหาค่า c_2 , γ และ $1-\beta$ ได้ และเมื่อ $\alpha = 0.01$ สำหรับค่า $r = 1$ ถึง 5 และ $\theta_0 = 0.5$ จะไม่สามารถหาค่า c_2 , γ และ $1-\beta$ ได้เช่นเดียวกัน

4.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่ดีมาก กล่าวคือการทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้ในการทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

4.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เทียบกับ } H_1 : \theta < \theta_0$$

$$\text{พิจารณา } H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เทียบกับ } H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\begin{aligned} \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} &< c \\ \text{จะได้ } \frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}} &< c \\ \frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n r_i}} &< c \\ \left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} &< c \\ \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} &< c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i} \end{aligned}$$

ได้ $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < \ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

$$\text{แต่ } \theta_1 < \theta_0 \text{ จะได้ } 1-\theta_0 < 1-\theta_1 \text{ และ } \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)} = c_1$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 < \theta_0$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$

เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] \leq \alpha$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

$$\text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$$

$$\text{และ} \quad \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

ในกรณีที่ $r=1$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ

คือ $\theta_0 = 0.50$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น

$\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]} \\ &= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = 0.50\right]} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (5) พบว่า $c_1 = 4$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 4 \mid \theta = 0.5\right] = 0.03125, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 4 \mid \theta = 0.5\right] = 0.03125$$

แทนค่าลงในสมการ (5) จะได้

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{0.05 - 0.03125}{0.03125} \\ &= 0.60 \end{aligned}$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1: \theta < 0.5$ เมื่อ $r = 1$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 4 \\ 0.6 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 4 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

α	r	θ_0	γ	c_1
0.01	1	0.1	0.2805153659	43
		0.3	0.0749205270	12
		0.5	0.2800000000	6
		0.7	0.1005291005	3
		0.9	0.0000000000	1
	2	0.1	0.4763832594	62
		0.3	0.8485064434	18
		0.5	0.8480000000	9
		0.7	0.8691246046	5
		0.9	0.2592592593	2
	3	0.1	0.1978686679	78
		0.3	0.3567657209	22
		0.5	0.7415384616	11
		0.7	0.8154332700	6
		0.9	0.0329218107	2
	4	0.1	0.1354409266	93
		0.3	0.2459762325	26
		0.5	0.8512857143	13
		0.7	0.9060369666	7
		0.9	0.5541838134	3
	5	0.1	0.8264079197	108
		0.3	0.3473166253	30
		0.5	0.0676078431	14
		0.7	0.0420971255	7
		0.9	0.2407516276	3

ตารางที่ 4.3 (ต่อ)

α	r	θ_0	γ	c_1
0.05	1	0.1	0.5538790749	28
		0.3	0.5577754260	8
		0.5	0.6000000000	4
		0.7	0.3650793651	2
		0.9	0.4444444444	1
	2	0.1	0.4574263769	44
		0.3	0.1558810175	12
		0.5	0.5428571429	6
		0.7	0.3631897203	3
		0.9	0.1358024691	1
	3	0.1	0.2245386589	58
		0.3	0.2750708653	16
		0.5	0.7866666667	8
		0.7	0.5088123433	4
		0.9	0.9474165524	2
	4	0.1	0.8833883009	72
		0.3	0.6641859918	20
		0.5	0.1436363636	9
		0.7	0.7561381930	5
		0.9	0.5204999238	2
	5	0.1	0.0903841969	84
		0.3	0.2204548944	23
		0.5	0.5566300366	11
		0.7	0.0515163130	5
		0.9	0.2744443880	2

จากตารางที่ 4.3 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใดๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใดๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_1 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เทียบกับ } H_1 : \theta > \theta_0$$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากหัวข้อที่ 4.2.1

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < \ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

$$\text{แต่ } \theta_1 > \theta_0 \text{ จะได้ } 1-\theta_0 > 1-\theta_1 \text{ และ } \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) > 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i < \frac{\ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)} = c_2$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 > \theta_0$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] \leq \alpha$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad \gamma &= \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right]} \\
\text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0\right] &< \alpha, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 + 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha \\
\text{และ} \quad \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0\right] &= \alpha
\end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r = 2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0 = 0.1$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_2 และ γ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right]} \\
&= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = 0.10\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = 0.10\right]} \quad \dots (6)
\end{aligned}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (6) พบว่า $c_2 = 2$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.10\right] = 0.028, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.10\right] = 0.0243$$

แทนค่าลงในสมการ (6) จะได้

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{0.05 - 0.028}{0.0243} \\
&= 0.9053497942
\end{aligned}$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบ สมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.10$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.10$ เมื่อ $r = 2$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 2 \\ 0.9053497942 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 2 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

α	r	θ_0	γ	c_2
0.01	1	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.1	0.1975308642	3
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.1	0.3738501277	6
		0.3	0.0837742504	1
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	0.1	0.2205523592	10
		0.3	0.8900646678	1
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

α	r	θ_0	γ	c_2
0.05	1	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	0.1	0.9053497942	2
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.1	0.8002642143	6
		0.3	0.4056437390	1
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.1	0.5136327456	11
		0.3	0.4842529604	2
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	0.1	0.7602577196	16
		0.3	0.7268747761	3
		0.5	0.2400000000	1
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

จากตารางที่ 4.4 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้ และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4.2.3 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

4.2.3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n r_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n r_i} (1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n r_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} < c$$

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} < c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

ได้ $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < \ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 < 1-\theta_1$ และ $\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)} = c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] \leq \alpha$

$$\text{และ } \gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

$$\text{เมื่อ } P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$$

$$\text{และ } \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ } P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

อสมการ $\sum_{i=1}^n x_i > c_1$ นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 < \theta_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta < \theta_0$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1, \dots, x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta < \theta_0$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.1 ดังแสดงในตารางที่ 4.3

4.2.3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากหัวข้อที่ 4.2.3.1

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) < \ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 > 1-\theta_1$ และ $\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right) > 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i < \frac{\ln c \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n r_i}}{\ln \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} \right)} = c_2$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ

$H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว

$\sum_{i=1}^n X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] \leq \alpha$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{\alpha - P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right]}{P \left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0 \right]}$$

$$\text{เมื่อ} \quad P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] < \alpha, \quad P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 + 1 | \theta = \theta_0 \right] > \alpha$$

$$\text{และ} \quad \gamma = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad P \left[\sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_0 \right] = \alpha$$

อสมการ $\sum_{i=1}^n x_i < c_2$ นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 > \theta_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1, \dots, x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.2 ดังแสดงในตารางที่ 4.4

4.2.4 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ หรือ } \theta \geq \theta_2 \text{ เทียบกับ } H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$$

$$\begin{aligned} \text{ในที่นี้} \quad f(x; \theta) &= \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{x-r} \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right)^r \binom{x-1}{r-1} (1-\theta)^x \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right)^r \binom{x-1}{r-1} e^{x \ln(1-\theta)} \end{aligned}$$

เปรียบเทียบกับ

$$f(x; \theta) = c(\theta) h(x) e^{p(\theta) q(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่} \quad c(\theta) &= \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right)^r, & h(x) &= \binom{x-1}{r-1} \\ p(\theta) &= \ln(1-\theta), & q(x) &= x \end{aligned}$$

ดังนั้น $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n q(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$ เป็นสถิติที่พอเพียงของ θ

การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq \theta_1$ หรือ $\theta \geq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i=1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

จะได้

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha$$

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha$$

ในกรณีที่ $r = 2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_1 = 0.25$ และ $\theta_2 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \quad \dots (7)$$

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^n X_i < c_2 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \quad \dots (8)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (7) และ (8) พบว่า $c_1 = 1$ และ $c_2 = 2$ โดยที่

$$P\left[1 < \sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.25\right] = 0, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 | \theta = 0.25\right] = 0.09375,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.25\right] = 0.10546875$$

$$P\left[1 < \sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.75\right] = 0, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 | \theta = 0.75\right] = 0.28125,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.75\right] = 0.10546875$$

แทนค่าลงในสมการ (7) และ (8) จะได้

$$0.09375\gamma_1 + 0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \dots (9)$$

$$0.28125\gamma_1 + 0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \dots (10)$$

จะได้ $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.4740740741$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.25$ หรือ $\theta \geq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.4740740741 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 2 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับ
การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.25$ หรือ $\theta \geq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	1	0.0533333333	0	1	2
	2	0	0.0948148148	1	2
	2	0.0948148148	0	2	3
	3	0.1517037037	0	3	4
	4	0.2311675485	0	4	5
	5	0	0.3424704422	4	5
	5	0.3424704422	0	5	6
0.05	1	0.2666666667	0	1	2
	2	0	0.4740740741	1	2
	2	0.4740740741	0	2	3
	3	0.7585185185	0	3	4
	4	0.0511342593	0.0973985891	3	5
	5	0.2404188713	0.4274113267	4	6

จากตารางที่ 4.5 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

และจากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใดๆ จะพบว่า c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2

4.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลาย

(Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

4.3.1 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i=1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \\ & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r = 2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_1 = 0.25$ และ $\theta_2 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned} & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \quad \dots(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \quad \dots(12) \end{aligned}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (11) และ (12) พบว่า $c_1=1$ และ $c_2 = 17$ โดยที่

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 1 \mid \theta=0.25\right] &= 0, P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 17 \mid \theta=0.25\right] = 0.0310074056, \\ P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 \mid \theta=0.25\right] &= 0.0937500000, P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 17 \mid \theta=0.25\right] = 0.0084565652, \\ P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 1 \mid \theta=0.75\right] &= 0, P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 17 \mid \theta=0.75\right] = 0.0000000002, \\ P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 1 \mid \theta=0.75\right] &= 0.2812500000, P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 17 \mid \theta=0.75\right] = 0.0000000006, \end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการ (11) และ (12) จะได้

$$0.0937500000\gamma_1 + 0.0084565652\gamma_2 = 0.0189925944 \quad \dots (13)$$

$$0.2812500000\gamma_1 + 0.0000000006\gamma_2 = 0.0499999998 \quad \dots (14)$$

จะได้ $\gamma_1=0.1777777765, \gamma_2=0.2750440381$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha=0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 17 \\ 0.1777777765 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.2750440381 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 17 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 17 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.6 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2

สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.4306737104	0.4119376656	1	101
	30	0.2378600867	0.2927785263	3	139
	40	0.2552230575	0.4505054377	5	176
	50	0.4174827289	0.4267783832	7	212
0.05	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.7441404008	0.1842836997	2	87
	30	0.0186838107	0.4244293898	5	123
	40	0.3670394774	0.5795329060	7	158
	50	0.9150615627	0.3152571418	9	192

จากตารางที่ 4.6 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า $r = 10$ จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

จากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

4.3.2 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i=1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$$

$$\text{และ } E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0\right] = \alpha E\left[\sum_{i=1}^n X_i | \theta = \theta_0\right] = n\theta_0 \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \\ & + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = \alpha \end{aligned}$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\begin{aligned} \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=0}^{c_1-1} \binom{r + \sum_{i=1}^n X_i - 1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} + \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=c_2+1}^{\infty} \binom{r + \sum_{i=1}^n X_i - 1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} + \sum_{i=1}^2 \gamma_i \binom{r + \sum_{i=1}^n X_i - 1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} \\ = \alpha \quad \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } & \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \\ & + c_1 \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + c_2 \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] \\ & = n\theta_0 \alpha \end{aligned}$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\begin{aligned} \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=0}^{c_1-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i \binom{r + \sum_{i=1}^n X_i - 1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] + \sum_{\sum_{i=1}^n X_i=c_2+1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n X_i \binom{r + \sum_{i=1}^n X_i - 1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \\ + \sum_{i=1}^2 c_i \gamma_i \binom{r + \sum_{i=1}^n X_i - 1}{\sum_{i=1}^n X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^n X_i} = n\theta_0 \alpha \quad \dots (16) \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r=3$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta=0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^n r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = \alpha \quad \dots (17)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] + c_1 \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right] + c_2 \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right] = n\theta_0 \alpha \quad \dots (18)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (17) และ (18) พบว่า $c_1 = 2$ และ $c_2 = 9$ โดยที่

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.25\right] &= 0.0156250000, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0000527741, \\ P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.25\right] &= 0.0351562500, \quad P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0000150429, \\ \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i < 2 | \theta = 0.25\right] &= 0.0000000000, \quad \sum_{i=1}^n X_i P\left[\sum_{i=1}^n X_i > 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0028216622, \\ c_1 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 2 | \theta = 0.25\right] &= 0.0351562500, \quad c_2 P\left[\sum_{i=1}^n X_i = 9 | \theta = 0.25\right] = 0.0007371080 \end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการ (17) และ (18) จะได้

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0000150429\gamma_2 = 0.0343222259 \quad \dots (19)$$

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0007371030\gamma_2 = 0.0346783378 \quad \dots (20)$$

จะได้ $\gamma_1 = 0.9760656186$, $\gamma_2 = 0.4931886847$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอดันเสมอปลายที่มีขนาด

$\alpha=0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta=0.25$ เทียบกับ $H_1: \theta \neq 0.25$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 49 \\ 0.9760656186 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.4931886847 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 49 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 49 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.7 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2
 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.5142699134	0.4314393008	1	55
	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
0.05	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.9760656186	0.4931886847	1	49
	4	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

จากตารางที่ 4.7 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า $r = 3$ จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้

จากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก