

บทที่ 2

ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test) (ประชุม สุวัดี : 2545)

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ และต้องการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยที่ C เป็นบริเวณวิกฤต (Critical region)

บริเวณวิกฤต C เป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR) ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ ก็ต่อเมื่อ C มีขนาด α และกำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤต C ไม่น้อยกว่ากำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤตอื่นใดที่มีขนาด α ด้วยกัน

ถ้า C_1 เป็นบริเวณวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ คือ ถ้า $P[(X_1, \dots, X_n) \in C_1 | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$ แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$1. P[(X_1, \dots, X_n) \in C | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

$$\text{และ } 2. P[(X_1, \dots, X_n) \in C | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}] \geq P[(X_1, \dots, X_n) \in C_1 | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}]$$

สถิติเพื่อการทดสอบ $T = T(X_1, \dots, X_n)$ ที่ใช้สำหรับบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด C ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ เรียกว่า การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test) ที่มีขนาด α

ถ้า $\beta_T(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T และถ้า $\beta_{T_1}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐานเดียวกัน โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T_1 แล้วจะกล่าวว่า T เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$1. \beta_T(\theta_0) = \alpha$$

$$\text{และ } 2. \beta_T(\theta_1) \geq \beta_{T_1}(\theta_1) \text{ ไม่ว่า } T_1 \text{ จะเป็นสถิติใด ๆ ที่ } \beta_{T_1}(\theta_0) = \alpha$$

2.1.1.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว (Simple Hypothesis Test)

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดจะอาศัยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน (Neyman – Pearson Lemma) ดังนี้ (ประชุม สุวัดี : 2545)

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ให้ α เป็นค่าคงที่ที่ $0 < \alpha < 1$ ให้ c เป็นจำนวนจริงบวก และ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง S ที่มีคุณสมบัติ

$$P[(X_1, \dots, X_n) \in C | \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

และ

$$\frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} \leq c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1, \dots, x_n) \in C$$

$$\frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} \geq c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1, \dots, x_n) \notin C$$

โดยที่ L เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta = \theta_1$

วิธีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Method of Finding Most Powerful Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดียว $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับสมมติฐานเชิงเดียว $H_1: \theta = \theta_1$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันหาบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR) หรือหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test) ได้ กล่าวคือบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดคือ

$$C = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} \leq c \right\}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$P[(X_1, \dots, X_n) \in C | \theta = \theta_0] = \int_C \dots \int L(\theta_0; x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \alpha$$

ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของตัวอย่างสุ่ม $X_1, \dots, X_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง ความน่าจะเป็น $P\left[\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)} = c\right]$ อาจมีค่าที่ต่างจาก 0 ได้

ในกรณีเช่นนี้ อาจหาค่าคงที่ c ที่ทำให้ขนาดของการทดสอบเท่ากับ $\alpha - q$ เมื่อ $0 < q < \alpha$ เมื่อต้องการหาการทดสอบที่มีขนาด α จะต้องใช้การทดสอบสุ่ม (Randomized test)

ดังนั้นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} < c \\ \frac{q}{\alpha} & \text{เมื่อ} \quad \frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $q = \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)} < c\right]$ และ $p = P\left[\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)} = c\right]$

เมื่อ $P\left[\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)} < c\right] < \alpha \leq P\left[\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)} \leq c\right]$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta_0] &= (1) P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \left(\frac{q}{p}\right) P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยายสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ การทดสอบที่กำหนดไว้ในรูปของ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $c > 0$ และ $0 \leq \gamma \leq 1$ เป็นการทดสอบสุ่มที่มีกำลังสูงสุดในบรรดาการทดสอบสมมติฐานเดียวกันที่มีขนาดไม่เกิน α

การทดสอบจะมีขนาด α ได้โดยการเลือก c และ γ ให้เหมาะสมดังนี้

1. ถ้ามีค่า $c > 0$ ที่ทำให้ $P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha$ ให้เลือกใช้ c นั้น และให้ $\gamma = 0$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

2. ถ้าไม่มีค่าคงที่ $c > 0$ ใดๆ ที่มีคุณสมบัติตามข้อ 1. ให้เลือก c ที่ทำให้

$$P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] < \alpha \leq P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c\right]$$

และให้ $\gamma = \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]}$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta_0] &= 1P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \gamma P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

2.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

2.1.2.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยวเทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ

(Simple Hypothesis Compare with Composite Hypothesis Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว H_0 เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ H_1 บริเวณวิกฤต C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful critical region) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ H_0 นั้น เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยวใดๆ ใน H_1 (ประชุม สุวัทธิ : 2545)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อการทดสอบนั้นมีขนาด α และมีฟังก์ชันกำลังมากกว่าฟังก์ชันกำลังของการทดสอบอื่นใดที่มีขนาด α เมื่อ $\theta \in \Omega - \omega$

นั่นคือ $\phi(x_1, \dots, x_n)$ เป็นการทดสอบ UMP ที่มีขนาด α ในการทดสอบ

$H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ ก็ต่อเมื่อ

$$1. \beta_\phi(\theta_0) = \alpha$$

และ $2. \beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi'}(\theta)$ ทุก $\theta \in \Omega - \omega$

ไม่ว่า $\phi'(x_1, \dots, x_n)$ จะเป็นการทดสอบใด ๆ ที่ $\beta_{\phi'}(\theta_0) = \alpha$ ในที่นี้ $\beta_\phi(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi'}(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ'

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (ถ้ามี) สำหรับการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันสำหรับ $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 \in \Omega - \omega$ เพื่อหาการทดสอบได้ โดยกำหนด θ_1 ขึ้นมา 1 ตัว เช่น $\theta = \theta_1$ แล้วทำการทดสอบดู ถ้าการทดสอบที่หาได้ไม่เปลี่ยนแปลงรูปไปเมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป แต่ยังคงอยู่ใน $\Omega - \omega$ แสดงว่าการทดสอบนั้นเป็นการทดสอบ UMP แต่ถ้าการทดสอบเปลี่ยนแปลงรูปไป เมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป ก็แสดงว่าการทดสอบนั้นไม่ใช่การทดสอบ UMP ดังนั้นการทดสอบ UMP อาจจะมีหรือไม่มีก็ได้

2.1.2.2 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ $H_0 : \theta \in \omega$, $\omega \subset \Omega$ เป็นการทดสอบที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta \in \omega} P[\text{ปฏิเสธ } H_0 | H_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \alpha = \sup_{\theta \in \omega} \beta(\theta)$$

เมื่อ $\beta(\theta)$ คือ ฟังก์ชันกำลัง (ประชุม สุวัฒน์ : 2545)

การทดสอบ $\phi(x_1, \dots, x_n)$ สำหรับ $H_0 : \theta \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta \in \omega} \beta_\phi(\theta) = \alpha$$

$$\text{และ} \quad \beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta)$$

ทุกค่า $\theta \in \Omega - \omega$

ไม่ว่า ϕ^* จะเป็นฟังก์ชันวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาดไม่เกิน α กล่าวคือ

$$\sup_{\theta \in \omega} \beta_{\phi^*}(\theta) \leq \alpha$$

โดยที่ $\beta_\phi(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi^*}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ^*

การแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียวหรือแบบลดอย่างเดียว

(Distribution of monotone increasing or decreasing likelihood ratio)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x; \theta) : \theta \in \Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียว (Monotone increasing likelihood ratio) ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T = T(X_1, \dots, X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0; X_1, \dots, X_n) / L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด (Nondecreasing function) ของ $T(X_1, \dots, X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0 < \theta_1$ (ประชุม สุวดี : 2545)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x; \theta) : \theta \in \Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบลดอย่างเดียว (Monotone decreasing likelihood ratio) ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T = T(X_1, \dots, X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0; X_1, \dots, X_n) / L(\theta_1; X_1, \dots, X_n)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม (Nonincreasing function) ของ $T(X_1, \dots, X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0 < \theta_1$

ถ้า $X_1, \dots, X_n$ มีการแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น เราอาจใช้การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายได้ดังนี้

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x; \theta) : \theta \in \Omega\}$ มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบไม่ลดอย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio) ของสถิติ $T = T(X_1, \dots, X_n)$ ให้ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$ หรือ $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) : T(x_1, \dots, x_n) \leq c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการทดสอบ $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

ถ้าให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ และ วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x; \theta): \theta \in \Omega\}$ มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบไม่เพิ่มอย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio) ของสถิติ $T = T(X_1, \dots, X_n)$ ให้ C เป็น บริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการทดสอบ $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$ หรือ $H_0: \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1, \dots, x_n): T(x_1, \dots, x_n) \geq c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการทดสอบ $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta > \theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการทดสอบ $H_0: \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta > \theta_0$

ถ้าให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ และ วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x; \theta): \theta \in \Omega\}$ มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบไม่ลดอย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio) ของสถิติ $T = T(X_1, \dots, X_n)$ การทดสอบ ที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับทดสอบ $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta < \theta_0$ หรือ $H_0: \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$ หรือ บริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1, \dots, x_n): T(x_1, \dots, x_n) \geq c\}$$

และถ้าให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ และในทำนองเดียวกัน วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x; \theta): \theta \in \Omega\}$ มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบไม่เพิ่มอย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio) ของสถิติ

$T = T(X_1, \dots, X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ หรือ $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$ หรือบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) : T(x_1, \dots, x_n) \leq c\}$$

การแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง (Distribution of Exponential Family)

ถ้า $X_1, \dots, X_n$ มีการแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ได้ดังนี้ (ประชุม สุวดี : 2545)

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกในวงศ์ชี้กำลัง (Exponential family) สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x; \theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

$$\text{และให้ } T = T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n q(X_i)$$

1. ถ้า $p(\theta)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวของ θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับทดสอบ $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ หรือทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] &= P[T(X_1, \dots, X_n) > c | \theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\text{และกำลังของการทดสอบ} = 1 - \beta = P[T(X_1, \dots, X_n) > c | \theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta > \theta_0]$$

2. ถ้า $p(\theta)$ เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวของ θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับทดสอบ $H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ หรือทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] &= P[T(X_1, \dots, X_n) < c | \theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\text{และกำลังของการทดสอบ} = 1 - \beta = P[T(X_1, \dots, X_n) < c | \theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta > \theta_0]$$

ถ้าให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกในวงศ์ชี้กำลัง สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x; \theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

$$\text{และให้ } T = T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n q(X_i)$$

1. ถ้า $p(\theta)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวของ θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับทดสอบ $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ หรือทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] &= P[T(X_1, \dots, X_n) < c | \theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\text{และกำลังของการทดสอบ} = 1 - \beta = P[T(X_1, \dots, X_n) < c | \theta < \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta < \theta_0]$$

2. ถ้า $p(\theta)$ เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวของ θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับทดสอบ $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ หรือทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ ($c > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$) เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] &= P[T(X_1, \dots, X_n) > c | \theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\text{และกำลังของการทดสอบ} = 1 - \beta = P[T(X_1, \dots, X_n) > c | \theta < \theta_0] + \gamma P[T(X_1, \dots, X_n) = c | \theta < \theta_0]$$

2.1.2.3 การทดสอบสมมติฐานสองด้าน (Two-sided Test)

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง ก็สามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x; \theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta \in \Omega$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta \leq \theta_1$ หรือ $\theta \geq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP test) ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } c_1 < T(x_1, \dots, x_n) < c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

2.1.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

(Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

ให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง ก็สามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x; \theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta \in \Omega$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะมีการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP unbiased test) ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < T(x_1, \dots, x_n) < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

ถ้าให้ $X_1, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง ก็สามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x; \theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta \in \Omega$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta \neq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ จะมีการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP unbiased test) ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } T(x_1, \dots, x_n) = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < T(x_1, \dots, x_n) < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$$

$$\text{และ } E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \phi(X_1, \dots, X_n) | \theta = \theta_0\right] = \alpha E\left[\sum_{i=1}^n X_i | \theta = \theta_0\right]$$

2.2 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บรรทม สุระพร (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินาม โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = 0$ เทียบกับ $H_1: \theta = 0.3$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ $n = 10, 20, 30, 40$ และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง $n = 30$ หลังจากนั้น ค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด

การหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta \leq 0.3$ เทียบกับ $H_1: \theta > 0.3$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง $n = 30$ หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน

$H_0: \theta \leq 0.3$ หรือ $\theta \geq 0.7$ เทียบกับ $H_1: 0.3 < \theta < 0.7$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ $n = 10, 20, 30$ จะไม่สามารถหาค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0: 0.3 \leq \theta \leq 0.7$ เทียบกับ $H_1: \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ เมื่อขนาดของการ

ทดสอบ $\alpha = 0.01, 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

รุจิเรข คีเสียง (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้านภายใต้การแจกแจงปัวส์ซง โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.2$ หรือ $\theta \geq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ $n = 20, 30, 40$ และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และ γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 20$ จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่ $n = 20$ และ 50 จะไม่สามารถหาค่าได้

และการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอด้านเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.5$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดเช่นเดียวกัน

สายชล สันสมบูรณ์ทอง (2554) ศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใดๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta \leq \theta_1$ หรือ $\theta \geq \theta_2$ เทียบกับ $H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ เทียบกับ $H_1: \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า $n = 5$ และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1: \theta \neq \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า $n = 5$ และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น