บทที่ 2

ผลงานวิจัยและงานเขียนที่เกี่ยวข้อง

ผลงานวิจัยและงานเขียนที่เกี่ยวข้องกับวิธีการจำลองก้อนเมฆเสมือนจริงนั้น มีหลากหลายแขนง อาทิ โครงสร้างของตัวแบบจำลองก้อนเมฆ องค์ประกอบทางกายภาพของการเกิดเมฆ การจำลองลักษณะการเคลื่อนที่ตามหลักการพลศาสตร์ของไหล การสังเคราะห์ลายผิวสามมิติ เทคนิคการให้แสงและเงาในแบบทันที ตลอดจนแนวคิดในการประยุกต์องค์ความรู้ของแต่ละแขนงมาผสมผสานเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ และองค์ความรู้แนวทางใหม่

แบบจำลองก้อนเมฆ

แบบจำลองก้อนเมฆนั้นมีหลากหลายรูปแบบ เมื่อพิจารณาในด้านลักษณะของโครงสร้างและลักษณะการเปลี่ยนแปลงรูปทรง สามารถจำแนกได้เป็นสองแบบคือ แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ และแบบจำลองเชิงฟิสิกส์

แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์นั้น เป็นการใช้สมการคณิตศาสตร์คำนวณเพื่อสังเคราะห์รูปร่างและลายผิวของก้อนเมฆ ทำให้ใช้เวลาประมวลผลน้อย และง่ายต่อการโปรแกรม แต่มีจุดด้อยอยู่ที่รูปร่างของก้อนเมฆนั้น ถูกกำหนดขึ้นโดยค่าของพารามิเตอร์ในสมการ ซึ่งส่งผลต่อความถูกต้องตามลักษณะทางกายภาพ และความยืดหยุ่นในการปรับเปลี่ยนรูปทรง ดังเช่นผลงานของ (Grudziński & Dębowski, 2007) เป็นการใช้ฟังก์ชันเมตริกซ์สองมิติ สำหรับจำลองก้อนเมฆ

แบบจำลองเชิงฟิสิกส์นั้น เป็นการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับพลศาสตร์ของไหลเพื่อสังเคราะห์รูปร่างและลักษณะการเคลื่อนที่ ทำให้ใช้เวลาในการประมวลผลสูง แต่ได้ความถูกต้องเสมือนจริงของรูปร่างและการปรับเปลี่ยนรูปทรงทำได้อย่างคล่องตัว ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงให้ความสนใจแบบจำลองเชิงฟิสิกส์เป็นหลัก

1. แบบจำลองก้อนเมฆเชิงฟิสิกส์โดยสมการเนฟเออร์สโตรกส์ (Navier-Stokes)

สมการเนฟเออร์สโตรกส์ (Navier-Stokes) เป็นสมการผลต่างเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ใช้ในแบบจำลองกลศาสตร์ของไหล ซึ่ง (Stam, 1999) ได้พัฒนาเครื่องมือสำหรับแก้สมการนี้ให้เสถียรและกระชับยิ่งขึ้น โดยประยุกต์ใช้ลากราเจียน (Lagrangian) และฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit) ทำให้การทำภาพเคลื่อนไหวพลศาสตร์ของไหลในแบบทันทีนั้นมีความเป็นไปได้

ต่อมา (Harris, Baxter, Scheuermann, & Lastra, 2003) ได้นำเครื่องมือนี้มาประยุกต์ใช้กับการจำลองก้อนเมฆแบบพลวัต โดยใช้องค์ประกอบทางฟิสิกส์เกี่ยวกับ ความเร็ว $\mathbf{u}=(u,v,w)$, ความกดอากาศ (ρ), อุณหภูมิ (T) ไอน้ำ (q_v) และละอองน้ำควบแน่น (q_c) โดยองค์ประกอบเหล่านี้ ได้ถูกนำไปใช้เป็นตัวแปรสำหรับสมการของการเคลื่อนไหว, สมการพลวัตความร้อน และสมการภาวะต่อเนื่องของน้ำ

1.1 สมการของการเคลื่อนไหว การเคลื่อนไหวของอากาศในชั้นบรรยากาศสามารถอธิยายได้ด้วยสมการออยเลอร์ (Euler Equations)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = -(\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{u} - \frac{1}{\rho}\nabla \mathrm{p} + \mathrm{Bk} + \mathrm{f} \quad \text{-------} (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{----------} (2)$$

โดยที่ ในสมการที่ (1) มีองค์ประกอบย่อย 4 ส่วน

ส่วนที่หนึ่ง: เกี่ยวกับความเร็วของการนำพาแนวนอน

ส่วนที่สอง: เกี่ยวกับความเร่งจากความกดอากาศ โดย ρ คือค่าความหนาแน่น

ส่วนที่สาม: B คือความเร่งลอยตัว โดย $k = \frac{R_d}{C_p} = \frac{C_p - C_v}{C_v} \approx 0.286$

R_d คือค่าคงที่ของก๊าซสำหรับอากาศแห้ง (287 J kg^{-1} K^{-1})

C_p คือค่าความจุความร้อนของอากาศแห้งที่ความกดอากาศคงที่

C_v คือค่าความจุของปริมาตร

ส่วนที่สี่: f คือความเร่งจากแรงกระทำตัวอื่น

ในสมการที่ (2) เป็นสมการของการต่อเนื่อง จากการที่ค่าของความเร็วสามารถกระจายตัวได้อย่างอิสระ

การคำนวณค่า B พิจารณาได้จากแรงลอยตัว ซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น ของมวลกลุ่มอากาศต่อบริเวณโดยรอบ โดยที่หากความหนาแน่น ของมวลกลุ่มอากาศ

น้อยกว่าบริเวณโดยรอบ จะทำให้แรงลอยตัวพุ่งสูงขึ้น แต่หากความหนาแน่นของมวลกลุ่มอากาศสูงกว่าบริเวณโดยรอบ จะทำให้แรงลอยตัวพุ่งต่ำลง ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (3)

$$\mathrm{B} = \mathrm{g}\left(\frac{\theta_{\mathrm{v}}}{\theta_{\mathrm{v0}}} - \mathrm{q_H}\right) \text{ ---------- (3)}$$

โดยที่ g คือความเร่งจากแรงดึงดูดโลก

q_H คืออัตราส่วนการผสมมวลของเหลว

θ_{v0} คืออุณหภูมิเสมือนอ้างอิง ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 290 ถึง 300 K

$\theta_{\mathrm{v}} \approx \theta(1 + 0.61q_v)$ คืออุณหภูมิศักย์เสมือน ซึ่งบอกลักษณะของไอน้ำในอุณหภูมิอากาศ

ความเร็ววน เป็นลักษณะการไหลหมุนวนในมาตราส่วนที่ต่างกัน โดยคำนวณจาก $\omega = \nabla \times u$ และเมื่อทำให้เป็นบรรทัดฐานจะได้ว่า $N = \frac{\eta}{|\eta|}$ โดยที่ $\eta = \nabla|\omega|$ โดยเวคเตอร์ N มีทิศทางชี้จากพื้นที่ความเร็ววนต่ำไปหาพื้นที่ความเร็ววนที่สูงกว่า และจากเวคเตอร์เหล่านี้ทำให้สามารถคำนวณแรงความเร็ววนได้ในสมการที่ (4)

$$f_{vc} = \varepsilon h(N \times \omega) \text{ ---------- (4)}$$

โดยที่ ε คือพารามิเตอร์กำหนดมาตราส่วนซึ่งถูกควบคุมโดยผู้ใช้

h คือมาตราส่วนขนาดตาราง

1.2 **สมการพลวัตความร้อน** จากลักษณะของอุณหภูมิศักย์ โดยที่อากาศอิ่มตัวนั้นไม่สามารถสมมุติให้เป็นค่าคงที่ได้ และเมื่อพิจารณากลุ่มอากาศชื้น ที่เคลื่อนไหวจนพ้นจุดอิ่มตัว ซึ่งไอน้ำเกิดการควบแน่น และปลดปล่อยความร้อนแฝงออกมาทำให้กลุ่มอากาศนั้นอุ่นขึ้น โดยอาศัยตามกฎข้อหนึ่งของพลวัตความร้อนจะได้ผลลัพธ์ดังในสมการที่ (5)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\mathrm{u}\cdot\nabla)\theta = \frac{-\mathrm{L}}{\mathrm{C_p}\Pi}\left(\frac{\partial \mathrm{q_v}}{\partial \mathrm{t}} + (\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{q_v}\right) \text{ ------- (5)}$$

โดยที่ L คือความร้อนแฝงจากการกลายเป็นไอของน้ำ 2.501 J kg^{-1} ที่ 0° องศา และเมื่อพิจารณาสมการทางด้านซ้าย ซึ่งมีรูปแบบเหมือนการหาอุณหภูมิศักย์ (θ) ที่ถูกนำพาในแนวนอนโดยค่าของความเร็วจากการใช้เซมิ-ลากราเจียน ส่วนสมการทางด้านขวาที่อยู่ภายในวงเล็บนั้น มีรูปแบบเหมือนสมการความต่อเนื่องของน้ำ ซึ่งแสดงได้ว่าอุณหภูมิจะเพิ่มขึ้น ตามสัดส่วนของปริมาณการควบแน่น ดังนั้นการปรับปรุงสมการใหม่จะได้ว่า

$$\theta = \acute{\theta} + \frac{L}{C_p \Pi} \Delta C \quad \text{----------(6)}$$

1.3 **สมการภาวะต่อเนื่องของน้ำ** ใช้สำหรับอธิบายลักษณะของอัตราส่วนการผสมไอน้ำ *(q_v)* และอัตราส่วนการผสมละอองน้ำควบแน่น *(q_c)* โดยละอองน้ำเกิดจากการควบแน่นของไอน้ำจนกลายเป็นหยดน้ำ แต่ไม่เพียงพอที่จะตกลงมาเป็นน้ำฝน ซึ่งค่าอัตราส่วนผสมของน้ำมีผลมาจากความเร็วการนำพาแนวนอน และการเปลี่ยนสถานะจากก๊าซ กลายเป็นของเหลว (การควบแน่น) หรือเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นก๊าซ (การระเหย) โดยสมการนี้ได้แบ่งการคำนวณออกเป็นสองช่วง

ช่วงแรกเป็นการหาค่าของการนำพาแนวนอน โดยใช้เทคนิคของ เซมิ-ลาแกลนเลียน ทำให้ได้ผลลัพธ์ $\acute{q_v}$ และ $\acute{q_c}$ ส่วนช่วงที่สอง ในแต่ละเซลล์จะถูกคำนวณอัตราส่วนการผสมขึ้นมาใหม่โดยใช้สมการ

$$\left.\begin{aligned} \Delta\acute{q}_v &= -\Delta C = \min\left(q_{vs} - \acute{q}_v, \acute{q}_c\right) \\ q_v &= \acute{q}_v + \Delta\acute{q}_v \\ q_c &= \acute{q}_c - \Delta\acute{q}_v \end{aligned}\right\} \text{-----(7)}$$

โดยที่ ΔC คือปริมาณของการควบแน่นในช่วงเวลานั้น

q_{vs} คืออัตราส่วนการผสมในสภาวะที่การควบแน่นเท่ากับการระเหย

สมการทั้งหมดที่เกี่ยวข้องจะถูกคำนวณในลักษณะของตารางวอกเซล ซึ่งแบ่งแยกโดยกรรมวิธีของ (Fedkiw, Stam, & Jensen, 2001) ทำให้ค่าความกดอากาศ อุณหภูมิ และข้อมูลของละอองน้ำ ถูกเก็บไว้ภายในกึ่งกลางของวอกเซล ในขณะที่ค่าความเร็วจะถูกเก็บไว้ในแต่ละ

หน้าของวอกเซล โดยกรรมวิธีทั้งหมดในการแก้สมการของก้อนเมฆแบบพลวัตในแต่ละช่วงเวลา มีขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณการนำพาข้อมูลแนวนอนของ θ, q_v, q_c และความเร็ว u
2. คำนวณค่าแรงความเร็ววน f_{vc} ตามสมการที่ (4)
3. คำนวณค่าแรงลอยตัว B ตามสมการที่ (3)
4. คำนวณหา $\acute{u} = u_{\text{advected}} + (B + f_{vc}) \cdot \delta t$
5. ปรับปรุงค่าของ q_v และ q_c ตามสมการที่ (7)
6. ปรับปรุงค่าของ θ ตามสมการที่ (6)
7. คำนวณค่าไดเวอร์เจนซ์ $\nabla \cdot \acute{u}$
8. แก้สมการความกดปัวซง $\nabla^2 \mathrm{p} = \frac{1}{\delta \mathrm{t}} \nabla \cdot \acute{\mathrm{u}}$
9. คำนวณค่า $u = \acute{u} - \nabla p$

โดยในขั้นตอนที่ *3* เป็นการคำนวณตามสมการที่ (3) ซึ่งสามารถให้ผู้ใช้กำหนดค่าเชิงอัตราส่วนให้กับ q_H เพื่อเป็นการเสริมการควบคุมการลอยตัวของก้อนเมฆ ส่วนการแก้สมการความกดปัวซง ซึ่งเป็นสมการที่ใช้เวลามากที่สุดในการคำนวณนั้น สามารถใช้ตัวแก้สมการจาโคบีมาประยุกต์ใช้ ซึ่งเป็นการคำนวณเสร็จภายในหนึ่งรอบ หรือใช้ตัวแก้สมการเรด-แบ็ค เกาส์-เสเดล ซึ่งเป็นการคำนวณเสร็จภายในสองรอบ และสามารถคำนวณผลลัพธ์ได้ด้วยการทำงานของหน่วยประมวลผลกราฟิกจีพียู

แบบจำลองก้อนเมฆพลวัตเชิงฟิสิกส์ จำเป็นต้องทำการคำนวณองค์ประกอบทางกายภาพทั้งหลาย มาเก็บไว้ในแต่ละตารางวอกเซลของพื้นที่สามมิติ และหากกำหนดขนาดของพื้นที่สามมิติของตารางวอกเซลให้มีความละเอียดที่สูงขึ้น ซึ่งจะเป็นการเพิ่มจำนวนของวอกเซลให้มีจำนวนมากขึ้น จึงทำให้การคำนวณผลลัพธ์ทั้งหมดของตารางวอกเซล ใช้เวลาสูงมากยิ่งขึ้นตามไปด้วย ซึ่งจะส่งผลกระทบโดยตรง ต่ออัตราการแสดงภาพเฟรมต่อวินาที ดังนั้นปัญหาดังกล่าวนี้ยังคงเป็นอุปสรรคสำคัญ ให้นักวิจัยได้ค้นคิด และหาแนวทางพัฒนาต่อไป

2. การจำลองพลศาสตร์ของไหลด้วยแบบจำลองแลตทิซ-โบทสแมนน์ (Lattice-Boltzmann Method, LBM)

การจำลองพลศาสตร์ของไหล ซึ่งอธิบายได้ โดยอาศัยองค์ประกอบอันหลากหลายในระดับมหภาค เช่น องค์ประกอบของ ความหนาแน่น ความเร็ว ความกด และอุณหภูมิ มาใช้เป็นตัวดำเนินการโดยผ่านทางสมการเนฟเออร์สโตรกส์ ซึ่งการแก้สมการทำได้ยาก ส่วนหนึ่งเนื่องมาจากความไม่เป็นสมการเชิงเส้น ทำให้ต้องเสียเวลาไปกับการแก้สมการที่ซับซ้อน

ด้วยเหตุนี้ จึงมีการนำแบบจำลองแลตทิซ-โบทสแมนน์ หรือ แอลบีเอ็ม มาใช้สำหรับอธิบายการจำลองพลศาสตร์ของไหล โดยใช้องค์ประกอบในระดับจุลภาคแทน ซึ่งอาศัยหลักของแนวความคิดที่ว่า การไหลของสสารที่เป็นของไหลนั้น ประกอบขึ้นมาจากการไหลของเหล่าอนุภาคขนาดเล็กในระดับจุลภาค ซึ่งพฤติกรรมของอนุภาคเหล่านี้ เมื่อรวมเข้าด้วยกัน จะแสดงออกมาซึ่งผลลัพธ์ของพลวัตของไหลในระดับมหภาคได้

แบบจำลองแอลบีเอ็ม จึงเป็นการจำลองการเคลื่อนที่ของกลุ่มอนุภาคอิสระ ซึ่งเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นเป็นช่วงบนแลตทิซ ในแต่ละช่วงเวลา โดยกระทำในลักษณะของกริดเซลล์ที่มีกฎข้อบังคับควบคุม และในแต่ละกริดเซลล์จะมีตัวแปรหลายชนิดซึ่งเก็บค่าของสถานะไว้ ด้วยเหตุนี้แบบจำลองแอลบีเอ็ม ซึ่งมีความซับซ้อนของสมการน้อยกว่า และมีลักษณะการทำงานหรือพฤติกรรมในระดับจุลภาค แต่มีการแสดงพฤติกรรมในแบบเฉลี่ยในระดับมหภาค จึงทำให้การประมวลผลทำได้เร็วกว่าสมการเนฟเออร์สโตรกส์ ดังนั้น แบบจำลองแอลบีเอ็ม จึงเหมาะสมสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้ร่วมกับการจำลองปรากฏการณ์พลศาสตร์ในแบบทันที

การนำแบบจำลองแลตทิซ-โบทสแมนน์ มาใช้แทนสมการเนฟเออร์สโตรกส์จึงเป็นอีกแนวทางหนึ่งของงานด้านพลศาสตร์ของไหล โดยผลงานของ (Xiaoming, Wei, Mueller, & Kaufman, 2004) ได้นำแบบจำลองแอลบีเอ็มมาประยุกต์ใช้จำลองปรากฏการณ์การเคลื่อนที่ของแก๊สในแบบสามมิติ และได้พัฒนาใช้เทคนิคการคำนวณบนกราฟิกฮาร์ดแวร์ เมื่อพิจารณาค่าความหนาแน่นของอนุภาคซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่กระจายตัวแบบเฉลี่ยด้วย f_{qi} โดยดัชนี qi แสดงถึงขนาดมิติของแลตทิซย่อย ซึ่งกำหนดขึ้นจากการเรียงสับเปลี่ยนค่าของ (±1,…,±1,0,…0) โดย q เป็นจำนวนของส่วนประกอบ และ i แสดงเวคเตอร์แลตทิซย่อย ซึ่งในแบบจำลองสามมิติได้กำหนดแลตทิซย่อยไว้ 4 ลักษณะซึ่งรองรับรูปแบบการเคลื่อนที่ไปโหนดข้างเคียงจำนวน 26 รูปแบบ ดังแสดงในภาพที่ 2.1 โดยแต่ละแลคทิซย่อย สามารถอธิบายรายละเอียดได้ดังนี้

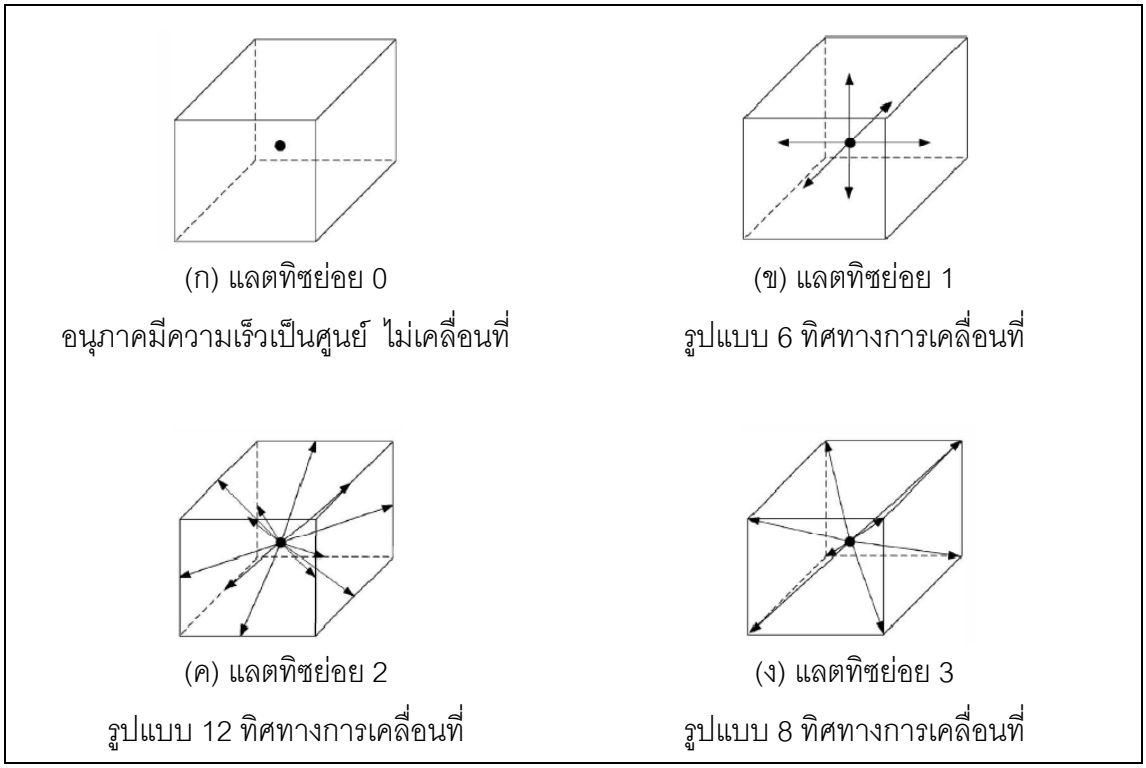
1. กรณี $q = 0$, เซลล์ (0,0,0) ประกอบด้วยอนุภาคที่มีความเร็วเป็นศูนย์ ดังแสดงในภาพที่ 2.1(ก)

2. กรณี $q = 1$, ประกอบด้วย 6 ทิศทางข้างเคียง (±1,0,0), (0, ±1,0), (0, ±1, ±1) ซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามความเร็วเต็มหน่วย ดังแสดงในภาพที่ 2.1(ข)

3. กรณี $q = 2$, ประกอบด้วย 12 ทิศทางข้างเคียงแบบที่สอง (±1, ±1,0), (0, ±1, ±1), (±1,0, ±1) ซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\sqrt{2}$ ดังแสดงในภาพที่ 2.1(ค)

4. กรณี $q = 3$, ประกอบด้วย 8 ทิศทางข้างเคียงแบบที่สาม (±1, ±1, ±1) ซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\sqrt{3}$ ดังแสดงในภาพที่ 2.1(ง)

ภาพที่ 2.1
ลักษณะแลตทิซย่อยทั้ง 4 ลักษณะของกริดเซลล์สามมิติ



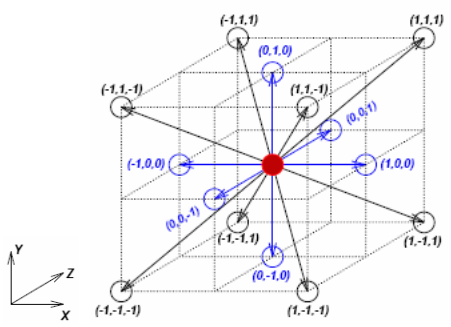
แบบจำลองแอลบีเอ็ม สามมิติ สามารถแบ่งรูปแบบออกตามลักษณะของรูปทรงเรขาคณิตได้เป็นสามแบบหลักคือ D3Q15, D3Q19 และ D3Q27

แบบ D3Q15 นั้นประกอบจากแลตทิซย่อย 0, 1, 3 ซึ่งเป็นแบบที่มีจำนวนของการกระจายทิศทางน้อยที่สุด 15 ทิศทาง อาจทำให้การจำลองพลศาสตร์ของไหลเห็นเป็นรอยหยักไม่ราบเรียบ แต่มีข้อดีที่ใช้เวลาประมวลผลน้อยที่สุด แบบ D3Q19 นั้นประกอบขึ้นมาจากแลตทิซย่อย 0, 1, 2 สามารถกระจายทิศทางของอนุภาคได้ 19 ทิศทางซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ละเอียดมากขึ้น ส่วน

แบบ D3Q27 นั้นประกอบขึ้นมาจากแลตทิซย่อยทั้งหมดคือ 0,1,2,3 ทำให้ทิศทางการกระจายอนุภาคมีความซับซ้อนสูงสุด ใช้เวลาคำนวณและพื้นที่จัดเก็บมาก แต่ให้ผลลัพธ์ที่มีคุณภาพสูงขึ้น ดังตัวอย่างที่แสดงในภาพที่ 2.2 เป็นทิศทางการกระจายของอนุภาคเฉพาะในแบบ D3Q15

ภาพที่ 2.2

ทิศทางการกระจายของอนุภาคในแบบ D3Q15



การดำเนินการของแบบจำลองแอลบีเอ็ม จะมีการปรับค่าของการกระจายในแต่ละโหนดโดยอาศัยกฎข้อบังคับหลักอยู่สองกฎคือ *การปะทะ* และ *การแพร่กระจาย* โดยการปะทะเป็นการอธิบายถึงลักษณะของการชนกันของอนุภาคในโหนดท้องถิ่น และเกิดการหักเหทิศทางการกระจายของอนุภาค ด้วยการตัดสินใจของตัวดำเนินการปะทะ ส่วนการแพร่กระจายเป็นการอธิบายถึงลักษณะการเคลื่อนที่ไปโหนดข้างเคียงตามทิศทางความเร็วของการกระจาย ซึ่งกฎทั้ง 2 ข้อสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

การปะทะ: $$f_{qi}^{new}(x,t) - f_{qi}(x,t) = \Omega_{qi} \quad \text{----------} \quad (8)$$

การแพร่กระจาย: $$f_{qi}(x + e_{qi}, t+1) = f_{qi}^{new}(x,t) \quad \text{----------} \quad (9)$$

โดยที่ Ω คือตัวดำเนินการปะทะ

e_{qi} คือเวคเตอร์หน่วยซึ่งแสดงอนุภาคความเร็วในทิศทางของแลตทิซ qi

ซึ่งในช่วงเวลา *t* ค่าการกระจายของแต่ละทิศทางของทุกโหนด จะถูกคำนวณใหม่จากตัวดำเนินการปะทะ Ω จากนั้นในช่วงเวลา *t+1* ค่าการกระจายค่าใหม่จะแพร่กระจายไปยังโหนดข้างเคียงตามทิศทางของเวคเตอร์ความเร็ว e_{qi}

องค์ประกอบในระดับมหภาคของความหนาแน่น ρ และความเร็ว μ ล้วนเป็นผลลัพธ์ซึ่งได้มาจากอิทธิพลของความเร็วในการกระจายค่าซึ่งคำนวณได้จากสมการดังนี้

$$\rho = \sum_{qi} f_{qi} \qquad \text{---------- (10)}$$

$$\mu = \frac{1}{\rho}\sum_{qi} f_{qi} e_{qi} \qquad \text{---------- (11)}$$

เมื่อรวมสมการที่ (8) และ (9) เข้าด้วยกัน จะแสดงได้ว่า

$$f_{qi}\left(x + e_{qi}, t + 1\right) - f_{qi}(x, t) = \Omega_{qi}$$

กลไกลการทำงานของแบบจำลองแอลบีเอ็มนั้น ขึ้นอยู่กับตัวดำเนินการปะทะ ซึ่งต้องใช้ความระมัดระวังในการเลือก Ω_{qi} โดยที่มวลและโมเมนตัมยังคงรูปไว้เช่นเดิม ดังนั้นหากสมมุติว่าในแต่ละเซลล์นั้น การกระจายของแต่ละทิศทาง f_{qi} มีการกระจายที่ทำให้เกิดดุลภาพ f_{qi}^{eq} โดยที่ค่าดังกล่าวขึ้นอยู่กับปริมาณของความหนาแน่น ρ และความเร็ว μ ของเซลล์นั้น จะทำให้ได้สมการเกี่ยวกับการเคลื่อนไหว *(Kinetic Equation)* ได้ดังนี้

$$f_{qi}\left(x + e_{qi}, t + 1\right) - f_{qi}(x, t) = \tfrac{1}{\tau}(f_{qi}(x, t) - f_{qi}^{eq}(\rho, \mu)) \text{ ----(12)}$$

โดย τ เป็นอัตราของเวลารีเลคเซชั่น

$f_{qi}^{eq}(\rho, \mu)$ คือการกระจายแบบดุลภาพ

ซึ่งสามารถหาจากสูตรเชิงเส้นได้ดังนี้

$$f_{qi}^{eq} = \rho(A_q + B_q(e_{qi} \cdot u) + C_q(e_{qi} \cdot u)^2 + D_q(u)^2) \quad \text{--------(13)}$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ของ A_q, B_q, C_q และ D_q นั้นเป็นค่าคงที่ ซึ่งขึ้นอยู่กับแต่ละแบบจำลอง ดังแสดงในตารางที่ 2.1 เป็นตัวอย่างค่าสัมประสิทธิ์เฉพาะแบบ D3Q19

ตารางที่ 2.1

ค่าสัมประสิทธิ์ของแลตทิซย่อยเฉพาะแบบ D3Q19

	แลตทิซย่อย 0	**แลตทิซย่อย 1**	**แลตทิซย่อย 2**
A_q	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
B_q	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
C_q	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
D_q	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$

ที่มา: (Xiaoming, et al., 2004)

ความหนืดสสารของไหล เป็นการแสดงลักษณะของการต้านในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของสสาร โดยความหนืด ν ในแบบจำลองแอลบีเอ็มนั้น ดำเนินการโดยผ่านทางพารามิเตอร์ τ ด้วยสมการ $\nu = \frac{1}{3}(\tau - \frac{1}{2})$ และเนื่องจากความหนืดต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้นค่าของ τ ต้องมีค่ามากกว่า $\frac{1}{2}$ ด้วยเช่นกัน

ขั้นตอนวิธีการทำงานของแบบจำลองแลตทิซ-โบทสแมนน์ มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับ ความหนาแน่น ρ, ความเร็ว μ และอัตราของเวลารีเลคเซชั่น τ ให้แต่ละกริดเซลล์

2. ดำเนินการคำนวณองค์ประกอบในระดับมหภาค ของความหนาแน่น จากสมการที่ (10) และความเร็วจากสมการที่ (11) ของแต่ละกริดเซลล์

3. คำนวณหาการกระจายดุลภาพ f_{qi}^{eq} จากสมการที่ (13) ของการกระจายในแต่ละทิศทาง

4. นำผลลัพธ์ได้ของการกระจายดุลภาพ มาใช้คำนวณหาสมการเกี่ยวกับการเคลื่อนไหวในสมการที่ (12)

5. ทำการแพร่กระจายค่าของการกระจายทิศทางไปยังกริดเซลล์ข้างเคียงทั้งหมด

6. ดำเนินการซ้ำตามข้อ *2* สำหรับช่วงเวลาถัดไป

การจำลองพลศาสตร์ของไหลด้วยกรรมวิธีแลตทิซ-โบทสแมนน์ เป็นการจำลองโดยใช้หลักแนวคิดของการสร้างอนุภาคพื้นฐานของการเคลื่อนที่ในระดับจุลภาค ซึ่งเมื่อรวมองค์ประกอบและขบวนการเหล่านั้นเข้าด้วย ทำให้ได้คุณสมบัติและพฤติกรรมโดยประมาณของการจำลองพลศาสตร์ของไหลในระดับมหภาค

3. การเปล่งแสงก้อนเมฆ และการให้แสงและเงา

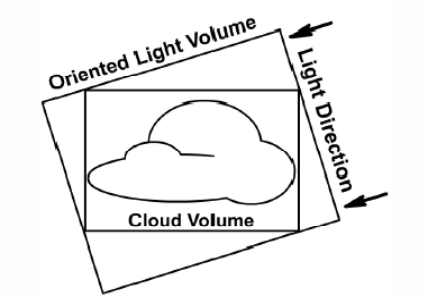
การสร้างภาพของก้อนเมฆให้เสมือนจริง จำเป็นต้องคำนึงถึงปฏิสัมพันธ์อันซับซ้อนของแสงที่กระทำต่อก้อนเมฆ ซึ่งแสงที่มองเห็นจากตัวก้อนเมฆนั้น เกิดจากการกระเจิงของลำแสงจำนวนมากซึ่งตกกระทบลงบนหยดละอองน้ำภายในตัวก้อนเมฆ โดยปกติหากต้องการจำลองการกระเจิงของแสงแบบหลายลำแสง จำเป็นต้องคำนวณโดยใช้สมการอินทิกรัลสองชั้น แต่เมื่อพิจารณาเฉพาะลักษณะของการกระเจิงสำหรับละอองน้ำในก้อนเมฆ จะพบว่าส่วนใหญ่ลำแสงจะท่องไปตามทิศทางของแสงตกกระทบ หรือทิศทางเดินหน้า ดังนั้นจึงสามารถจำลองแสงได้ ด้วยการคำนวณเฉพาะแสงกระเจิงเดินหน้าแบบหลายลำ ซึ่งผลงานวิจัยของ (Harris, et al., 2003) ได้จำลองการกระเจิงโดยใช้เทคนิคของลายผิวสามมิติ ซึ่งแบ่งออกเป็นสองขั้นตอนวิธีคือ สร้างลายผิวส่องแสงสามมิติก่อน จากนั้นนำลายผิวส่องแสงที่ได้ ไปใช้ทำเป็นลายผิวทึบสามมิติ

การสร้างลายผิวส่องแสงสามมิตินั้น เริ่มด้วยการกำหนดขนาดของกล่องขอบเขตให้มีขนาดพอดีกับปริมาตรของตัวก้อนเมฆ ซึ่งเมื่อหลังจากปรับทิศแล้วจะทำให้แกน *Z* ของกล่องขอบเขตอยู่ในทิศทางเดียวกันกับทิศทางของลำแสงเดินหน้า จากนั้นทำการให้แสงและเงา ด้วยการท่องลงไปในแสงสามมิติในแต่ละชั้น ซึ่งจำนวนของชั้น ขึ้นอยู่กับความละเอียดของลายผิวแสง

แล้วกำหนดค่าให้กับฟังก์ชันของการเกลี่ยสีและกำหนดค่าสี เพื่อใช้ในการคำนวณเงา และแสงกระเจิงเดินหน้า และด้วยการเปิดคุณสมบัติของการสร้างแกนลายผิวอัตโนมัติ ส่งผลให้การให้แสงและเงาของตัวก้อนเมฆมีการปรับแกนให้อยู่ในทิศทางที่ถูกต้องตามแกนของลายผิวทึบสามมิติ ดังแสดงภาพที่ 2.3 และในขณะเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้ในเฟรมบัฟเฟอร์ของแต่ละชั้น จะถูกคัดลอกไปยังชั้นปัจจุบันของลายผิวส่องแสงสามมิติจนกระทั่งครบทุกชั้น

ภาพที่ 2.3

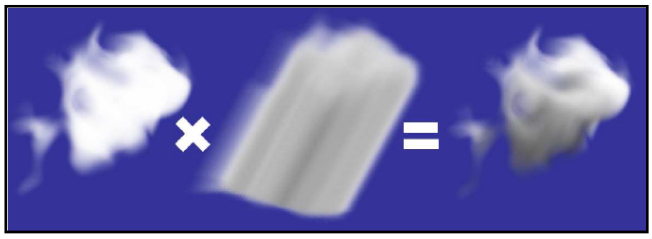
การปรับแกนลายผิวแสงของก้อนเมฆ ตามทิศทางของลำแสง



ในขั้นตอนของการแสดงภาพนั้น ลายผิวทึบของก้อนเมฆจะถูกรวมเข้ากับลายผิวแสง โดยใช้คุณสมบัติของการสร้างแกนลายผิวอัตโนมัติ และถูกเก็บไว้เป็นลายผิวหน่วยแรก จากนั้นกำหนดเมทริกซ์ลายผิวไว้ในลายผิวหน่วยที่สอง เพื่อใช้เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนรูป สำหรับการปรับมิติของตัวก้อนเมฆ ให้ไปอยู่ในมิติของปริมาตรแสง ซึ่งตัวอย่างของผลลัพธ์ดังแสดงในภาพที่ 2.4 โดยภาพซ้ายเป็นก้อนเมฆทึบสามมิติ, ภาพกลางเป็นแสงสามมิติ และภาพขวาเป็นก้อนเมฆเปล่งแสงสามมิติ

ภาพที่ 2.4

การเปล่งแสงก้อนเมฆสามมิติ



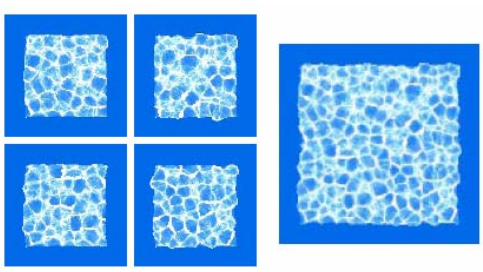
การสังเคราะห์และการปูลายผิว

เทคนิคในการสังเคราะห์ลายผิวขนาดใหญ่จากกลุ่มของตัวอย่างลายผิวต้นแบบขนาดเล็ก โดยให้ลายผิวที่สังเคราะห์ขึ้นมาใหม่ มีลักษณะระยะของลายไม่ซ้ำกัน ด้วยการประยุกต์ใช้แบบจำลองทางสถิติ ทำการสังเคราะห์จุดภาพทีละจุด โดยใช้วิธีการ จัดลำดับการกราดภาพแบบเชิงเส้น ซึ่งค่าที่ได้ในแต่ละจุดภาพจะพิจารณาจากการค้นหาค่าที่เหมาะสมจากตำแหน่งใกล้เคียงซึ่งอยู่ในละแวกนั้น ทำให้เกิดลายผิวขนาดใหญ่ แต่คงไว้ซึ่งด้วยลักษณะของลวดลายที่คล้ายลายผิวต้นแบบ ซึ่งเทคนิคลักษณะเช่นนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาในหลากหลายรูปแบบ และหนึ่งในรูปแบบนั้นเรียกว่า"แวงไทล์"

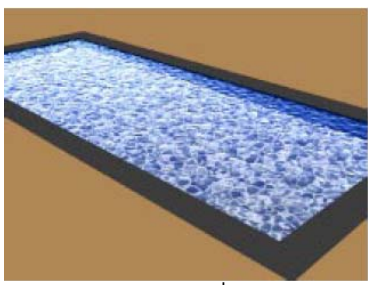
1. การสังเคราะห์ลายผิวแบบเฟ้นสุ่มด้วยเทคนิคแวงไทล์ (Wang Tile)

แวงไทล์ (Wang, 1960) คือกลุ่มของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก ที่ขอบแต่ละด้านมีสีกำกับไว้ โดยการสังเคราะห์ลายผิวของแวงไทล์ เกิดจากการเชื่อมต่อของแผ่นแวงไทล์ที่มีขอบสีเหมือนกัน จนกลายเป็นแผ่นลายผิวขนาดใหญ่ ซึ่งผลงานของ (Stam, 1997) ได้กำหนดให้ใช้แผ่นแวงไทล์จำนวน 16 แผ่น ทำการสังเคราะห์ลายผิวของผืนน้ำ ให้มีลักษณะระยะของลายไม่ซ้ำกัน ดังแสดงในภาพที่ 2.5(ก) เป็นกาแสดงลักษณะการเชื่อมต่อแผ่นทั้งสี่เข้าด้วยกัน และภาพที่ 2.5(ข) เป็นเชื่อมต่อทั้ง 16 แผ่น นอกจากนี้ ยังได้อธิบายถึงวิธีการสังเคราะห์ลายผิวตัวอย่างลงบนแผ่นแวงไทล์ โดยกำหนดวิธีการบังคับลวดลายที่ขอบแผ่น ให้สามารถเชื่อมกันได้อย่างลงตัว และให้รูปแบบของลวดลายนั้น ครอบคลุมเหมาะสมกับจำนวนอันจำกัดของแผ่นแวงไทล์ อย่างไรก็ตาม ผลงานของ (Stam, 1997) มีจุดด้อยในด้านขั้นตอนวิธีของการปูลายผิวสำหรับกรณีอื่นทั่วไป

ภาพที่ 2.5
การเชื่อมต่อลายผิวแผ่นแวงไทล์



(ก) การเชื่อมต่อสี่แผ่นเข้าด้วยกัน



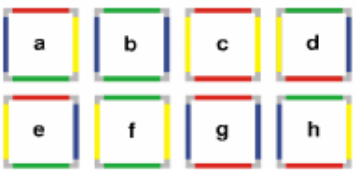
(ข) แสดงลักษณะการเชื่อมแบบ 16 แผ่น

ผลงานของ (Cohen, Shade, Hiller, & Deussen, 2003) ได้ทำการพัฒนาขั้นตอนวิธีการปูลายผิวแบบเฟ้นสุ่ม ทั้งวิธีการใช้ลายผิวสองมิติ และวิธีการแจกแจงปัวซอง และทำการขยายคุณสมบัติของแผ่นแวงไทล์ ด้วยการกำหนดค่าสีที่มุมทั้งสี่ และการเชื่อมต่อแผ่นแวงไทล์ต้องมีมุมสีเหมือนกันเท่านั้น จึงทำให้เกิดความหลากหลายของรูปแบบในการปูลายผิว อย่างไรก็ตาม เทคนิคของงานวิจัยเหล่านี้ มีหลักการพื้นฐานของการสังเคราะห์ลายผิวแบบเฟ้นสุ่มแวงไทล์ที่เหมือนกัน ซึ่งหลักการพื้นฐานดังกล่าว ประกอบไปด้วยหลักวิธีการดังต่อไปนี้

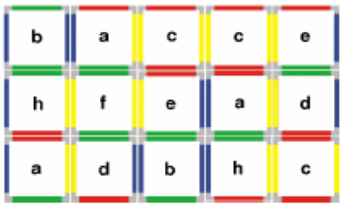
1.1 **ขั้นตอนวิธีการปูลายเฟ้นสุ่ม** จากข้อกำหนดและคุณสมบัติของแผ่นแวงไทล์ โดยสมมุติให้กลุ่มตัวอย่างของแผ่นต้นแบบแวงไทล์ มีลักษณะดังแสดงในภาพที่ 2.6(ก) จากภาพหากพิจารณาเฉพาะแผ่นต้นแบบ (b) ซึ่งประกอบไปด้วยสีที่ขอบของแผ่นสองสี โดยสีที่หนึ่งอยู่ขอบด้านเหนือ (N) และขอบด้านใต้ (S) ส่วนอีกสีอยู่ที่ขอบด้านตะวันตก (W) และขอบด้านตะวันออก (E) จึงทำให้การปูลายด้วยแผ่นต้นแบบเพียงแผ่นเดียวนั้นมีความเป็นไปได้

ภาพที่ 2.6

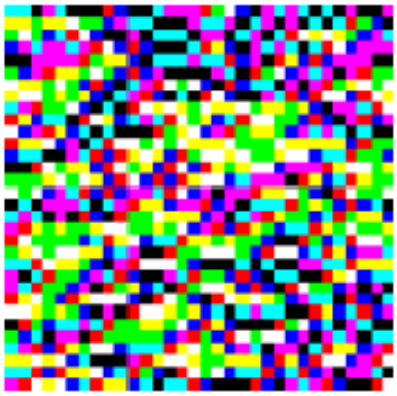
ลักษณะแผ่นต้นแบบแวงไทล์ สำหรับการปูลายผิวแบบเฟ้นสุ่ม



(ก) กลุ่มของแผ่นแวงไทล์แบบ 8 แผ่น



(ข) วิธีการปูลายผิว



(ค) ตัวอย่างการปูลายผิวลงบนระนาบ

การปูลายนั้นมีข้อกำหนดอยู่สองประเด็นคือ ประเด็นที่หนึ่งลำดับการปูลายจะเริ่มจากมุมบนซ้ายไล่ไปด้านขวาจนสุดแถว แล้วจึงเริ่มใหม่ในแถวถัดไปจากบนลงล่าง ส่วนประเด็นที่สองคือ การเลือกแผ่นต้นแบบมาวางปูลายจะต้องพิจารณาให้สีขอบของแผ่นเหมือนกันกับแผ่นที่ได้วางไปก่อนหน้า กล่าวคือให้สีด้านเหนือ (N) ของแผ่นที่จะปูลายเหมือนกับสีด้านใต้ (S) ของแผ่นที่ได้ปูลายไปแล้ว และให้สีด้านตะวันตก (W) ของแผ่นที่จะปูลายเหมือนกับสีด้านตะวันออก (E) ของแผ่นที่ได้ปูลายไปแล้ว ดังนั้นหากสีของขอบแผ่นต้นแบบมีจำนวน C สีสำหรับด้านที่ใช้เชื่อมต่อกันภายใต้ข้อกำหนดดังกล่าว แสดงได้ว่าจะสามารถมีรูปแบบของสีที่ขอบแผ่นได้ทั้งหมด C^2 รูปแบบ โดยขั้นตอนวิธีของการปูลายมีขั้นตอนดังนี้

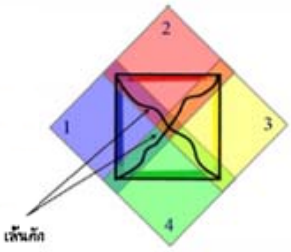
1. เลือกแผ่นตัวอย่างต้นแบบแวงไทล์หนึ่งแผ่น ปูลายในตำแหน่งแถวบนสุด
2. ปูลายแผ่นต้นแบบแผ่นต่อไปในตำแหน่งแถวบนสุด โดยเรียงลำดับจากด้านซ้ายไปขวา โดยเลือกแผ่นที่มีสีด้านตะวันตก (W) เหมือนกับสีด้านตะวันออก (E) ของแผ่นต้นแบบที่ได้วางปูลายไปแล้วก่อนหน้า
3. ปูลายแผ่นต้นแบบแผ่นแรกลงในแถวถัดไป โดยเลือกแผ่นที่มีสีด้านเหนือ (N) เหมือนกับสีด้านใต้ (S) ของแผ่นต้นแบบที่อยู่ในแถวบนก่อนหน้า
4. ปูลายแผ่นต้นแบบแผ่นต่อไปของแถวนั้น โดยเลือกสีที่ขอบด้านเหนือเหมือนกับสีด้านใต้ (S) ของแผ่นก่อนหน้าแถวบน และด้านตะวันตก (E) เหมือนกับสีด้านตะวันออก (E) ของแผ่นก่อนหน้าด้านซ้าย ตามลำดับ
5. ดำเนินการซ้ำตามขั้นตอนข้อ 3 สำหรับแถวที่เหลือถัดไปจนครบ

จากขั้นตอนวิธีดังกล่าว หากกำหนดให้กลุ่มของแผ่นต้นแบบแวงไทล์มีอย่างน้อยสองแผ่น โดยที่รูปแบบของสีที่ขอบด้านเหนือ-ตะวันตก (NW) มีสีเหมือนกัน แสดงว่าการเลือกแผ่นมาทำการปูลาย จะมีทางเลือกอย่างน้อยสองทางเลือก ด้วยการใช้วิธีเลือกแบบสุ่ม จะทำให้การปูลายลงบนแผ่นระนาบมีลักษณะระยะของลายที่ไม่ซ้ำกัน หรือเป็นการปูลายผิวแบบเฟ้นสุ่ม เช่น ตัวอย่างในภาพที่ 2.6(ก) เป็นกลุ่มของแผ่นแวงไทล์แบบ 8 แผ่นจำนวนสองสี ซึ่งพิจารณาจากสีที่ขอบด้านเหนือ-ใต้ (NS) เป็นสีแดงและสีเขียวเท่านั้น และเช่นกันสำหรับสีที่ขอบด้านตะวันออก-ตะวันตก (EW) เป็นสีเหลืองและสีน้ำเงินเท่านั้น และเมื่อพิจารณารูปแบบสีขอบด้านเหนือ-ตะวันตก (NW) ของแผ่นแวงไทล์ *a* จนถึงแผ่นแวงไทล์ *d* จะเห็นว่ามีจำนวนรูปแบบสีที่ขอบแบบเดียวกันกับแผ่นแวงไทล์ *e* จนถึงแผ่นแวงไทล์ *f* ขณะเดียวกันรูปแบบสีที่ขอบด้านใต้-ตะวันออก (SE) ของแผ่นแวงไทล์ทั้งแปดแผ่น ล้วนมีรูปแบบที่เหมือนกันเป็นจำนวนสองแผ่น

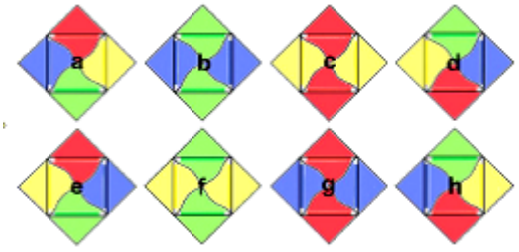
ตัวอย่างวิธีการปูลายผิวด้วยแผ่นต้นแบบแวงไทล์แบบ 8 แผ่นดังแสดงในภาพ 2.6(ข) เมื่อกำหนดสีลงไปในแต่ละแผ่นต้นแบบแวงไทล์ และทำการปูลายลงบนแผ่นระนาบขนาดใหญ่จะได้ตัวอย่างของลายผิวแบบเฟ้นสุ่ม ดังแสดงในภาพที่ 2.6(ค) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มจำนวนสีและรูปแบบทางเลือกของแผ่นต้นแบบ จะทำให้การปูลายผิวมีลักษณะระยะของลายที่ซ้ำกันน้อยลง และทำให้ลวดลายมีความหลากหลายมากยิ่งขึ้น

1.2 **การสังเคราะห์ลายผิวแผ่นแวงไทล์** ในการสังเคราะห์ลายผิวให้มีลวดลายที่ต่อเนื่องได้นั้น ลายผิวต้นแบบซึ่งมีลายขอบที่แตกต่างกัน จะต้องถูกนำมาผสมรวมกันลงในแผ่นแวงไทล์ โดยผลงานของ (Cohen, et al., 2003) ได้เสนอวิธีนำภาพลายผิวตัวอย่างมาผสมรวมกันโดยจำนวนของภาพลายผิวขึ้นอยู่กับจำนวนของขอบสีตามแนวนอน และขอบสีตามแนวตั้งของแผ่นแวงไทล์ จากตัวอย่างในภาพที่ 2.6(ก) ซึ่งมีขอบสีตามแนวนอน และขอบสีตามแนวตั้งรวมกันจำนวน 4 สีจึงใช้ภาพลายผิวตัวอย่างจำนวนสี่ภาพ ด้วยการหมุนภาพลายผิวตัวอย่างทำมุมเอียง 45 องศา และวางซ้อนทับเหลื่อมกันเล็กน้อย โดยเลือกภาพลายผิวตัวอย่างตามสีขอบแผ่นแวงไทล์ดังแสดงในภาพที่ 2.7(ก)

ภาพที่ 2.7
การสังเคราะห์ลายผิวแผ่นแวงไทล์



(ก) การรวมภาพลายตัวอย่างทั้งสี่ตามแนวเส้นตัด



(ข) การสังเคราะห์ลายของแผ่นแวงไทล์

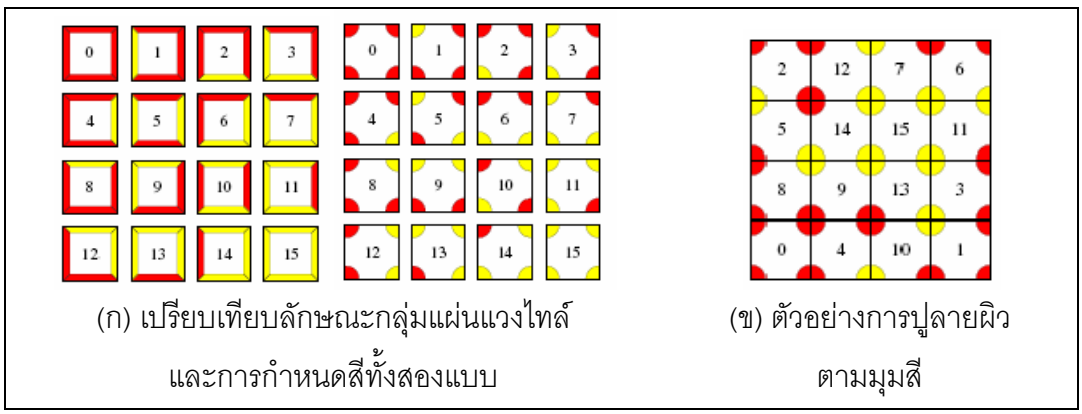
(ค)การปูลายผิวจากกลุ่มของแผ่นแวงไทล์

ซึ่งวิธีการนี้ใช้หลักแนวคิดที่ว่าการสังเคราะห์ลายผิวขนาดใหญ่มาจากการนำแผ่นจัตุรัสขนาดเล็ก ซึ่งได้มาจากการสุ่มภาพลายผิวตัวอย่าง โดยแผ่นภาพจัตุรัสเหล่านั้นจะถูกวางซ้อนทับเหลื่อมกัน โดยส่วนที่เหลื่อมกันจะเป็นพื้นที่สำหรับหาเส้นทางการตัดภาพ ซึ่งพิจารณาจากความแตกต่างของค่าสีในแต่ละจุดภาพ หากค่าสีของจุดภาพมีค่าต่ำกว่าค่าที่กำหนดไว้ จุดภาพนั้นจะถูกนำมาใช้เป็นลายผิว ซึ่งในกรณีของแวงไทล์เส้นทางการตัดภาพทั้งสี่เส้นทางถูกนำมาใช้เพื่อเชื่อมขอบของลายผิวให้มีความต่อเนื่อง ลักษณะตัวอย่างการสังเคราะห์ลายผิวดังแสดงในภาพที่ 2.7(ข) และลักษณะการปูลายจากกลุ่มของแผ่นแวงไทล์ ดังแสดงในภาพที่ 2.7(ค)

1.3 **การปูลายผิวตามมุมสีแผ่นแวงไทล์** ตามปกติแผ่นแวงไทล์จะกำหนดสีไว้ที่ขอบแต่ละด้านของแผ่น โดยการปูลายเกิดจากการสุ่มเลือกแผ่นมาวางต่อกันภายใต้ขอบสีที่เหมือนกัน ซึ่งมีจุดด้อยอยู่ที่มุมของการต่อเชื่อมแผ่นในแนวทแยงนั้น อาจไม่มีความต่อเนื่องของลายผิว ซึ่งเรียกลักษณะของปัญหาแบบนี้ว่า "*ปัญหามุม*" ผลงานของ (Lagae & Dutré, 2006) ได้เสนอการปูลายผิวตามมุมสี แทนการปูลายผิวตามขอบสี ซึ่งทำให้เกิดความต่อเนื่องของลายผิวทั้งในด้านขอบและมุมของแผ่นแวงไทล์ โดยคุณสมบัติของแผ่นแวงไทล์แบบตามมุมสีนั้น มีคุณสมบัติเช่นเดียวกับแบบตามขอบสี ดังแสดงในภาพที่ 2.8(ก) ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบลักษณะของกลุ่มแผ่นแวงไทล์ทั้งสองแบบ และภาพที่ 2.8(ข) แสดงตัวอย่างการปูลายผิวตามมุมสี

ภาพที่ 2.8

การปูลายผิวตามมุมสีแผ่นแวงไทล์



(ก) เปรียบเทียบลักษณะกลุ่มแผ่นแวงไทล์และการกำหนดสีทั้งสองแบบ

(ข) ตัวอย่างการปูลายผิวตามมุมสี

กลุ่มของแผ่นแวงไทล์ตามมุมสีนั้น จำนวนรูปแบบสูงสุดที่สามารถมีได้ ขึ้นอยู่กับจำนวนสีที่ใช้ หากกำหนดให้สีมีจำนวน C สี การจัดหมู่รูปแบบทั้งหมดจะมีได้ C^4 รูปแบบ ดังเช่นในภาพที่ 2.8(ก) เป็นกลุ่มรูปแบบแผ่นแวงไทล์ทั้งหมดสำหรับสองสี ซึ่งแต่ละแผ่นจะมีหมายเลข

ดัชนีกำกับไว้ทั้งหมด โดยหมายเลขดัชนี กำหนดได้จากการให้สีแต่ละสีมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มเริ่มจาก 0, 1,…, C-1 และกำหนดชื่อเรียกของสีแต่ละมุม โดยสีที่มุมด้านตะวันออกเฉียงเหนือชื่อ C_{NE}, สีที่มุมด้านตะวันออกเฉียงใต้ชื่อ C_{SE}, สีที่มุมด้านตะวันตกเฉียงใต้ชื่อ C_{SW} และสีที่มุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือชื่อ C_{NW} ซึ่งสีของมุมทั้งสี่จะถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของตัวเลขฐาน C จำนวนสี่หลัก โดยการเรียงลำดับตัวเลขแต่ละหลักจาก C_{NE} C_{SE} C_{SW} C_{NW} ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าเป็นเลข 0, 1,… ,C^4-1 และตัวเลขนี้ จะถูกนำไปใช้กำหนดเป็นหมายเลขดัชนี ของแผ่นแวงไทล์ ส่วนการปูลายผิวของแผ่นแวงไทล์ตามมุมสีนั้น จะทำการเลือกแผ่นแวงไทล์ที่มีมุมสีเหมือนกัน มาวางเชื่อมต่อกัน โดยให้มีมุมสีเหมือนกันทั้งสี่มุม ซึ่งวิธีการปูลาย และลำดับการเรียงมีวิธีการเช่นเดียวกับแผ่นแวงไทล์แบบตามขอบสี

2. การปูลายแบบสามมิติด้วยเทคนิคแวงคิวก์ (Wang Cube)

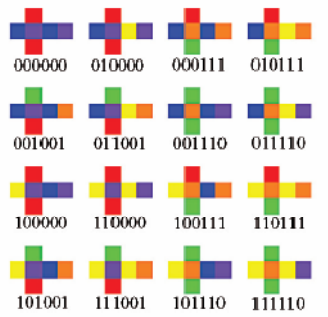
แวงคิวก์เป็นลูกบาศก์สามมิติซึ่งพัฒนาขึ้นมาจากแผ่นแวงไทล์สองมิติ โดยผลงานของ(Lu, Ebert, Qiao, Kraus, & Mora, 2004), (Lu, Ebert, Qiao, Kraus, & Mora, 2007) และ (Lu & Ebert, 2005) กำหนดให้แต่ละหน้าของลูกบาศก์แวงคิวก์มีสีกำกับไว้ทั้งหกด้าน ซึ่งแต่ละด้านมีชื่อกำหนดไว้เป็น ด้านเหนือ (N), ด้านใต้ (S), ด้านตะวันตก (W), ด้านตะวันออก (E), ด้านหน้า (F) และ ด้านหลัง (B) และเช่นเดียวกับแผ่นแวงไทล์ คือลูกบาศก์แวงคิวก์ไม่สามารถหมุนหรือกลับทิศทางได้ อีกทั้งการเชื่อมต่อแวงคิวก์เข้าด้วยกัน ต้องให้ด้านที่ต่อเชื่อมมีสีเหมือนกัน ดังแสดงในภาพที่ 2.9 เป็นโครงสร้างและลักษณะของลูกบาศก์แวงคิวก์

จากภาพที่ 2.9(ก) แสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของลูกบาศก์ที่แยกออกในระบบพิกัดแบบสองมิติ โดยมีตำแหน่งการเรียงลำดับหน้าแต่ละด้านของลูกบาศก์ เป็น WENSFB ซึ่งลำดับของหน้านี้ สามารถใช้เป็นหมายเลขดัชนีอ้างอิง เพื่อระบุชื่อของลูกบาศก์แวงคิวก์ได้ ดังแสดงในภาพที่ 2.9(ข) การกำหนดสีแต่ละหน้าของแวงคิวก์ จะพิจารณาจากด้านที่ใช้ต่อเชื่อมกัน ซึ่งจะมีลักษณะเป็นคู่สีคือ สีด้านเหนือคู่กับสีด้านใต้ (NS), สีด้านตะวันตกคู่กับสีด้านตะวันออก (WE) และสีด้านหน้าคู่กับสีหลัง (FB) ดังนั้นหากกำหนดให้แต่ละด้านที่คู่กันมีจำนวนสีเป็น n แสดงได้ว่ารูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มลูกบาศก์แวงคิวก์ สำหรับสีด้านเหนือ-ตะวันตก-หน้า(NWF) สามารถมีได้ n^3 รูปแบบซึ่งในภาพที่ 2.9(ข) เป็นการกำหนดให้แต่ละคู่ใช้สองสี เพื่อสร้างลูกบาศก์แวงคิวก์จำนวน 16 ลูกบาศก์ และดังแสดงในภาพที่ 2.9(ค) เป็นการแสดงตัวอย่างภาพตัดขวางรูปแบบของลูกบาศก์แวงคิวก์ในแบบสามมิติ

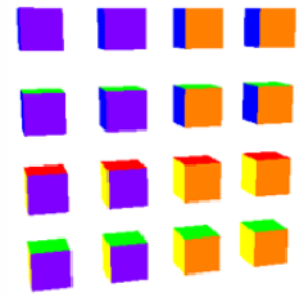
ภาพที่ 2.9

โครงสร้างและลักษณะลูกบาศก์แวงคิวก์สามมิติ

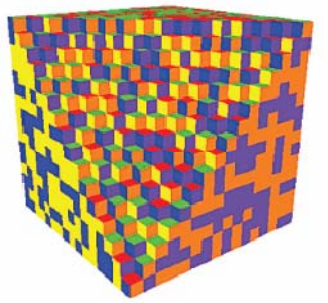
(ก) ตำแหน่งหมายเลขหน้าลูกบาศก์แวงคิวก์ทั้ง 6 ด้าน



(ข) หมายเลขดัชนีและการให้สีกลุ่มลูกบาศก์แวงคิวก์ แบบหน้าละสองสี



(ค) กลุ่มลูกบาศก์แวงคิวก์แบบสามมิติจำนวน 16 ลูกบาศก์



(ง) ลักษณะลายลูกบาศก์แวงคิวก์ที่มีระยะไม่ซ้ำกัน

การปูลายของแวงคิวก์ พัฒนารูปแบบมาจากวิธีการปูลายของแวงไทล์ โดยแวงคิวก์มีทิศทางการปูลายจากตำแหน่งด้านตะวันตกไปด้านตะวันออก จากตำแหน่งด้านเหนือไปด้านใต้ และจากตำแหน่งด้านหน้าไปด้านหลัง ซึ่งการเลือกลูกบาศก์แวงคิวก์มาวางต้องคำนึงถึงสีของหน้าทั้งสามด้านคือ ด้านเหนือ (N) ด้านตะวันตก (W) ด้านหน้า (F) ต้องมีสีเหมือนกับหน้าด้านใต้ (S) ด้านตะวันออก (E) ด้านหลัง (B) ของลูกบาศก์แวงคิวก์ที่วางไปก่อนหน้าตามลำดับ

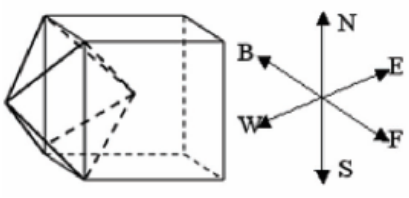
การปูลายของแวงคิวก์เริ่มที่มุมด้านตะวันตกเฉียงเหนือหน้าสุด (NWF) ของระนาบชั้นแรกในพื้นที่สามมิติ ซึ่งวิธีการปูลายสำหรับระนาบชั้นแรกในพื้นที่สามมิติ มีวิธีการเหมือนการปูลายสองมิติของแวงไทล์ คือพิจารณาเลือกลูกบาศก์แวงคิวก์ให้มีสีด้านเหนือ-ใต้, ด้านตะวันตก-ตะวันออก (NSWE) มีสีเหมือนกันในการปูลาย จากนั้นทำการปูลายในระนาบชั้นที่เหลือถัดไปของ

พื้นที่สามมิติ โดยเพิ่มเงื่อนไขการพิจารณาให้ลูกบาศก์แวงคิวก์มีสีด้านหน้า (F) เหมือนกับสีด้านหลัง (B) ของลูกบาศก์แวงคิวก์ในตำแหน่งเดียวกันที่ว่างไว้ในระนาบชั้นก่อนหน้า จากเงื่อนไขการพิจารณาสีของลูกบาศก์แวงคิวก์ที่ด้านเหนือ-ตะวันตก-หน้า (NWF) ซึ่งต้องมีลูกบาศก์อย่างน้อยหนึ่งลูก ที่มีสีตามที่ต้องการทั้งสามด้าน ดังนั้นสีที่ใช้ในแต่ละด้านต้องมีอย่างน้อยด้านละสองสีขึ้นไปเพื่อทำให้การปูลายมีระยะของลายไม่ซ้ำกัน

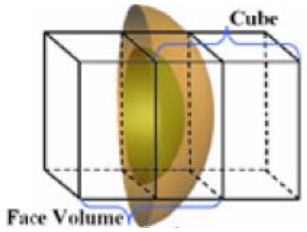
ในกรณีที่ลูกบาศก์แวงคิวก์มีสีด้านเหนือ-ตะวันตก-หน้า (NWF) เหมือนกันมากกว่าหนึ่งลูกบาศก์ การเลือกจะใช้วิธีสุ่มเพื่อทำให้เกิดความหลากหลายของลวดลาย หากต้องการให้มีลูกบาศก์จำนวน m ที่มีสีด้านเหนือ-ตะวันตก-หน้า (NWF) ไม่ซ้ำกัน จำนวนลูกบาศก์ทั้งหมดที่ต้องใช้คือ $m \times n^3$ ลูกบาศก์ ดังแสดงในภาพที่ 2.9(ง) เป็นการแสดงตัวอย่างภาพตัดขวางพื้นที่สามมิติโดยลักษณะลูกบาศก์แวงคิวก์มีระยะของลายไม่ซ้ำกัน ซึ่งสร้างขึ้นมาจาก 16 ลูกบาศก์ โดยแต่ละหน้าของลูกบาศก์แวงคิวก์มีจำนวนสองสีและในแต่ละรูปแบบของสีด้านเหนือ-ตะวันตก-หน้า (NWF) มีสองรูปแบบให้เลือก

การสังเคราะห์ลายผิวสามมิติของแวงคิวก์ พัฒนามาจากการสังเคราะห์ลายผิวของแวงไทล์ ซึ่งมีประเด็นสำคัญอยู่ที่ สีที่กำกับในแต่ละหน้าของลูกบาศก์แวงคิวก์ ถูกใช้สำหรับทำการปูลายให้มีลักษณะระยะของลายไม่ซ้ำกันเท่านั้น แต่เนื้อหาหรือข้อมูลที่อยู่ภายในลูกบาศก์นั้นสามารถกำหนดลักษณะของลายผิวสามมิติได้ตามต้องการ

ภาพที่ 2.10
การประสานหน้าลูกบาศก์แวงคิวก์



(ก) แสดงวัตถุทรงแปดหน้าเฉพาะด้านตะวันตกของลูกบาศก์แวงคิวก์



(ข) การประสานลูกบาศก์โดยใช้ตัวผิวหน้าสามมิติร่วมกับรูปทรงเชิงวงรีสองวง

ในปี ค.ศ. 2004 บทความของ (Lu, et al., 2004) และผลงานของ (Lu, et al., 2007) ได้ใช้วัตถุทรงแปดหน้า ทำหน้าที่เป็นตัวประสานในแต่ละหน้าของลูกบาศก์แวงคิวก์ ซึ่งลูกบาศก์หนึ่งลูกจะมีวัตถุทรงแปดหน้าอยู่ 6 ชิ้น และแต่ละชิ้นจะวางอยู่ในแต่ละหน้าของลูกบาศก์ ดังแสดงในภาพที่ 2.10(ก) เป็นการแสดงเฉพาะวัตถุทรงแปดหน้า สำหรับการประสานด้านตะวันตกของลูกบาศก์แวงคิวก์ หากกำหนดให้กลุ่มของลูกบาศก์แวงคิวก์ มีสีด้านเหนือ (N) ซึ่งเหมือนกับสีด้านใต้ (S) อยู่ *n* สี จะต้องกำหนดให้มีวัตถุทรงแปดหน้าจำนวน *n* ชิ้นตามแต่ละสีของตัวอย่างลายผิวสามมิติ ซึ่งข้อกำหนดนี้ถูกนำไปใช้สำหรับทิศทางด้านตะวันตก-ตะวันออก (W/E) และทิศทางด้านหน้า-หลัง (F/B) ด้วยเช่นกัน โดยวัตถุทรงแปดหน้าซึ่งทำหน้าที่ประสานในแต่ละหน้าของลูกบาศก์แวงคิวก์เข้าด้วยกันตามสีที่กำหนดไว้ทั้ง 6 ชิ้นจะถูกเย็บในลักษณะมุมต่อมุม ที่ได้จากการหาระนาบตัดระหว่างกันทั้งสี่ด้าน

ผลงานของ (Lu & Ebert, 2005) ได้ปรับปรุงตัวประสานในแต่ละหน้าของลูกบาศก์แวงคิวก์ให้ง่ายขึ้นโดยแทนที่วัตถุทรงแปดหน้าด้วยตัวผิวหน้าสามมิติ (Face Volume) ซึ่งมีขนาดเทียบเท่ากับขนาดของลูกบาศก์แวงคิวก์ และทำหน้าที่เช่นเดียวกับวัตถุทรงแปดหน้า โดยที่ตัวผิวหน้าสามมิตินั้น ได้เปลี่ยนรูปแบบของปัญหา จากการสังเคราะห์ซึ่งเกิดขึ้นที่หน้าของลูกบาศก์มาเป็นการสังเคราะห์ที่เกิดขึ้นภายในตัวลูกบาศก์ ทำให้การสังเคราะห์ไม่จำเป็นต้องดำเนินการตามลักษณะรูปทรงของลายผิว ดังนั้นจึงเกิดการใช้รูปทรงเชิงวงรีครึ่งซีกสองวงมากำหนดขอบเขตของการเย็บรอยต่อระหว่างลูกบาศก์ที่ถูกสุ่มเลือกไว้ กับตัวผิวหน้าสามมิติ เพื่อทำหน้าที่ประสานในแต่ละด้านของลูกบาศก์แวงคิวก์ ดังแสดงในภาพที่ 2.10(ข) เป็นขบวนการซึ่งเกิดขึ้นในด้านตะวันตก (W) ของลูกบาศก์ โดยการสังเคราะห์ลายผิวสามมิติ ที่เกิดขึ้นภายในลูกบาศก์นั้น โดยใช้ขั้นตอนวิธีของการตัดกราฟแบบสูง-ผ่าน(ต่ำ-ตัด) และขบวนการนี้จะกระทำวนซ้ำในแต่ละหน้าของลูกบาศก์ทั้งหมดจนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนสะสม E_i ตลอดแนวการตัดที่อยู่ภายในลูกบาศก์มีค่าต่ำกว่าระดับกั้นที่กำหนดไว้

จากผลงานวิจัยและงานเขียนที่เกี่ยวข้องกับ การจำลองก้อนเมฆเชิงฟิสิกส์โดยสมการเนฟเออร์สโตรกส์ และการจำลองพลศาสตร์ของไหลด้วยแบบจำลองแลตทิซ-โบทสแมนน์ ซึ่งล้วนเป็นแบบจำลองที่ต้องใช้เวลาในการคำนวณสูง เพื่อผลลัพธ์ของความแม่นยำในการจำลอง แต่สำหรับงานบางประเภทที่ไม่ต้องการความแม่นยำในทางฟิสิกส์สูง แต่ต้องการความเร็วในการแสดงผลลัพธ์โดยยังคงไว้ซึ่งลักษณะเชิงฟิสิกส์เช่นเดิม จึงเกิดแนวคิดในการผสมผสานการสังเคราะห์และการปูลายผิว ร่วมกับแบบจำลองก้อนเมฆ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ