รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

ภาคขยายของทฤษฎีบท Dixmier บนเมตริกซ์เหนือพีชคณิตซีสตาร์

โดย

นางสาวฐิตารีย์ วุฒิจิรัฐิติกาล

ธันวาคม 2554

รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

ภาคขยายของทฤษฎีบท Dixmier บนเมตริกซ์เหนือพีชคณิตซีสตาร์
Extension of Dixmier's Theorem to Matrices over C*-Algebras

ผู้วิจัย	**สังกัด**
นางสาวฐิตารีย์ วุฒิจิรัฐิติกาล	**ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติ และคอมพิวเตอร์**

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากกองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยอุบลราชธานี
ประจำปีงบประมาณ 2553

บทสรุปผู้บริหาร

ชื่อโครงการวิจัย ภาคขยายของทฤษฎีบท Dixmier บนเมตริกซ์เหนือพีชคณิตซีสตาร์

ผู้วิจัย นางสาวฐิตารีย์ วุฒิจิรัฐิติกาล

ที่ทำงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติ และคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 มีนาคม 2553 - 28 กุมภาพันธ์ 2554

ความเป็นมา/ ปัญหาในการวิจัย ในปี ค.ศ.1929 von Neumann ได้เริ่มศึกษาเกี่ยวกับ Operator Algebras (ศาสตร์ในสาขาคณิตศาสตร์) ซึ่งเป็นรากฐานที่สำคัญในทฤษฎีควอนตัม(ทางฟิสิกส์) และหลังจากนั้นเป็นต้นมา นักวิจัยได้เห็นถึงความสำคัญของการศึกษา Operator Theory, Operator Algebras และการศึกษาในด้านนี้ก็เริ่มแพร่หลายมากขึ้น

พีชคณิตซีสตาร์ เป็นหนึ่งใน Operator Algebras ซึ่งมีระบบโครงสร้างที่สวยงามภายใน (ให้ลักษณะเฉพาะทางนามธรรม ใน Operator Algebras) และสิ่งสำคัญที่จะช่วยให้เราเข้าใจถึงโครงสร้างของ Operator Algebras มากขึ้น คือ การศึกษาปริภูมิ dual ของฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีขอบเขตของมัน (its dual space of bounded linear functionals) และเนื่องจาก Dixmier (นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส) ได้สร้างทฤษฎีบทที่น่าสนใจเกี่ยวกับการศึกษาโครงสร้างของ dual ของพีชคณิตของตัวดำเนินการมีขอบเขตทั้งหมดบนปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้นสำหรับโครงงานวิจัยนี้ เราสนใจที่จะขยายผลของทฤษฎีบทของ Dixmier ไปบนเมตริกซ์เหนือพีชคณิตซีสตาร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย เพื่อหาภาคขยายของทฤษฎีบท Dixmier บนเมตริกซ์เหนือพีชคณิตซีสตาร์

วิธีดำเนินการวิจัย ตั้งสมมุติฐานแล้วพิสูจน์โดยศึกษาค้นคว้าข้อมูลจากงานวิจัยทางคณิตศาสตร์

ผลการวิจัย/ข้อค้นพบ ได้ภาคขยายของทฤษฎีบท Dixmier บนเมตริกซ์เหนือพีชคณิตซีสตาร์ พร้อมทั้งได้บทพิสูจน์ทฤษฎีบท Dixmier ดั้งเดิมในแบบที่กระชับกว่ารูปแบบเก่าที่เคยพิสูจน์ไว้

ข้อเสนอแนะ นำผลการวิจัยที่ได้นี้ไปต่อยอดในการทำวิจัยต่อไป

การนำไปใช้ประโยชน์ ขณะนี้ผู้วิจัยกำลังทำการวิจัยที่ได้รับทุนจากศูนย์ความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ และได้ความรู้ที่ได้จากการทำวิจัยนี้ไปช่วยเป็นพื้นฐานทำให้การดำเนินงานเป็นไปได้สะดวกขึ้น

บทคัดย่อภาษาไทย

ทฤษฎีบทของ Dixmier กล่าวว่า แต่ละฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขต f บนพีชคณิตของตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตบนปริภูมิฮิลเบิร์ตแยกกันได้ เป็นผลบวกตรงของเทรสฟังก์ชันนัล g และฟังก์ชันนัลเอกฐาน h ที่ซึ่ง $\|f\| = \|g\| + \|h\|$ ในงานวิจัยนี้เราขยายทฤษฎีบทของ Dixmier โดยใช้วิธีมูลฐานในการสร้างปริภูมิบานาคของเมทริกซ์ซีสตาร์ซึ่งบรรจุปริภูมิย่อยปิด เมื่อเราแทนพีชคณิตซีสตาร์ด้วยจำนวนเชิงซ้อนในงานวิจัยนี้ เราจะได้การพิสูจน์ทฤษฎีบทของ Dixmier ดั้งเดิมและเทรสเอกลักษณ์ ในรูปแบบที่ง่ายต่อการเข้าใจ โดยไม่ต้องใช้เครื่องมือ ตัวดำเนินการเชิงทฤษฎีที่ใช้ในการพิสูจน์แบบเก่า

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ

A theorem of Dixmier states that each bounded linear functional f on the algebra of bounded linear operators on a separable Hilbert space is a direct sum of a trace functional g and a singular functional h, vanishing on the compact operators, such that $\|f\| = \|g\| + \|h\|$. We use elementary methods to construct, via the state space of a C^* -algebra, a Banach space of C^* matrices that contains a closed subspace on which a version of Dixmier's theorem is proved. When the C^* -algebra is taken to be the complex numbers our approach gives elementary and transparent proofs of Dixmier's theorem and the trace formula tr(AB) = tr(BA), without using the operator theoretical machineries used in the known proofs.

เนื้อหางานวิจัย

1. สัญลักษณ์ที่ใช้ในงานวิจัย (Notations)

ในงานวิจัยนี้เรากำหนดให้

1.1 $\mathscr{A}$ เป็นพีชคณิตซีสตาร์ที่มีเอกลักษณ์ 1 และปริภูมิสถานะ $s(\mathscr{A})$

1.2 $\mathscr{A}^{\#}$ เป็นปริภูมิคู่กันของ $\mathscr{A}$

1.3 สำหรับแต่ละเมทริกซ์ $B = \lfloor b_{jk} \rfloor$ เมื่อ $b_{jk} \in \mathscr{A}$ และแต่ละ $\psi \in s(\mathscr{A})$ เราให้ $\tilde{\psi}(B)$ แทนคอมเพล็กซ์เมทริกซ์ $\lfloor \psi(b_{jk}) \rfloor$

1.4 $\mathscr{B}(l^2)$ เป็นปริภูมิของตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตบนปริภูมิลำดับฮิลเบิร์ต l^2

1.5 $\mathscr{M}$ แทนปริภูมิของเมทริกซ์ $A = \lfloor a_{jk} \rfloor$ เหนือ $\mathscr{A}$ ทั้งหมดที่ซึ่ง

$$\tilde{\varphi}(A) := \lfloor \varphi(a_{jk}) \rfloor \in \mathscr{B}(l^2) \quad \text{ทุก } \varphi \in s(\mathscr{A}) \quad \text{และ}$$

การส่ง $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(A) = \lfloor \varphi(a_{jk}) \rfloor$ ต่อเนื่องจาก $s(\mathscr{A})$ (ด้วยวีคสตาร์ทอพอโลยี) ไปยัง $\mathscr{B}(l^2)$ (ด้วยนอร์มทอพอโลยี)

1.6 ให้ $A \in \mathscr{M}$ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n

1.6.1 ให้ $A_{\underline{n}|}$ แทน $n-th$ compression matrix ของ A ที่ซึ่งสมาชิกในตำแหน่ง $(j,k)-th$ ของ $A_{\underline{n}|}$ คือ สมาชิกตัวเดียวกันกับสมาชิกในตำแหน่ง $(j,k)-th$ ของ A เมื่อ $1 \le j,k \le n$ และจะเป็น 0 ที่ตำแหน่งอื่นๆ

1.6.2 ให้ $A_{\underline{n}}$ ($A_{n|}$ ตามลำดับ) แทนด้วยเมทริกซ์ที่ซึ่ง n แถวแรก (n หลักแรก ตามลำดับ) เหมือนกับ A และแถวอื่น (หลักอื่น ตามลำดับ) ที่เหลือเป็น 0

1.6.3 ให้ $A_{\overline{n}}$ ($A_{|n}$ ตามลำดับ) แทนด้วยเมทริกซ์ที่ซึ่ง n แถวแรก (n หลักแรก ตามลำดับ) เป็น 0 และแถวอื่น (หลักอื่น ตามลำดับ) ที่เหลือ เหมือนกับ A

1.7 $\mathscr{K}$ แทนปริภูมิของ $A \in \mathscr{M}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า $\|A - A_{\underline{n}}\| = \|A_{\overline{n}}\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

1.8 $\mathscr{K}(l^2)$ แทนไอดีลของตัวดำเนินการกระชับบน l^2

1.9 $\mathscr{K}^{\perp}$ แทนปริภูมิย่อยของ $\mathscr{M}^{\#}$ ประกอบด้วย ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน $\mathscr{M}$ ซึ่งแวนิช บน $\mathscr{K}$

2. ผลลัพธ์เบื้องต้น (Preliminary Results)

ประพจน์ 2.1 $\mathscr{M}$ เป็นปริภูมิบานาค ด้วยนอร์ม $\|A\| = \sup\limits_{\varphi \in s(\mathscr{A})} \|\tilde{\varphi}(A)\|$

ประพจน์ 2.2 $\mathscr{K}$ เป็นปริภูมิย่อยปิดแท้ของ $\mathscr{M}$

ประพจน์ 2.3 ให้ $A \in \mathscr{M}$ ที่สอดคล้อง $A = A_{N|}$ ($A = A_{\underline{N}}$ ตามลำดับ) สำหรับบางจำนวนนับตรึง N แล้วจะได้ว่า $A \in \mathscr{K}$ และ $\left\|A - A_{\underline{\upsilon}|}\right\| \to 0$ เมื่อ $\upsilon \to \infty$

ประพจน์ 2.4 ให้ $A = \lfloor a_{jk} \rfloor$ เป็นเมทริกซ์เหนือ $\mathscr{A}$

(1) $A \in \mathscr{K}$ ก็ต่อเมื่อ การส่ง $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(A)$ ต่อเนื่องจาก $s(\mathscr{A})$ ไปยัง $\mathscr{K}(l^2)$

(2) $A \in \mathscr{K}$ ก็ต่อเมื่อ $A^* = \left[a^*_{jk}\right]^T \in \mathscr{K}$

(3) ถ้า $A \in \mathscr{M}$ แล้ว $A \in \mathscr{K}$ ก็ต่อเมื่อ $\left\|A - A_{n|}\right\| = \left\|A_{|n}\right\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

3. The Dual of $\mathcal{K}$

บทตั้ง 3.1 ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิคู่กัน $X^{\#}$ ของปริภูมิบานาค X ที่ซึ่ง $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ลู่เข้า สำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $f \in X^{\#}$

ประพจน์ 3.2 สำหรับแต่ละ $f \in \mathcal{K}^{\#}$ จะมีเมทริกซ์ $\lfloor f_{jk} \rfloor$ เมื่อ $f_{jk} \in \mathcal{A}^{\#}$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นที่ $f(A) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(a_{jk})$ สำหรับทุก $A = \lfloor a_{jk} \rfloor \in \mathcal{K}$

ในทางกลับกัน แต่ละเมทริกซ์ $\lfloor g_{jk} \rfloor$ เหนือ $\mathcal{A}^{\#}$ ที่มีสมบัติว่า $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{jk}(a_{jk})$ ลู่เข้าสำหรับทุก $A = \lfloor a_{jk} \rfloor \in \mathcal{K}$ จะกำหนดฟังก์ชันนัลเชิงเส้นจำกัด $f(A) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(a_{jk})$ ($A = \lfloor a_{jk} \rfloor \in \mathcal{K}$) บน $\mathcal{K}$

นอกจากนี้ ในกรณีนี้ เราได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{jk}(a_{jk})$ ลู่เข้า และ

$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{jk}(a_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{jk}(a_{jk})$ สำหรับทุก $\lfloor a_{jk} \rfloor \in \mathcal{K}$

ประพจน์ 3.3 สำหรับแต่ละ $f = [f_{jk}] \in \mathcal{K}^{\#}$ และแต่ละ $A = \lfloor a_{jk} \rfloor \in \mathcal{M}$ จะได้ว่าทั้ง $\hat{f}(A) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(a_{jk})$ และ $g(A) := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_{jk}(a_{jk})$ ลู่เข้า และมีผลรวมเหมือนกัน นอกจากนี้ เราได้ว่า $\hat{f}$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน $\mathcal{M}$ ด้วยนอร์ม $\|\hat{f}\|_{\mathcal{M}^{\#}} = \|f\|_{\mathcal{K}^{\#}}$

4. ผลลัพธ์หลัก (The Main Theorem)

ทฤษฎีบท 4.1 สำหรับแต่ละ $f \in \mathcal{M}^{\#}$ จะมี $g \in \hat{\mathcal{K}}^{\#}$ และ $h \in \mathcal{K}^{\perp}$ เพียงคู่เดียวเท่านั้นที่ $f = g + h$ และ $\|f\| = \|g\| + \|h\|$

<u>**หมายเหตุ**</u> ดูวิธีการพิสูจน์และรายละเอียดเพิ่มเติมที่บทความสำหรับการเผยแพร่

ภาคผนวก

กิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการนำผลจากโครงการไปใช้ประโยชน์

เนื่องจากขณะนี้ผู้วิจัยได้รับทุนวิจัยจากศูนย์ความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโครงการที่กำลังทำวิจัยนี้เป็นการต่อยอดจากกการทำวิทยานิพนธ์ในระดับปริญญาเอก และส่วนหนึ่งได้ความรู้ที่ได้จากการทำวิจัยที่ได้รับทุนวิจัยจากมหาวิทยาลัยอุบลราชธานีนี้ไปช่วยเป็นพื้นฐานทำให้การดำเนินงานเป็นไปได้สะดวกขึ้น

ตารางเปรียบเทียบวัตถุประสงค์ กิจกรรมที่วางแผนไว้ กิจกรรมที่ดำเนินการมา และผลที่ได้รับตลอดโครงการ

กิจกรรม	ช่วงเวลา (เดือน)												ผลงานที่คาดว่าจะได้จากกิจกรรม	ผลการดำเนินงาน
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1. การเตรียมงานวิจัย/ทบทวนศึกษาเอกสาร	/	/	/											
2. กำหนดแผนการ/วิธีการดำเนินงานวิจัย			/	/										
3. ดำเนินงานวิจัย/เก็บข้อมูล														
3.1 หาผลลัพธ์หรือสมบัติต่างๆที่ช่วยในการหาภาคขยายของทฤษฎีของ Dixmier				/	/	/	/	/					ได้ผลลัพธ์หรือสมบัติต่างๆที่เอื้อประโยชน์และช่วยในการหาภาคขยายของทฤษฎีของ Dixmier	ได้ผลลัพธ์หรือสมบัติต่างๆที่เอื้อประโยชน์และช่วยในการหาภาคขยายของทฤษฎีของ Dixmier
3.2 เข้าร่วมสัมมนา หรือเสนอผลงานทางวิชาการ						/	/	/					ได้แลกเปลี่ยนแนวคิดในการทำวิจัยกับนักวิจัยท่านอื่นๆ	ได้แลกเปลี่ยนแนวคิดในการทำวิจัยกับนักวิจัยท่านอื่นๆ
4.การวิเคราะห์														
4.1 นำผลลัพธ์ที่ได้จากข้อสาม มาใช้ในการพิสูจน์ภาคขยายของทฤษฎีของ Dixmier									/	/	/		ได้ภาคขยายของทฤษฎีของ Dixmier	ได้ภาคขยายของทฤษฎีของ Dixmier
5. จัดทำรายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์											/	/		

ผลที่ได้รับตลอดโครงการ

1. ได้ภาคขยายของทฤษฎีบท Dixmier พร้อมทั้งได้บทพิสูจน์ทฤษฎีบท Dixmier ดั้งเดิมในแบบที่กระชับกว่ารูปแบบเก่าที่เคยพิสูจน์ไว้
2. บทความวิจัยเรื่อง Functional decomposition of state induced C* -matrix spaces ซึ่งได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร Banach Journal of Mathematical Analysis ซึ่งเป็นวารสารวิชาการระดับนานาชาติที่มีค่า impact factor 0.328

รายงานการเงิน

รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
หมวดค่าใช้สอย	
ค่าใช้จ่ายในการเดินทางไปราชการต่างประเทศ	34,999.75
หมวดค่าวัสดุ	
ค่าวัสดุสำนักงาน	5,000.00.25
รวมงบประมาณทั้งสิ้น	**40,000.00**