## สารบัญ


| | |
|---|---|
| บทสรุปผู้บริหาร | 1 |
| บทคัดย่อภาษาไทย | 4 |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ | 4 |
| กิตติกรรมประกาศ | 4 |
| เนื้อหางานวิจัย | 5 |
| 1. บทนำ | 5 |
| 2. ความรู้เบื้องต้น | 6 |
| 3. ขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่ | 7 |
| 4. ทฤษฎีบทหลักและอภิปรายผล | 7 |
| 5. เอกสารอ้างอิง | 20 |
| ภาคผนวก | |
| ก. บทความวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ | 22 |
| ข. ตารางเปรียบเทียบวัตถุประสงค์ กิจกรรมที่วางแผนไว้ กิจกรรมที่ดำเนินการมา และผลที่ได้รับตลอดโครงการ | 23 |
| ค. รายงานการเงิน | 25 |

# บทสรุปผู้บริหาร

โครงการวิจัยได้ดำเนินการจนเสร็จสิ้นแล้วจึงขอสรุปรายงานผลการดำเนินงาน ดังต่อไปนี้

## 1. ข้อมูลทั่วไป

**1.1 ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย):** ขั้นตอนการทำซ้ำแบบใหม่พร้อมความคลาดเคลื่อนเพื่อหาจุดตรึงร่วมสำหรับการส่งแบบ asymptotically quasi-nonexpansive nonself-mappings ในปริภูมิบานาค

**(ภาษาอังกฤษ):** Common fixed points of a new three-step iteration with errors of asymptotically quasi-nonexpansive nonself-mappings in Banach spaces.

**ลักษณะของโครงการวิจัย** เป็นโครงการวิจัยใหม่ ประเภทการวิจัยพื้นฐาน สาขาวิทยาศาสตร์กายภาพและคณิตศาสตร์

**1.2 ผู้รับผิดชอบโครงการวิจัย**

**หัวหน้าโครงการวิจัย:** ผศ. ดร. อุทิศ อินทร์ประสิทธิ์

**ผู้ร่วมโครงการวิจัย:** ดร. หทัยกาญจน์ วัฒนทวีกุล

**หน่วยงาน:** ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

**1.3 งบประมาณที่ได้รับการจัดสรร:** ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยของมหาวิทยาลัยอุบลราชธานี ระยะเวลา 1 ปี ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2552 ถึงวันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2553 เป็นจำนวน 112,200 บาท แบ่งเป็นค่าดำเนินการ 102,000 บาท และค่าสาธารณูปโภค 10,200 บาท

## 2. ความสำคัญของปัญหาวิจัย

ทฤษฎีจุดตรึง (Fixed Point Theory) เป็นแขนงหนึ่งของสาขาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis) ซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษา และวิจัยกันอย่างกว้างขวางและต่อเนื่อง ทฤษฎีหรือองค์ความรู้ใหม่ที่ค้นพบนั้นนับว่ามีประโยชน์อย่างมากทั้งต่อการพัฒนาความรู้ทางวิชาการ และการนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (Basic Science) ซึ่งถือเป็นรากฐานในการพัฒนาประเทศ

การศึกษาวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีจุดตรึงและการประยุกต์จะมีอยู่สองลักษณะคือ การมีจริง (existence) และการมีเพียงหนึ่งเดียว (uniqueness) ของจุดตรึง และวิธีการหาและการประมาณค่าขอจุดตรึง นักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งได้สนใจศึกษาค้นคว้าหาทฤษฎีและเงื่อนไขของการมีจริงของจุดตรึงของการส่งแบบต่างๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมบัติทางเรขาคณิตของปริภูมิบานาค (Banach Space) ชนิด

ต่างๆ เมื่อมีทฤษฎีหรือเงื่อนไขรองรับการมีจริงของจุดตรึงของการส่งแล้ว ปัญหาที่น่าสนใจต่อไปก็คือ เราจะหาค่าของจุดตรึงนั้น (ซึ่งก็คือ คำตอบของสมการต่างๆ) ได้อย่างไร ปัญหานี้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจศึกษา คิดค้นระเบียบวิธีหรือขั้นตอนต่างๆที่ใช้ในการประมาณค่าของคำตอบ (จุดตรึง) นั้น เช่น ระเบียบวิธีหรือขั้นตอนการทำซ้ำของ Picard, Ishikawa และ Mann เป็นต้น และต่อมามีการพัฒนาขั้นตอนวิธีทำซ้ำต่างๆ ให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นเรื่อยๆ เพื่อเหมาะสมต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในแต่ละสถานการณ์ปัญหา

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยต้องการศึกษาและพัฒนาขั้นตอนการทำซ้ำแบบใหม่แบบสามขั้นตอนพร้อมความคลาดเคลื่อน สำหรับประมาณค่าของจุดตรึงร่วมของสามการส่งที่เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง (asymptotically quasi-nonexpansive nonself-mapping) ในปริภูมิบานาคที่มีสมบัติเป็นคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniform convexity) พร้อมทั้งให้ทฤษฎีบทของการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนด้วย ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นการขยายและปรับปรุงขั้นตอนวิธีทำซ้ำของผู้วิจัยหลายท่าน เช่น Suantai, Nilsrakoo and Saejung และ Xu and Noor เป็นต้น

**3. วัตถุประสงค์หลักของแผนงานวิจัย**

3.1 สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง

3.2 หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบเข้ม (weak and strong convergences) สู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง โดยใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นตามข้อ 3.1

**4. การดำเนินการวิจัยและระยะเวลาที่ใช้ดำเนินการ**

งานวิจัยนี้จะใช้เวลาในการดำเนินการวิจัยทั้งสิ้น 1 ปี โดยเริ่มดำเนินการในเดือนตุลาคม 2552 ถึงเดือนกันยายน 2553 และดำเนินการวิจัยที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

การดำเนินการวิจัย

4.1 ศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับจากเอกสารอ้างอิง และจากผู้เชี่ยวชาญ

4.2 ศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมในเรื่องทฤษฎีจุดตรึงจากเอกสารอ้างอิงและจากผู้เชี่ยวชาญ

4.3 ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ

4.4 สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง

4.5 หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อน และแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง

4.6 ปรึกษาผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่ได้และปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้อง

4.7 เขียนบทความเพื่อตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ

**5. การใช้จ่ายงบประมาณ**

ใช้จ่ายงบประมาณไปทั้งสิ้น 112,200 บาท โดยแยกเป็น

5.1 ค่าตอบแทนสำหรับผู้วิจัย (20%) เป็นเงิน 22,400 บาท

5.2 ค่าใช้สอยและวัสดุ (70 %) เป็นเงิน 79,600 บาท

5.3 ค่าสาธารณูปโภค (10%) เป็นเงิน 10,200 บาท

**6. ผลสำเร็จของโครงการวิจัย**

ได้ผลสำเร็จและความคุ้มค่าตามที่คาดไว้คือ ได้บทความวิจัย 1 เรื่องชื่อ Common Fixed Points of a New Three-Step Iteration with Errors of Asymptotically Quasi-Nonexpansive Nonself-Mappings in Banach spaces โดยได้รับการตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติชื่อ Journal of Nonlinear Analysis and Optimization (ดูภาคผนวก ก) และเพิ่มศักยภาพในการทำวิจัยของผู้ร่วมวิจัยคือ ดร. หทัยกาญจน์ วัฒนทวีกุล ทำให้มีคุณสมบัติในการขอทุนทำวิจัยจากแหล่งต่างๆ และมีนักศึกษาระดับปริญญาโทที่สนใจทำวิจัยด้านนี้ 2 คน คือ นายธีระพล เสาะแสวง และนางสาวธัญญาภรณ์ สมบัติ

## บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนแบบใหม่พร้อมคลาดเคลื่อนเพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งซึ่งเป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาคและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนในปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป ผลงานวิจัยนี้ได้ขยายและปรับปรุงขั้นตอนวิธีทำซ้ำของผู้วิจัยหลายท่าน เช่น Nilsrakoo และ Saejung [8], Suantai [15], Xu และ Noor [17] เป็นต้น

## Abstract

In this paper, we study a new three-step iterative scheme for approximating a common fixed point of three asymptotically quasi-nonexpansive nonself-mappings with errors and prove several strong and weak convergence results of the iterative sequences with errors in a uniformly convex Banach space. We also extend and improve some recent corresponding results in the literature.

## กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติและมหาวิทยาลัยอุบลราชธานีที่ได้สนับสนุนทุนอุดหนุนการวิจัยนี้

คณะผู้วิจัย

## เนื้อหางานวิจัย

### 1. บทนำ

ให้ $X$ เป็นปริภูมินอร์ม และ $C$ เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $X$ จะเรียกการส่ง $T: C \to C$ ว่า การส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ ( asymptotically nonexpansive ) ถ้ามีลำดับของจำนวนจริง $\{k_n\}$ ซึ่ง $k_{\mathrm{n}} \geq 1$ และ $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ ที่ทำให้ $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ และทุกจำนวนนับ $n$

ในปีค.ศ. 1972 Goebel และ Kirk ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $C$ เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปิด และมีขอบเขตของปริภูมิบานาคแบบเอกรูปแล้ว สำหรับทุกการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ส่งไปยังตัวมันเองจะมีจุดตรึงเสมอ จะเรียกการส่ง $T: C \to C$ ว่า การส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ (asymptotically quasi-nonexpansive) ถ้า $F(T) \neq \emptyset$ และมีลำดับของจำนวนจริง $\{k_n\}$ ซึ่ง $k_{\mathrm{n}} \geq 1$ และ $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ ที่ทำให้ $\|T^n x - q\| \leq k_n \|x - q\|$ สำหรับทุกๆ $x \in C, q \in F(T), n \geq 1$ โดยที่ $F(T)$ เป็นเซตของจุดตรึงของ $T$ จะเรียกการส่ง $T$ ว่า $L$ ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป (uniformly L-Lipschitzian) ถ้ามีค่าคงตัวบวก $L$ ที่ทำให้ $\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ และทุก $n \geq 1$

ในปีค.ศ. 2000 Noor [9] ได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนและศึกษาการประมาณค่าผลเฉลยของการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต

Glowinski และ Tallec [4] ได้ประยุกต์ขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของปัญหา elastoviscoplasticity และปัญหาค่าเฉพาะ (eigenvalue)

ในปีค.ศ. 2006 Bnouhachem และคณะ [1] ได้พิสูจน์ให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนดีกว่าขั้นตอนวิธีทำซ้ำสองขั้นตอนและหนึ่งขั้นตอนในการหาคำตอบของอสมการการแปรผัน นอกจากนั้น ขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนนี้ยังช่วยในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอีกด้วย [9,10,11]

Khan และ Takahashi [5] ได้ประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับสองการส่งโดยใช้ modified Ishikawa iteration ต่อมา Shahzad และ Udomene [14] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับสองการส่งโดยใช้ modified Ishikawa iteration [2,6,13,14]

ในงานวิจัยนี้จะสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนแบบใหม่ และพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป ซึ่งผลงานวิจัยนี้ได้ขยายผลงานของ Nilsrakoo และ Saejung [8], Suantai [15], Xu และ Noor [17]

## 2. ความรู้เบื้องต้น

ให้ $X$ เป็นปริภูมินอร์มและ $C$ เป็นเซตย่อยของ $X$ จะเรียก $C$ ว่าเป็นเซตการหด (retract) ของ $X$ ถ้ามีการส่งที่ต่อเนื่อง $P: X \to C$ ที่ทำให้ $Px = x$ สำหรับทุกๆ $x \in C$ จะเรียกการส่ง $P: X \to C$ ว่า การหดตัว (retraction) ถ้า $\mathrm{P}^2 = P$ เราจะเห็นได้ว่า ถ้าการส่ง $P$ เป็นการหดตัวแล้ว $Py = y$ สำหรับทุกๆ $y$ ที่อยู่ในเรนจ์ของ $P$ จะเรียกการส่ง $T: C \to X$ ว่า การส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ (asymptotically quasi-nonexpansive ) ถ้า $F(T) \neq \emptyset$ และมีลำดับของจำนวนจริง $\{k_n\}$ ซึ่ง $k_{\mathrm{n}} \geq 1$ และ $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ ที่ทำให้

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq L\|x - y\|$$

สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ และทุก $n \geq \mathbb{N}$

ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาค จะเรียก $X$ ว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล (Opial's condition) [12] ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ $x$ แบบอ่อน ขณะที่ $n \to \infty$ และ $x \neq y$ จะได้ว่า

$$\limsup_{\mathrm{n}\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{\mathrm{n}\to\infty} \|x_n - y\|$$

**บทตั้ง 1 [16]** ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}$ , $\{\delta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

$$a_{\mathrm{n}+1} \leq (1 + \delta_n)a_n + b_n \quad \forall\, n = 1,2, \ldots$$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ แล้ว

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีจริง และ

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ เมื่อ $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$

**บทตั้ง 2 [7]** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และสำหรับ $r > 0$ **,** $B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ เป็นบอลปิดของ $X$ แล้วจะมีฟังก์ชัน $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ คอนเวกซ์ ต่อเนื่องและ $g(0) = 0$ ที่ทำให้

$$\|\lambda x + \mu y + \xi z + \vartheta w\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 + \mu\|y\|^2 + \xi\|z\|^2 + \vartheta\|w\|^2 - \lambda\mu g(\|x - y\|)$$

สำหรับทุกๆ $x, y, z, w \in B_r$ และทุกๆ $\lambda, \mu, \xi, \vartheta \in [0,1]$ โดยที่ $\lambda + \mu + \xi + \vartheta = 1$

**บทตั้ง 3 [15]** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล (Opial's condition) และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของ $X$ ให้ $u, v \in X$ ที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\|$ และ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - v\|$ มีจริง ถ้าลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ และ $\{x_{m_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่งลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $u$ และ $v$ ตามลำดับ แล้ว $u = v$

### 3. ขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่

ให้ $C$ เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปิด และคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของ $X$ และการส่ง $P: X \to C$ เป็นการหดตัวของการส่งแบบไม่ขยาย และให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับและ $F$ เป็นเซตของจุดตรึงร่วมทั้งหมดของ $T_i$ นั่นคือ $F = \bigcap_{i=1}^{3} F(T_i)$ โดยที่

$$F(T_{\mathrm{i}}) = \{x \in C: T_{\mathrm{i}}x = x\}$$

สำหรับทุก $i = 1,2,3$ ให้ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned} z_n &= P[a_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - a_n - \delta_n) x_n + \delta_n u_n], \\ y_n &= P[b_n T_2 (PT_2)^{n-1} z_n + c_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - b_n - c_n - \sigma_n) x_n + \sigma_n v_n], \\ x_{n+1} &= P[\alpha_n T_3 (PT_3)^{n-1} y_n + \beta_n T_2 (PT_2)^{n-1} z_n + \gamma_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n \\ &\quad + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n) x_n + \rho_n w_n] \end{aligned} \tag{3.1}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ และ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$

ถ้า $\delta_{\mathrm{n}} = \sigma_{\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{n}} \equiv 0$ และ $T_1, T_2, T_3: C \to C$ ขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนใน (3.1) ลดรูปดังนี้

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{n}} &= a_n T_1^n x_n + (1 - a_n) x_n, \\ y_{\mathrm{n}} &= b_n T_2^n z_n + c_n T_1^n x_n + (1 - b_n - c_n) x_n, \\ x_{\mathrm{n+1}} &= \alpha_n T_3^n y_n + \beta_n T_2^n z_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$

ถ้า $T \coloneqq T_1 = T_2 = T_3$ แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Nilsrakoo and Saejung [8]

ถ้า $\gamma_n \equiv 0$ และ $T \coloneqq T_1 = T_2 = T_3$แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Suantai [15]

ถ้า $c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ และ $T \coloneqq T_1 = T_2 = T_3$แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Xu and Noor [17]

ถ้า $a_n = b_n = c_n \equiv 0$ แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำ ดังนี้

$$x_{\mathrm{n+1}} = \alpha_n T_3^n x_n + \beta_n T_2^n x_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n \tag{3.3}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$

### 4. ทฤษฎีบทหลักและอภิปรายผล

ผู้วิจัยได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนใน (3.1) และสร้างทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาค ก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีบทดังกล่าว ผู้วิจัยขอกล่าวถึงบทตั้งต่อไปนี้

**บทตั้ง 4** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ $C$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $X$ และ $C$ มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี $P$ เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset, k_n \geq 1, l_n \geq 1, m_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n, b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$ ให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดใน (3.1) จะได้ว่า

(i) $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ มีจริงสำหรับทุกๆ $q \in F$

(ii) ถ้าหนึ่งในเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง แล้ว $\lim_{n\to\infty}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$

(a) $\liminf_{n\to\infty} \beta_n > 0$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + \delta_n) < 1$

(b) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n$, $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$ และ

$0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + \delta_n) < 1$

(c) $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

(d) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} c_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$

(iii) ถ้า (a) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

หรือ (b) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$

แล้ว $\lim_{n\to\infty}\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| = 0$

(iv) ถ้า $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| = 0$$

**พิสูจน์** (i) ให้ $q \in F$ โดย (3.1) จะได้

$$\begin{aligned}
\|z_n - q\| &= \|P[a_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1 - a_n - \delta_n)x_n + \delta_nu_n] - P(q)\| \\
&\leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + (1 - a_n - \delta_n)\|x_n - q\| + \delta_n\|u_n - q\| \\
&\leq (1 + a_n(k_n - 1) - \delta_n)\|x_n - q\| + \delta_n\|u_n - q\| \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\|y_n - q\| &= \|P[b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n + c_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)x_n + \sigma_nv_n] - P(q)\| \\
&\leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\| + c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\| \\
&\quad +\sigma_n\|v_n - q\| \\
&\leq b_nl_n\|z_n - q\| + c_nk_n\|x_n - q\| + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\| + \sigma_n\|v_n - q\| \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

โดย (4.1) และ (4.2) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\| &= \|P[\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n+\beta_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n+\gamma_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)x_n+\rho_n w_n]-P(q)\| \\
&\le \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\|+\beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|+\gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\| \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|+\rho_n\|w_n-q\| \\
&\le \alpha_n m_n\|y_n-q\|+\beta_n l_n\|z_n-q\|+\gamma_n k_n\|x_n-q\| \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|+\rho_n\|w_n-q\| \\
&\le (\alpha_n m_n b_n l_n+\beta_n l_n)\|z_n-q\|+\alpha_n m_n c_n k_n\|x_n-q\| \\
&\quad +(\alpha_n m_n-\alpha_n m_n b_n-\alpha_n m_n c_n-\alpha_n m_n\sigma_n)\|x_n-q\| \\
&\quad +\alpha_n m_n\sigma_n\|v_n-q\|+\gamma_n k_n\|x_n-q\|+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\| \\
&\quad +\rho_n\|w_n-q\| \\
&\le \|x_n-q\|+((l_n-1)(\alpha_n m_n b_n+\beta_n)+(k_n-1)(\gamma_n+\alpha_n m_n c_n \\
&\quad +(\alpha_n m_n b_n l_n+\beta_n l_n)a_n)+\alpha_n(m_n-1))\|x_n-q\| \\
&\quad +(m_n l_n+l_n)\delta_n\|u_n-q\|+m_n\sigma_n\|v_n-q\|+\rho_n\|w_n-q\|
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $\{l_n\},\{m_n\},\{u_n\},\{v_n\},\{w_n\}$ มีขอบเขต ดังนั้น จะมีค่าคงตัว $K>0$ ที่ทำให้

$\alpha_n m_n b_n+\beta_n\le K, \gamma_n+\alpha_n m_n c_n+(\alpha_n m_n b_n l_n+\beta_n l_n)a_n\le K, (m_n l_n+l_n)\|u_n-q\|\le K,$
$m_n\|v_n-q\|\le K, \|w_n-q\|\le K$ และ $\alpha_n\le K$ สำหรับทุก $n\ge 1$ ดังนั้น

$$\|x_{n+1}-q\|\le(1+K((k_n-1)+(l_n-1)+(m_n-1)))\|x_n-q\|+K(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.3}$$

โดยบทตั้ง 1 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ มีจริง

ต่อไปจะพิสูจน์ (ii), (iii) และ (iv) จาก (i) จะได้ $\{x_n-q\},\{T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\},\{y_n-q\},$ $\{T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\},\{z_n-q\}$ และ $\{T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\}$ มีขอบเขต ให้

$$
\begin{aligned}
M=\max\{&\sup_{n\ge1}\|x_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|y_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\|, \\
&\sup_{n\ge1}\|z_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|u_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|v_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|w_n-q\|\}
\end{aligned}
$$

โดยบทตั้ง 2 จะมีฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ คอนเวกซ์ ต่อเนื่อง $g:[0,\infty)\to:[0,\infty)$ และ $g(0)=0$ ที่ทำให้

$$
\begin{aligned}
\|\lambda x+\mu y+\xi z+\vartheta w+\zeta s\|^2 &\le \lambda\|x\|^2+\mu\|y\|^2+\xi\|z\|^2+\vartheta\|w\|^2+\zeta\|s\|^2 \\
&\quad -\lambda\mu g(\|x-y\|)
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

สำหรับทุก $x,y,z,w,s\in B_r$ และทุก $\lambda,\mu,\xi,\vartheta,\zeta\in[0,1]$ ซึ่ง $\lambda+\mu+\xi+\vartheta+\zeta=1$ โดย (4.4) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|z_n-q\|^2 &= \|P[a_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n+(1-a_n-\delta_n)x_n+\delta_n u_n]-P(q)\|^2 \\
&\le \|a_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q)+(1-a_n-\delta_n)(x_n-q)+\delta_n(u_n-q)\|^2
\end{aligned}
$$

$$\leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + (1 - a_n - \delta_n)\|x_n - q\|^2 + \delta_n\|u_n - q\|^2$$
$$-a_n(1 - a_n - \delta_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$
$$\leq a_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + (1 - a_n - \delta_n)\|x_n - q\|^2 + \delta_n\|u_n - q\|^2$$
$$-a_n(1 - a_n - \delta_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$
$$\leq (1 + a_n(k_n^2 - 1) - \delta_n)\|x_n - q\|^2 + \delta_n\|u_n - q\|^2 \qquad (4.5)$$

และ

$$\|y_n - q\|^2 = \|P[b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n + c_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)x_n + \sigma_n v_n] - P(q)\|^2$$
$$\leq \|b_n(T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q) + c_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)(x_n - q)$$
$$+\sigma_n(x_n - q)\|^2$$
$$\leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\|^2 + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + \sigma_n\|v_n - q\|^2$$
$$-b_n(1 - b_n - c_n - \sigma_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)$$
$$\leq b_n {l_n}^2\|z_n - q\|^2 + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\|^2 + c_n k_n^2\|x_n - q\|^2$$
$$+\sigma_n\|v_n - q\|^2 - b_n(1 - b_n - c_n - \sigma_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|) \qquad (4.6)$$

โดย (4.4), (4.5) และ (4.6) จะได้

$$\|x_{n+1} - q\|^2 = \|P[\alpha_nT_3(PT_3)^{n-1}y_n + \beta_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n + \gamma_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)x_n + \rho_n w_n] - P(q)\|^2$$
$$\leq \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\|^2 + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\|^2 + \gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\|x_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n - q\|^2$$
$$-\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$\leq \alpha_n m_n^2\|y_n - q\|^2 + \beta_n l_n^2\|z_n - q\|^2 + \gamma_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n - q\|^2$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\|x_n - q\|^2$$
$$-\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$\leq \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + \alpha_n m_n^2(1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+\gamma_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\|z_n - q\|^2 + \alpha_n m_n^2\sigma_n\|v_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n - q\|^2$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n(1 - b_n - c_n - \sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)$$
$$-\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$\leq \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + \alpha_n m_n^2(1 - b_n - c_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+\gamma_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|^2 + (\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\|z_n - q\|^2$$
$$+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\big(a_n(k_n^2 - 1)\big)\|x_n - q\|^2 + (m_n^2 l_n^2 + l_n^2)\delta_n\|u_n - q\|^2$$
$$-(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)a_n(1 - a_n - \delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$

$$+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)$$
$$-\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)$$
$$=\|x_n-q\|^2+\big((k_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n)$$
$$+(l_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)+\alpha_n(m_n^2-1)\big)\,\|x_n-q\|^2$$
$$+(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)$$
$$-\beta_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)$$
$$-\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)$$

เพราะว่า $\{k_n\},\{l_n\},\{m_n\},\{u_n\},\{v_n\},\{w_n\}$ มีขอบเขตและ $\{x_n\}$ มีขอบเขต ดังนั้นจะมีค่าคงตัว $K_0>0$ ที่ทำให้

$(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n)\|x_n-q\|^2\le K_0,$

$(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)\|x_n-q\|^2\le K_0, \alpha_n\|x_n-q\|^2\le K_0, (m_n^2 l_n^2+l_n^2)\|u_n-q\|^2\le K_0,$

$m_n^2\|v_n-q\|^2\le K_0$ และ $\|w_n-q\|^2\le K_0$ สำหรับทุก $n\ge 1$ ดังนั้น

$$\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)\le\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.7}$$

$$\beta_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)\le\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.8}$$

$$\alpha_n m_n^2 b_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)\le\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.9}$$

$$\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)\le\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.10}$$

โดย (4.4) จะได้

$$\|y_n-q\|^2=\|P[b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n+c_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n+(1-b_n-c_n-\sigma_n)x_n+\sigma_n v_n]-P(q)\|^2$$
$$\le c_n\,\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\|^2+(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2$$
$$+b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|^2+\sigma_n\|v_n-q\|^2$$
$$-c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)$$
$$\le c_n k_n^2\|x_n-q\|^2(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2+b_n l_n^2\|z_n-q\|^2$$
$$+\sigma_n\|v_n-q\|^2-c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \tag{4.11}$$

โดย (4.4), (4.5) และ (4.11) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\|^2 &= \|P[\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n+\beta_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n+\gamma_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)x_n+\rho_n w_n]-\ P(q)\|^2 \\
&\le \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\|^2+\beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +\gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&\le \alpha_n m_n^2\|y_n-q\|^2+\beta_n l_n^2\|z_n-q\|^2+\gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&\le \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n-\alpha_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +\gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\|z_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\ g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&\le \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +\gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\big(a_n(k_n^2-1)\big)\ \|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\ g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&= \|x_n-q\|^2+\big((k_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n) \\
&\quad +(l_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)+\alpha_n(m_n^2-1)\big)\ \|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\ g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\ g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+\big(m_n^2-1\big)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+\big(m_n^2-1\big)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

โดย (4.4), (4.5) และ (4.6) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\|^2 &= \|P[\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n + \gamma_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)x_n + \rho_n w_n] - P(q)\|^2 \\
&\le \gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\|^2+\alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2+\beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|^2 \\
&\quad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\le \gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2\|y_n-q\|^2+\beta_n l_n^2\|z_n-q\|^2 \\
&\quad +\rho_n\|w_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\le \gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\beta_n l_n^2\|z_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2\|z_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +\alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\le \gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\|x_n-q\|^2+(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2 \\
&\quad +\big((\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n(k_n^2-1)\big)\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&= \|x_n-q\|^2+\big((k_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n) \\
&\quad +(l_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)+\alpha_n(m_n^2-1)\big)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

(ii) (a) ให้ $\liminf_{n\to\infty}\beta_n>0$ และ $0<\liminf_{n\to\infty}a_n\le\limsup_{n\to\infty}(a_n+\delta_n)<1$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก $n_0$ และ $\eta,\eta'\in(0,1)$ ที่ทำให้ $0<\eta<\beta_n, 0<\eta<a_n$ และ $a_n+\delta_n<\eta'<1$ สำหรับทุก $n\ge n_0$ โดย (4.8) จะได้

$$
\begin{aligned}
\eta^2(1-\eta')g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

สำหรับทุก $n\ge n_0$ จาก (4.15) สำหรับ $r\ge n_0$ จะได้

$$\sum_{n=n_0}^{r} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \le \frac{1}{\eta^2(1-\eta')}(\sum_{n=n_0}^{r}(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2)$$
$$+K_0\sum_{n=n_0}^{r}((k_n^2 - 1) + (l_n^2 - 1) + (m_n^2 - 1)$$
$$+\delta_n + \sigma_n + \rho_n))$$
$$\le \frac{1}{\eta^2(1-\eta')}(\|x_{n_0} - q\|^2 + K_0\sum_{n=n_0}^{r}((k_n^2 - 1)$$
$$+(l_n^2 - 1) + (m_n^2 - 1))) \qquad (4.16)$$

เพราะว่า $0 \le t^2 - 1 \le 2t(t-1)$ สำหรับทุก $t \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n^2 - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n^2 - 1) < \infty$, โดยอสมการ (4.16) ให้ $r \to \infty$ จะได้ $\sum_{n=n_0}^{\infty} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) < \infty$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) = 0$ เพราะว่า $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้และต่อเนื่องที่ 0 ซึ่ง $g(0) = 0$ จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$

ในทำนองเดียวกับ (ii) (a) และจาก (4.7), (4.14), (4.12), (4.13), (4.9) และ (4.10) จะได้ (ii) (b,c,d), (iii) (a,b) และ (iv) ตามลำดับ

**บทตั้ง 5** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ $C$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $X$ และ $C$ มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี $P$ เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \ne \emptyset, k_n \ge 1, l_n \ge 1, m_n \ge 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n$, $b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \ge 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n < \infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$ ให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดใน (3.1) ให้ $T_1, T_2, T_3$ เป็น $L$ ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป ถ้า $\lim_{n\to\infty}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| = 0$ แล้ว

(i) $\lim_{n\to\infty}\|T_1x_n - x_n\| = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\|T_2x_n - x_n\| = 0$ และ

(iii) $\lim_{n\to\infty}\|T_3x_n - x_n\| = 0$

**พิสูจน์** เพราะว่า

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|$$
$$+\gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \rho_n\|w_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้

$$\|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| \le \|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$
$$\le L\|x_{n+1} - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty \qquad (4.17)$$

โดย (4.17) จะได้

$$\|T_1x_n - x_n\| \le \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - T_1x_n\|$$
$$\le \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + L\|T_1(PT_1)^{n-2}x_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\|T_1x_n - x_n\| = 0$ ต่อไปจะพิสูจน์ (ii) เพราะว่า

$$\|z_n - x_n\| \le a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \delta_n\|u_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้

$$\|T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| \le \|T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1} - T_2(PT_2)^{n-1}x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - T_2(PT_2)^{n-1}x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$
$$\le L\|x_{n+1} - x_n\| + L\|z_n - x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น

$$\|T_2x_n - x_n\| \le \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - T_2x_n\|$$
$$\le \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - T_2(PT_2)^{n-1}x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + L\|T_2(PT_2)^{n-2}x_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\|T_2x_n - x_n\| = 0$ จะได้ (ii) ตามต้องการ

เนื่องจาก

$$\|y_n - x_n\| \le b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \sigma_n\|v_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

และ $\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| \to 0$ ขณะที่ $n \to \infty$ จะได้

$$\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\| \le \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - T_3(PT_3)^{n-1}x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|$$
$$\le L\|y_n - x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น

$$\|T_3(PT_3)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| \le \|T_3(PT_3)^{n-1}x_{n+1} - T_3(PT_3)^{n-1}x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - T_3(PT_3)^{n-1}x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq L\|x_{n+1}-x_n\| + L\|y_n - x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|$$
$$+\|x_{n+1}-x_n\| \to 0 \quad \text{ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้

$$\|T_3x_n - x_n\| \leq \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - T_3x_n\|$$
$$\leq \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\| + L\|T_3(PT_3)^{n-2}x_n - x_n\| \to 0 \quad \text{ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น จะได้ (iii) ตามต้องการ □

**ทฤษฎีบท 1** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ $C$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $X$ และ $C$ มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี $P$ เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset, k_n \geq 1,\ l_n \geq 1, m_n \geq 1$ , $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n, b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n < \infty,$ และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$ ให้ $T_1, T_2, T_3$ เป็น $L$ ลิฟชิทท์แบบเอกรูป ถ้าหนึ่งในสามการส่ง $T_i (i = 1,2,3)$ เป็นการส่งที่ต่อเนื่องบริบรูณ์ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) ต่อไปนี้

(C1) $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + \delta_n) < 1,$

$0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$ และ

$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n,\ \liminf_{n\to\infty} c_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$ และ

$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

(C3) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$ และ

$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n, \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

(C4) $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0,\ 0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + \delta_n) < 1$ และ

$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n, \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

(C5) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n, \liminf_{n\to\infty} \beta_n, \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ใน (1.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ $T_1, T_2$ และ $T_3$

**พิสูจน์** กำหนดให้การพิสูจน์สอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) โดยบทตั้ง 5 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|T_ix_n - x_n\| = 0$ สำหรับ $i = 1,2,3$ กำหนดให้หนึ่งในการส่ง $T_1, T_2$ และ $T_3$ ในที่นี้ให้

การส่ง $T_1$ เป็นการส่งที่ต่อเนื่องบริบูรณ์ เพราะว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$ จะมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ที่ทำให้ $\{T_1 x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ $q \in C$ เพราะว่า

$$\|x_{n_k} - q\| \leq \|T_1 x_{n_k} - x_{n_k}\| + \|T_1 x_{n_k} - q\|$$

จะได้ $\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k} - q\| = 0$ ดังนั้น $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ $q \in C$ โดยความต่อเนื่องของ $T_i$ จะได้ $T_i x_{n_k} \to T_i q$ ขณะที่ $k \to \infty$ เพราะว่า

$$\|T_i q - q\| \leq \|T_i x_{n_k} - T_i q\| + \|T_i x_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - q\| \to 0 \text{ ขณะที่ } k \to \infty$$

จะได้ $T_i q = q$ $(i = 1,2,3)$ ดังนั้น $q \in F$ โดยบทตั้ง 4 (i) จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ มีจริง ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\| = 0$ โดยบทตั้ง 4 จะได้

$$\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| \to 0 \text{ และ } \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น

$$\|y_n - x_n\| \leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \sigma_n\|v_n - x_n\| \to 0$$

และ

$$\|z_n - x_n\| \leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \delta_n\|u_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้ $\lim_{n\to\infty} y_n = q$ และ $\lim_{n\to\infty} z_n = q$ □

**ข้อสังเกต** ในทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ $T_1, T_2$ และ $T_3$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ส่งจาก $C$ ไปยัง $C$ และหนึ่งในการส่งสามการส่งมีความต่อเนื่องบริบูรณ์และ $T_1, T_2, T_3$ เป็น $L$ ลิฟชิทท์แบบเอกรูป และ $\delta_n = \sigma_n = \rho_n \equiv 0$ จะได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

(1) ถ้าลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ กำหนดโดย (3.2) นั่นคือ

$$\begin{aligned} z_n &= a_n T_1^n x_n + (1 - a_n)x_n, \\ y_n &= b_n T_2^n z_n + c_n T_1^n x_n + (1 - b_n - c_n)x_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_n T_3^n y_n + \beta_n T_2^n z_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)x_n \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1)-(C5) แล้วจะได้ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ลู่เข้าแบบเข็มสู่จุดตรึงร่วมของ $T_1, T_2$ และ $T_3$

(2) ถ้า $T \coloneqq T_1 = T_2 = T_3$ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1)-(C5) แล้วจะได้ผลลัพธ์ของ Nilsrakoo และ Saejung [8]

(3) ถ้า $T \coloneqq T_1 = T_2 = T_3$ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1), (C2), (C4) และ $\gamma_n \equiv 0$ แล้วจะได้ผลลัพธ์ของ Suantai [16]

(4) ถ้า $T \coloneqq T_1 = T_2 = T_3$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข (C1) และ $c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ แล้วจะได้ผลลัพธ์ของ Xu และ Noor [18]

(5) ถ้า $a_n = b_n = c_n \equiv 0$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข (C5) และลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (3.3) นั่นคือ

$$x_{\mathrm{n}+1} = \alpha_n T_3^n x_n + \beta_n T_2^n x_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ แล้วจะได้ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ $T_1, T_2$ และ $T_3$

ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคจะกล่าวว่าการส่งแบบ $T: X \to X$ ซึ่ง $F \neq \emptyset$ ว่าสอดคล้องเงื่อนไข A (condition A) ถ้ามีฟังก์ชันไม่ลด $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ซึ่ง $f(0) = 0, f(r) > 0$ สำหรับทุก $r \in (0, \infty)$ ที่ทำให้

$$\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$$

สำหรับทุก $x \in C$ โดยที่

$$d\big(x, F(T)\big) = inf\{\|x - p\| : p \in F(T)\}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทของการลู่เข้าแบบเข้มของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไข A

**ทฤษฎีบท 2** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ $C$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $X$ และ $C$ มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี $P$ เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset, k_n \geq 1, l_n \geq 1, m_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_{\mathrm{n}} + \delta_n$, $b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$ และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$ ให้ $T_1$ สอดคล้องกับเงื่อนไข A และ $T_2, T_3$ เป็น $L$ ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) ในทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ใน (3.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ $T_1, T_2$ และ $T_3$

**พิสูจน์** ให้ $q \in F$ โดยบทตั้ง 4 จะได้ $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\|x_n - q\|$ มีจริง ดังนั้น $\{x_n - q\}$ มีขอบเขต ดังนั้น จะมีค่าคงตัว $H$ ที่ทำให้ $\|x_n - q\| \leq \mathrm{H}$ สำหรับทุก $n \geq 1$ โดย (4.3) จะได้

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \|x_n - q\| + D_n \tag{4.18}$$

เมื่อ $D_{\mathrm{n}} = \mathrm{KH}\big((k_n - 1) + (l_n - 1) + (m_n - 1)\big) + K(\delta_n + \sigma_n + \rho_n) < \infty$ สำหรับทุก $n \geq 1$ โดยบทตั้ง 5 จะได้ $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\|x_n - T_i x_n\| = 0$ $(i = 1,2,3)$ เนื่องจาก $T_1$ สอดคล้องกับเงื่อนไข A

จะได้ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T_1)) = 0$ ต่อไปจะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T_1)) = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} D_n < \infty$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $n_0$ ที่ทำให้ $d(x_n, F(T_1)) < \varepsilon/4$ และ $\sum_{k=n_0}^{n} D_k < \varepsilon/2$ สำหรับทุก $n \geq n_0$ ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq n_0$ ดังนั้นเราสามารถหา $q^* \in F$ ที่ทำให้ $\|x_n - q^*\| < \varepsilon/4$ โดย (4.18) สำหรับ $m \geq 1$ จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - q^*\| + \|x_n - q^*\| \\ &\leq 2\|x_n - q^*\| + \textstyle\sum_{k=n}^{n+m-1} D_k \\ &= 2\|x_n - q^*\| + \textstyle\sum_{k=n_0}^{n+m-1} D_k < 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชีและลู่เข้า ให้ $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ เพราะว่า $d(x_n, F(T_1)) \to 0$ ขณะที่ $n \to \infty$ เป็นผลให้ $d(p, F(T_1)) = 0$ และดังนั้น $p \in F(T_1)$ ต่อไปจะแสดงว่า $p \in F(T_2) \cap F(T_3)$ เพราะว่า $T_2, T_3$ เป็น $L$ ลิฟชิทท์แบบเอกรูปและโดยบทตั้ง 5 จะได้

$$\begin{aligned}\|T_i p - p\| &\leq \|T_i x_n - T_i p\| + \|T_i x_n - x_n\| + \|x_n - p\| \\ &\leq L\|x_n - p\| + \|T_i x_n - x_n\| + \|x_n - p\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $T_i p = p$ $(i = 2,3)$ เพราะฉะนั้น $p \in F$ □

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จะเป็นทฤษฎีบทของการลู่เข้าแบบอ่อนของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล

**ทฤษฎีบท 3** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูปและสอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล และให้ $C$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $X$ และ $C$ มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี $P$ เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3 \colon C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}$, $\{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset$, $k_n \geq 1$, $l_n \geq 1$, $m_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n$, $b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n$ อยู่ใน $[0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $C$ ให้ $T_1, T_2, T_3$ เป็น $L$ ลิฟชิทท์แบบเอกรูปและ $I - T_i$, $(i = 1,2,3)$ เป็นการส่งครึ่งปิดที่ 0 และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) ในทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ใน (3.1) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของ $T_1, T_2$ และ $T_3$

**พิสูจน์** กำหนดให้การพิสูจน์สอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) โดยบทตั้ง 4 และบทตั้ง 5 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|T_i x_n - x_n\| = 0$ $(i = 1,2,3)$ เพราะว่า $X$ เป็นคอนเวกซ์แบบเอกรูปและ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ดังนั้น $x_n \to u$ แบบอ่อน ขณะที่ $n \to \infty$ เพราะว่า $I - T_i$, $(i = 1,2,3)$ เป็นการส่งครึ่งปิดที่ 0

จะได้ $u \in F$ ให้ลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ และ $\{x_{m_k}\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $u$ และ $v$ ตามลำดับ เนื่องจาก $I - T_i$, $(\mathrm{i} = 1,2,3)$ เป็นการส่งครึ่งปิดที่ 0 จะได้ $u$ และ $v \in F$ โดยบทตั้ง 4 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\|$ และ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - v\|$ มีจริง และจากบทตั้ง 3 จะได้ $u = v$ เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของ $T_1, T_2$ และ $T_3$ $\square$

**5. เอกสารอ้างอิง**


[1] A. Bnouhachem, M.A. Noor, Th.M. Rassias. "Three-steps iterative algorithms for mixed variational inequalities," Appl. Math. Comput. 183 : 436-446 ; 2006.

[2] H. Fukhar-ud-din, S.H. Khan. "Convergence of iterates with errors of asymptotically quasi-nonexpansive mappings and applications," J. Math. Anal. Appl. 328 : 821-829 ; 2007.

[3] K. Goebel, W.A. Kirk. "A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings," Proc. Amer. Math. Soc. 35 : 171-174 ; 1972.

[4] R. Glowinski, P. Le Tallec. " Augmented Lagrangian and Operator-Splittting Methods in Nonlinear Mechanics," SIAM, Philadelphia. 1989.

[5] S.H. Khan, W.Takahashi. " Approximating common fixed points of two asymptotically nonexpansive mappings," Sci. Math. Jpn. 53 : 133-138 ; 2001.

[6] S.H. Khan, H. Fukhar-ud-din. "Weak and strong convergence of a scheme with errors for two nonexpansive mappings," Nonlinear Anal. 8 : 1295-1301 ; 2005.

[7] K. Nammanee, M.A. Noor, S. Suantai. "Convergence criteria of modified Noor iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings," J. Math. Anal. Appl., in press.

[8] W. Nilsrakoo and S. Saejung. " A new three-step fixed point iteration scheme for asymptotically nonexpansive mappings," J. Appl. Math. Comput. 181 : 1026-1034 ; 2006.

[9] M.A. Noor. "New approximation schemes for general variational inequalities," J. Math. Anal. Appl. 251 : 217-229 ; 2000.

[10] M.A. Noor. "Three-step iterative algorithms for multivalued quasi variational inclusions," J. Math. Anal. Appl. 255 : 589-604 ; 2001.

[11] M.A. Noor. "Some developments in general variational inequalities," Appl. Math. Comput. 152 : 199-277 ; 2004.

[12] Z. Opial. "Weak convergence of successive approximations for nonexpansive mappings," Bull. Amer. Math. Soc. 73 : 591-597 ; 1967.

[13] L. Qihou. " Iteration sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mapping with an error member of uniform convex Banach space," J. Math. Anal. Appl. 266 : 468-471 ; 2002.

[14] N. Shahzad. "A. Udomene, Approximating common fixed points of two asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces," Fixed Point Theory Appl. 2006, article ID 18909, 2006,.

[15] S. Suantai. "Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings," J. Math. Anal. Appl. 311 : 506-517 ; 2005.

[16] K.K. Tan, H.K. Xu. "Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process," J. Math. Anal. Appl. 178 : 301-308 ; 1993.

[17] B.L. Xu, M. Aslam Noor. "Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces," J. Math. Anal. Appl. 267 : 444-453 ; 2002.

**ภาคผนวก**

**ก. บทความวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ**

ได้ตีพิมพ์บทความวิจัยเรื่อง Common Fixed Points of a New Three-Step Iteration with Errors of Asymptotically Quasi-Nonexpansive Nonself-Mappings in Banach spaces ในวารสารคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ ชื่อ Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, Vol. 1 No. 1 (2010) หน้า 169-182 (สำเนาบทความวิจัยตามที่แนบ)

**ข. ตารางเปรียบเทียบวัตถุประสงค์ กิจกรรมที่วางแผนไว้ กิจกรรมที่ดำเนินการมา และผลที่ได้รับตลอดโครงการ**

| วัตถุประสงค์ | กิจกรรมที่วางแผน | กิจกรรมที่ดำเนินการ | ผลที่ได้รับ |
|---|---|---|---|
| 1. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง | 1. ศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับจากเอกสารอ้างอิงและจากผู้เชี่ยวชาญ<br>2. ศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมในเรื่องทฤษฎีจุดตรึงจากเอกสารอ้างอิงและจากผู้เชี่ยวชาญ<br>3. ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ<br>4. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง | ได้ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ทุกข้อ | ได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องและได้ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการทำซ้ำแบบต่าง ๆ ของการส่งที่สนใจและสร้างเป็นขั้นตอนการทำซ้ำแบบใหม่ที่สามารถขยายผลขั้นตอนการทำซ้ำที่มีอยู่ก่อน |

| วัตถุประสงค์ | กิจกรรมที่วางแผน | กิจกรรมที่ดำเนินการ | ผลที่ได้รับ |
|---|---|---|---|
| 2. หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง โดยใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นตามข้อ 1. | 1. หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง<br>2. ปรึกษาผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่ได้และปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้อง<br>3. เขียนบทความเพื่อตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์รระดับนานาชาติ | ได้ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ทุกข้อ | 1. หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อน และแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเอง<br>2. ได้เขียนบทความวิจัย 1 เรื่อง และได้รับการตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ |

**ค. รายงานการเงิน**

งบประมาณที่ได้รับ 112,200 บาท ใช้จ่ายจริง 112,200 บาท รายละเอียดดังตารางข้างล่างนี้

| **รายการ** | **แผนการใช้จ่าย (บาท)** | **ใช้จ่ายจริง (บาท)** |
|---|---|---|
| **1. งบดำเนินงาน** | | |
| **1.1 หมวดค่าตอบแทน ใช้สอยและวัสดุ** | | |
| **1.1.1 หมวดค่าตอบแทน**<br>- ค่าตอบแทนสำหรับผู้รับทุนวิจัย 20% | 22,440 | 22,400 |
| **1.1.2 หมวดค่าใช้สอย**<br>- ค่าใช้จ่ายสำหรับการเข้าร่วมประชุมวิชาการกับกลุ่มเครือข่ายวิจัยและเพื่อปรึกษางานวิจัยกับผู้เชี่ยวชาญหรือนักวิจัยที่ปรึกษา | 25,000 | 12,250 |
| - ค่าใช้จ่ายสำหรับการเผยแพร่ผลงานวิจัย | 40,000 | 1,500 |
| **1.1.3 หมวดค่าวัสดุ**<br>- ค่าหนังสือ ตำรา และวารสารประกอบการทำวิจัย | 10,000 | 19,520 |
| - ค่าวัสดุสำนักงาน | 4,560 | 46,330 |
| **2. งบค่าสาธารณูปโภค**<br>- ค่าสาธารณูปโภค 10% | 10,200 | 10,200 |
| **รวม** | 112,200 | 112,200 |