3. ขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่

ให้ C เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปิด และคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของ X และการส่ง $P: X \to C$ เป็นการหดตัวของการส่งแบบไม่ขยาย และให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับและ F เป็นเซตของจุดตรึงร่วมทั้งหมดของ T_i นั่นคือ $F = \cap_{i=1}^{3} F(T_i)$ โดยที่

$$F(T_i) = \{x \in C: T_i x = x\}$$

สำหรับทุก $i = 1,2,3$ ให้ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned} z_n &= P[a_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - a_n - \delta_n) x_n + \delta_n u_n], \\ y_n &= P[b_n T_2 (PT_2)^{n-1} z_n + c_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + (1 - b_n - c_n - \sigma_n) x_n + \sigma_n v_n], \\ x_{n+1} &= P[\alpha_n T_3 (PT_3)^{n-1} y_n + \beta_n T_2 (PT_2)^{n-1} z_n + \gamma_n T_1 (PT_1)^{n-1} x_n \\ &\quad + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n) x_n + \rho_n w_n] \end{aligned} \tag{3.1}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ และ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C

ถ้า $\delta_n = \sigma_n = \rho_n \equiv 0$ และ $T_1, T_2, T_3: C \to C$ ขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนใน (3.1) ลดรูปดังนี้

$$\begin{aligned} z_n &= a_n T_1^n x_n + (1 - a_n) x_n, \\ y_n &= b_n T_2^n z_n + c_n T_1^n x_n + (1 - b_n - c_n) x_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_n T_3^n y_n + \beta_n T_2^n z_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$

ถ้า $T := T_1 = T_2 = T_3$ แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Nilsrakoo and Saejung [8]

ถ้า $\gamma_n \equiv 0$ และ $T := T_1 = T_2 = T_3$ แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Suantai [15]

ถ้า $c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ และ $T := T_1 = T_2 = T_3$ แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำของ Xu and Noor [17]

ถ้า $a_n = b_n = c_n \equiv 0$ แล้ว (3.2) ลดรูปเป็นขั้นตอนวิธีทำซ้ำ ดังนี้

$$x_{n+1} = \alpha_n T_3^n x_n + \beta_n T_2^n x_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n \tag{3.3}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$

4. ทฤษฎีบทหลักและอภิปรายผล

ผู้วิจัยได้สร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนใน (3.1) และสร้างทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาค ก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีบทดังกล่าว ผู้วิจัยขอกล่าวถึงบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 4 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ C เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ X และ C มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี P เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset, k_n \geq 1, l_n \geq 1, m_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n, b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C ให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดใน (3.1) จะได้ว่า

(i) $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ มีจริงสำหรับทุกๆ $q \in F$

(ii) ถ้าหนึ่งในเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง แล้ว $\lim_{n\to\infty}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$

(a) $\liminf_{n\to\infty} \beta_n > 0$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + \delta_n) < 1$

(b) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n$, $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$ และ

$0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + \delta_n) < 1$

(c) $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

(d) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} c_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$

(iii) ถ้า (a) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$

หรือ (b) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(b_n + c_n + \sigma_n) < 1$

แล้ว $\lim_{n\to\infty}\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| = 0$

(iv) ถ้า $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n) < 1$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| = 0$$

พิสูจน์ (i) ให้ $q \in F$ โดย (3.1) จะได้

$$\begin{aligned}\|z_n - q\| &= \|P[a_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1 - a_n - \delta_n)x_n + \delta_n u_n] - P(q)\| \\ &\leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + (1 - a_n - \delta_n)\|x_n - q\| + \delta_n\|u_n - q\| \\ &\leq (1 + a_n(k_n - 1) - \delta_n)\|x_n - q\| + \delta_n\|u_n - q\| \qquad (4.1)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\|y_n - q\| &= \|P[b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n + c_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)x_n + \sigma_n v_n] - P(q)\| \\ &\leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\| + c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\| \\ &\quad + \sigma_n\|v_n - q\| \\ &\leq b_n l_n\|z_n - q\| + c_n k_n\|x_n - q\| + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\| + \sigma_n\|v_n - q\| \qquad (4.2)\end{aligned}$$

โดย (4.1) และ (4.2) จะได้

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\| &= \|P[\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n + \gamma_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)x_n + \rho_n w_n] - P(q)\| \\
&\le \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\| + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\| + \gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\| + \rho_n\|w_n-q\| \\
&\le \alpha_n m_n\|y_n-q\| + \beta_n l_n\|z_n-q\| + \gamma_n k_n\|x_n-q\| \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\| + \rho_n\|w_n-q\| \\
&\le (\alpha_n m_n b_n l_n + \beta_n l_n)\|z_n-q\| + \alpha_n m_n c_n k_n\|x_n-q\| \\
&\quad +(\alpha_n m_n - \alpha_n m_n b_n - \alpha_n m_n c_n - \alpha_n m_n\sigma_n)\|x_n-q\| \\
&\quad +\alpha_n m_n\sigma_n\|v_n-q\| + \gamma_n k_n\|x_n-q\| + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\| \\
&\quad +\rho_n\|w_n-q\| \\
&\le \|x_n-q\| + ((l_n-1)(\alpha_n m_n b_n + \beta_n) + (k_n-1)(\gamma_n + \alpha_n m_n c_n \\
&\quad +(\alpha_n m_n b_n l_n + \beta_n l_n)a_n) + \alpha_n(m_n-1))\,\|x_n-q\| \\
&\quad +(m_n l_n + l_n)\delta_n\|u_n-q\| + m_n\sigma_n\|v_n-q\| + \rho_n\|w_n-q\|
\end{aligned}$$

เพราะว่า $\{l_n\}, \{m_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ มีขอบเขต ดังนั้น จะมีค่าคงตัว $K>0$ ที่ทำให้

$\alpha_n m_n b_n + \beta_n \le K, \gamma_n + \alpha_n m_n c_n + (\alpha_n m_n b_n l_n + \beta_n l_n)a_n \le K, (m_n l_n + l_n)\|u_n-q\| \le K,$
$m_n\|v_n-q\| \le K, \|w_n-q\| \le K$ และ $\alpha_n \le K$ สำหรับทุก $n \ge 1$ ดังนั้น

$$\|x_{n+1}-q\| \le (1 + K((k_n-1) + (l_n-1) + (m_n-1)))\|x_n-q\| + K(\delta_n + \sigma_n + \rho_n) \quad (4.3)$$

โดยบทตั้ง 1 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ มีจริง

ต่อไปจะพิสูจน์ (ii), (iii) และ (iv) จาก (i) จะได้ $\{x_n-q\}, \{T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\}, \{y_n-q\}$, $\{T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\}, \{z_n-q\}$ และ $\{T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\}$ มีขอบเขต ให้

$$\begin{aligned}
M = \max\{ &\sup_{n\ge1}\|x_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|, \sup_{n\ge1}\|y_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\|, \\
&\sup_{n\ge1}\|z_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|u_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\|, \sup_{n\ge1}\|v_n-q\|, \sup_{n\ge1}\|w_n-q\|\}
\end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 2 จะมีฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ คอนเวกซ์ ต่อเนื่อง $g: [0,\infty) \to: [0,\infty)$ และ $g(0)=0$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + \mu y + \xi z + \vartheta w + \zeta s\|^2 &\le \lambda\|x\|^2 + \mu\|y\|^2 + \xi\|z\|^2 + \vartheta\|w\|^2 + \zeta\|s\|^2 \\
&\quad -\lambda\mu g(\|x-y\|) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

สำหรับทุก $x, y, z, w, s \in B_r$ และทุก $\lambda, \mu, \xi, \vartheta, \zeta \in [0,1]$ ซึ่ง $\lambda + \mu + \xi + \vartheta + \zeta = 1$ โดย (4.4) จะได้

$$\begin{aligned}
\|z_n-q\|^2 &= \|P[a_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1-a_n-\delta_n)x_n + \delta_n u_n] - P(q)\|^2 \\
&\le \|a_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + (1-a_n-\delta_n)(x_n-q) + \delta_n(u_n-q)\|^2
\end{aligned}$$

$$\leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + (1 - a_n - \delta_n)\|x_n - q\|^2 + \delta_n\|u_n - q\|^2$$
$$-a_n(1 - a_n - \delta_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$
$$\leq a_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + (1 - a_n - \delta_n)\|x_n - q\|^2 + \delta_n\|u_n - q\|^2$$
$$-a_n(1 - a_n - \delta_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$
$$\leq (1 + a_n(k_n^2 - 1) - \delta_n)\|x_n - q\|^2 + \delta_n\|u_n - q\|^2 \qquad (4.5)$$

และ

$$\|y_n - q\|^2 = \|P[b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n + c_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)x_n + \sigma_n v_n] - P(q)\|^2$$
$$\leq \|b_n(T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q) + c_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)(x_n - q)$$
$$+\sigma_n(x_n - q)\|^2$$
$$\leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\|^2 + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + \sigma_n\|v_n - q\|^2$$
$$-b_n(1 - b_n - c_n - \sigma_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)$$
$$\leq b_n {l_n}^2\|z_n - q\|^2 + (1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\|^2 + c_n k_n^2\|x_n - q\|^2$$
$$+\sigma_n\|v_n - q\|^2 - b_n(1 - b_n - c_n - \sigma_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|) \qquad (4.6)$$

โดย (4.4), (4.5) และ (4.6) จะได้

$$\|x_{n+1} - q\|^2 = \|P[\alpha_nT_3(PT_3)^{n-1}y_n + \beta_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n + \gamma_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)x_n + \rho_n w_n] - P(q)\|^2$$
$$\leq \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\|^2 + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\|^2 + \gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\|x_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n - q\|^2$$
$$-\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$\leq \alpha_n m_n^2\|y_n - q\|^2 + \beta_n l_n^2\|z_n - q\|^2 + \gamma_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n - q\|^2$$
$$+(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\|x_n - q\|^2$$
$$-\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$\leq \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + \alpha_n m_n^2(1 - b_n - c_n - \sigma_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+\gamma_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\|z_n - q\|^2 + \alpha_n m_n^2\sigma_n\|v_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n - q\|^2$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n(1 - b_n - c_n - \sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|)$$
$$-\alpha_n(1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n - \rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\|)$$
$$\leq \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + \alpha_n m_n^2(1 - b_n - c_n)\|x_n - q\|^2$$
$$+\gamma_n k_n^2\|x_n - q\|^2 + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\|^2 + (\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\|z_n - q\|^2$$
$$+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\big(a_n(k_n^2 - 1)\big)\|x_n - q\|^2 + (m_n^2 l_n^2 + l_n^2)\delta_n\|u_n - q\|^2$$
$$-(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)a_n(1 - a_n - \delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$

$$+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)$$
$$-\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)$$
$$=\|x_n-q\|^2+\big((k_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n)$$
$$+(l_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)+\alpha_n(m_n^2-1)\big)\,\|x_n-q\|^2$$
$$+(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)$$
$$-\beta_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)$$
$$-\alpha_n m_n^2 b_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)$$
$$-\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|)$$

เพราะว่า $\{k_n\}, \{l_n\}, \{m_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ มีขอบเขตและ $\{x_n\}$ มีขอบเขต ดังนั้นจะมีค่าคงตัว $K_0 > 0$ ที่ทำให้
$(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n)\|x_n-q\|^2 \le K_0$,
$(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)\|x_n-q\|^2 \le K_0, \alpha_n\|x_n-q\|^2 \le K_0, (m_n^2 l_n^2+l_n^2)\|u_n-q\|^2 \le K_0$,
$m_n^2\|v_n-q\|^2 \le K_0$ และ $\|w_n-q\|^2 \le K_0$ สำหรับทุก $n \ge 1$ ดังนั้น

$$\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.7}$$

$$\beta_n l_n^2 a_n(1-a_n-\delta_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.8}$$

$$\alpha_n m_n^2 b_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.9}$$

$$\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\, g(\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|) \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$$
$$+K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \tag{4.10}$$

โดย (4.4) จะได้

$$\|y_n-q\|^2=\|P[b_nT_2(PT_2)^{n-1}z_n+c_nT_1(PT_1)^{n-1}x_n+(1-b_n-c_n-\sigma_n)x_n+\sigma_nv_n]-P(q)\|^2$$
$$\le c_n\,\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\|^2+(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2$$
$$+b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|^2+\sigma_n\|v_n-q\|^2$$
$$-c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|)$$
$$\le c_nk_n^2\|x_n-q\|^2(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2+b_nl_n^2\|z_n-q\|^2$$
$$+\sigma_n\|v_n-q\|^2-c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \tag{4.11}$$

โดย (4.4), (4.5) และ (4.11) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\|^2 &= \|P[\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n+\beta_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n+\gamma_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)x_n+\rho_n w_n]-P(q)\|^2 \\
&\le \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-q\|^2+\beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +\gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&\le \alpha_n m_n^2\|y_n-q\|^2+\beta_n l_n^2\|z_n-q\|^2+\gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&\le \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +\gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\|z_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&\le \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2+\alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +\gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)\big(a_n(k_n^2-1)\big)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) \\
&= \|x_n-q\|^2+\big((k_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 c_n+\gamma_n+(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2+\beta_n l_n^2)a_n) \\
&\quad +(l_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 b_n+\beta_n)+\alpha_n(m_n^2-1)\big)\|x_n-q\|^2 \\
&\quad +(m_n^2 l_n^2+l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2+m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2+\rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\quad -\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) \\
&\quad -\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\alpha_n m_n^2 c_n(1-b_n-c_n-\sigma_n)\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n-x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n-x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big)+K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

โดย (4.4), (4.5) และ (4.6) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\|^2 &= \|P[\alpha_n T_3(PT_3)^{n-1}y_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}z_n + \gamma_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n \\
&\qquad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)x_n + \rho_n w_n] - P(q)\|^2 \\
&\le \gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - q\|^2 + \rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\qquad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - q\|^2 \\
&\qquad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&\le \gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2 + \alpha_n m_n^2\|y_n-q\|^2 + \beta_n l_n^2\|z_n-q\|^2 \\
&\qquad +\rho_n\|w_n-q\|^2 + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\qquad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&\le \gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2 + \beta_n l_n^2\|z_n-q\|^2 + \alpha_n m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2 + \rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\qquad +\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2\|z_n-q\|^2 + \alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n-\sigma_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\qquad +\alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2 + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\qquad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&\le \gamma_n k_n^2\|x_n-q\|^2 + m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2 + \rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\qquad +(\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)\|x_n-q\|^2 + (m_n^2 l_n^2 + l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2 \\
&\qquad +\big((\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)a_n(k_n^2-1)\big)\|x_n-q\|^2 + \alpha_n m_n^2 c_n k_n^2\|x_n-q\|^2 \\
&\qquad +(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\|x_n-q\|^2 + \alpha_n m_n^2(1-b_n-c_n)\|x_n-q\|^2 \\
&\qquad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&= \|x_n-q\|^2 + \big((k_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 c_n + \gamma_n + (\alpha_n m_n^2 b_n l_n^2 + \beta_n l_n^2)a_n) \\
&\qquad +(l_n^2-1)(\alpha_n m_n^2 b_n + \beta_n) + \alpha_n(m_n^2-1)\big)\|x_n-q\|^2 \\
&\qquad +(m_n^2 l_n^2 + l_n^2)\delta_n\|u_n-q\|^2 + m_n^2\sigma_n\|v_n-q\|^2 + \rho_n\|w_n-q\|^2 \\
&\qquad -\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\gamma_n(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\rho_n)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big) + K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

(ii) (a) ให้ $\liminf_{n\to\infty}\beta_n > 0$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n+\delta_n) < 1$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก n_0 และ $\eta, \eta' \in (0,1)$ ที่ทำให้ $0 < \eta < \beta_n, 0 < \eta < a_n$ และ $a_n + \delta_n < \eta' < 1$ สำหรับทุก $n \ge n_0$ โดย (4.8) จะได้

$$
\begin{aligned}
\eta^2(1-\eta')g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) &\le \|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2 \\
&\quad +K_0\big((k_n^2-1)+(l_n^2-1)+(m_n^2-1)\big) + K_0(\delta_n+\sigma_n+\rho_n) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

สำหรับทุก $n \ge n_0$ จาก (4.15) สำหรับ $r \ge n_0$ จะได้

$$\sum_{n=n_0}^{r} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \le \frac{1}{\eta^2(1-\eta')}(\sum_{n=n_0}^{r}(\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2)$$
$$+K_0\sum_{n=n_0}^{r}((k_n^2 - 1) + (l_n^2 - 1) + (m_n^2 - 1)$$
$$+\delta_n + \sigma_n + \rho_n))$$
$$\le \frac{1}{\eta^2(1-\eta')}(\|x_{n_0} - q\|^2 + K_0\sum_{n=n_0}^{r}((k_n^2 - 1)$$
$$+(l_n^2 - 1) + (m_n^2 - 1))) \tag{4.16}$$

เพราะว่า $0 \le t^2 - 1 \le 2t(t-1)$ สำหรับทุก $t \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}(l_n^2 - 1) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}(m_n^2 - 1) < \infty$, โดยอสมการ (4.16) ให้ $r \to \infty$ จะได้ $\sum_{n=n_0}^{\infty} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) < \infty$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) = 0$ เพราะว่า g เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้และต่อเนื่องที่ 0 ซึ่ง $g(0) = 0$ จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$

ในทำนองเดียวกับ (ii) (a) และจาก (4.7), (4.14), (4.12), (4.13), (4.9) และ (4.10) จะได้ (ii) (b,c,d), (iii) (a,b) และ (iv) ตามลำดับ

บทตั้ง 5 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ C เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ X และ C มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี P เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \ne \emptyset, k_n \ge 1, l_n \ge 1, m_n \ge 1, \sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n, b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \ge 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n < \infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C ให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดใน (3.1) ให้ T_1, T_2, T_3 เป็น L ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป ถ้า $\lim_{n\to\infty}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0, \lim_{n\to\infty}\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| = 0$ แล้ว

(i) $\lim_{n\to\infty}\|T_1x_n - x_n\| = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\|T_2x_n - x_n\| = 0$ และ

(iii) $\lim_{n\to\infty}\|T_3x_n - x_n\| = 0$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \alpha_n\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\|$$
$$+\gamma_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \rho_n\|w_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้

$$\begin{aligned}\|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| &\le \|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_n\| \\ &\quad + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le L\|x_{n+1} - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| \\ &\quad + \|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty \end{aligned} \tag{4.17}$$

โดย (4.17) จะได้

$$\begin{aligned}\|T_1x_n - x_n\| &\le \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - T_1x_n\| \\ &\le \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + L\|T_1(PT_1)^{n-2}x_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\|T_1x_n - x_n\| = 0$ ต่อไปจะพิสูจน์ (ii) เพราะว่า

$$\|z_n - x_n\| \le a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \delta_n\|u_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้

$$\begin{aligned}\|T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| &\le \|T_2(PT_2)^{n-1}x_{n+1} - T_2(PT_2)^{n-1}x_n\| \\ &\quad + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - T_2(PT_2)^{n-1}x_n\| \\ &\quad + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le L\|x_{n+1} - x_n\| + L\|z_n - x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| \\ &\quad + \|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\|T_2x_n - x_n\| &\le \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - T_2x_n\| \\ &\le \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - T_2(PT_2)^{n-1}x_n\| + \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| \\ &\quad + L\|T_2(PT_2)^{n-2}x_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\|T_2x_n - x_n\| = 0$ จะได้ (ii) ตามต้องการ

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\|y_n - x_n\| &\le b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| \\ &\quad + \sigma_n\|v_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

และ $\|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| \to 0$ ขณะที่ $n \to \infty$ จะได้

$$\begin{aligned}\|T_3(PT_3)^{n-1}x_n - x_n\| &\le \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - T_3(PT_3)^{n-1}x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| \\ &\le L\|y_n - x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\|T_3(PT_3)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| &\le \|T_3(PT_3)^{n-1}x_{n+1} - T_3(PT_3)^{n-1}x_n\| \\ &\quad + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - T_3(PT_3)^{n-1}x_n\| \\ &\quad + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|\end{aligned}$$

$$\leq L\|x_{n+1}-x_n\| + L\|y_n-x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}y_n-x_n\|$$
$$+\|x_{n+1}-x_n\| \to 0 \quad \text{ขณะที่ } n\to\infty$$

จะได้

$$\|T_3x_n-x_n\| \leq \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n-x_n\| + \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n-T_3x_n\|$$
$$\leq \|T_3(PT_3)^{n-1}x_n-x_n\| + L\|T_3(PT_3)^{n-2}x_n-x_n\| \to 0 \quad \text{ขณะที่ } n\to\infty$$

ดังนั้น จะได้ (iii) ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 1 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ C เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ X และ C มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี P เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1,T_2,T_3\colon C\to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\},\{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F\neq\emptyset, k_n\geq 1,\ l_n\geq 1, m_n\geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n-1)<\infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n-1)<\infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n+\delta_n, b_n+c_n+\sigma_n$ และ $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\rho_n\in[0,1]$ สำหรับทุกๆ $n\geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty, \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n<\infty, \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n<\infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C ให้ T_1,T_2,T_3 เป็น L ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป ถ้าหนึ่งในสามการส่ง $T_i (i=1,2,3)$ เป็นการส่งที่ต่อเนื่องบริบูรณ์ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) ต่อไปนี้

(C1) $0<\liminf_{n\to\infty}a_n\leq\limsup_{n\to\infty}(a_n+\delta_n)<1,$

$0<\liminf_{n\to\infty}b_n\leq\limsup_{n\to\infty}(b_n+c_n+\sigma_n)<1$ และ

$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\rho_n)<1$

(C2) $0<\liminf_{n\to\infty}b_n,\ \liminf_{n\to\infty}c_n\leq\limsup_{n\to\infty}(b_n+c_n+\sigma_n)<1$ และ

$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\rho_n)<1$

(C3) $0<\liminf_{n\to\infty}b_n\leq\limsup_{n\to\infty}(b_n+c_n+\sigma_n)<1$ และ

$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n, \liminf_{n\to\infty}\gamma_n\leq\limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\rho_n)<1$

(C4) $\liminf_{n\to\infty}b_n>0,\ 0<\liminf_{n\to\infty}a_n\leq\limsup_{n\to\infty}(a_n+\delta_n)<1$ และ

$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n, \liminf_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\rho_n)<1$

(C5) $0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n, \liminf_{n\to\infty}\beta_n, \liminf_{n\to\infty}\gamma_n\leq\limsup_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\rho_n)<1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ใน (1.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ T_1,T_2 และ T_3

พิสูจน์ กำหนดให้การพิสูจน์สอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) โดยบทตั้ง 5 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|T_ix_n-x_n\|=0$ สำหรับ $i=$ 1,2,3 กำหนดให้หนึ่งในการส่ง T_1,T_2 และ T_3 ในที่นี้ให้

การส่ง T_1 เป็นการส่งที่ต่อเนื่องบริบูรณ์ เพราะว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C จะมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ที่ทำให้ $\{T_1x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ $q \in C$ เพราะว่า

$$\|x_{n_k} - q\| \leq \|T_1x_{n_k} - x_{n_k}\| + \|T_1x_{n_k} - q\|$$

จะได้ $\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k} - q\| = 0$ ดังนั้น $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ $q \in C$ โดยความต่อเนื่องของ T_i จะได้ $T_ix_{n_k} \to T_iq$ ขณะที่ $k \to \infty$ เพราะว่า

$$\|T_iq - q\| \leq \|T_ix_{n_k} - T_iq\| + \|T_ix_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - q\| \to 0 \text{ ขณะที่ } k \to \infty$$

จะได้ $T_iq = q$ $(i= 1,2,3)$ ดังนั้น $q \in F$ โดยบทตั้ง 4 (i) จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ มีจริง ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\| = 0$ โดยบทตั้ง 4 จะได้

$$\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| \to 0 \text{ และ } \|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

ดังนั้น

$$\|y_n - x_n\| \leq b_n\|T_2(PT_2)^{n-1}z_n - x_n\| + c_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \sigma_n\|v_n - x_n\| \to 0$$

และ

$$\|z_n - x_n\| \leq a_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \delta_n\|u_n - x_n\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

จะได้ $\lim_{n\to\infty} y_n = q$ และ $\lim_{n\to\infty} z_n = q$ □

ข้อสังเกต ในทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ T_1, T_2 และ T_3 เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ส่งจาก C ไปยัง C และหนึ่งในการส่งสามการส่งมีความต่อเนื่องบริบูรณ์และ T_1, T_2, T_3 เป็น L ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป และ $\delta_n = \sigma_n = \rho_n \equiv 0$ จะได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

(1) ถ้าลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ กำหนดโดย (3.2) นั่นคือ

$$\begin{aligned} z_n &= a_nT_1^nx_n + (1-a_n)x_n, \\ y_n &= b_nT_2^nz_n + c_nT_1^nx_n + (1-b_n-c_n)x_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_nT_3^ny_n + \beta_nT_2^nz_n + \gamma_nT_1^nx_n + (1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x_n \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1)-(C5) แล้วจะได้ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ T_1, T_2 และ T_3

(2) ถ้า $T := T_1 = T_2 = T_3$ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1)-(C5) แล้วจะได้ผลลัพธ์ของ Nilsrakoo และ Saejung [8]

(3) ถ้า $T := T_1 = T_2 = T_3$ และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1), (C2), (C4) และ $\gamma_n \equiv 0$ แล้วจะได้ผลลัพธ์ของ Suantai [16]

(4) ถ้า $T := T_1 = T_2 = T_3$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข (C1) และ $c_n = \beta_n = \gamma_n \equiv 0$ แล้วจะได้ผลลัพธ์ของ Xu และ Noor [18]

(5) ถ้า $a_n = b_n = c_n \equiv 0$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข (C5) และลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (3.3) นั่นคือ

$$x_{n+1} = \alpha_n T_3^n x_n + \beta_n T_2^n x_n + \gamma_n T_1^n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยที่ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ แล้วจะได้ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ T_1, T_2 และ T_3

ให้ X เป็นปริภูมิบานาคจะกล่าวว่าการส่งแบบ $T: X \to X$ ซึ่ง $F \neq \emptyset$ ว่าสอดคล้องเงื่อนไข A (condition A) ถ้ามีฟังก์ชันไม่ลด $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ซึ่ง $f(0) = 0, f(r) > 0$ สำหรับทุก $r \in (0, \infty)$ ที่ทำให้

$$\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$$

สำหรับทุก $x \in C$ โดยที่

$$d\big(x, F(T)\big) = inf\{\|x - p\| : p \in F(T)\}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทของการลู่เข้าแบบเข้มของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไข A

ทฤษฎีบท 2 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ C เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ X และ C มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี P เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3: C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}, \{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset, k_n \geq 1, l_n \geq 1, m_n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n, b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n \in [0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$ และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C ให้ T_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข A และ T_2, T_3 เป็น L ลิฟชิทซ์แบบเอกรูป และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) ในทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ใน (3.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ T_1, T_2 และ T_3

พิสูจน์ ให้ $q \in F$ โดยบทตั้ง 4 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ มีจริง ดังนั้น $\{x_n - q\}$ มีขอบเขต ดังนั้น จะมีค่าคงตัว H ที่ทำให้ $\|x_n - q\| \leq H$ สำหรับทุก $n \geq 1$ โดย (4.3) จะได้

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \|x_n - q\| + D_n \qquad (4.18)$$

เมื่อ $D_n = KH\big((k_n - 1) + (l_n - 1) + (m_n - 1)\big) + K(\delta_n + \sigma_n + \rho_n) < \infty$ สำหรับทุก $n \geq 1$ โดยบทตั้ง 5 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_i x_n\| = 0$ $(i = 1,2,3)$ เนื่องจาก T_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข A

จะได้ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T_1)) = 0$ ต่อไปจะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T_1)) = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} D_n < \infty$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ที่ทำให้ $d(x_n, F(T_1)) < \varepsilon/4$ และ $\sum_{k=n_0}^{n} D_k < \varepsilon/2$ สำหรับทุก $n \geq n_0$ ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq n_0$ ดังนั้น เราสามารถหา $q^* \in F$ ที่ทำให้ $\|x_n - q^*\| < \varepsilon/4$ โดย (4.18) สำหรับ $m \geq 1$ จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - q^*\| + \|x_n - q^*\| \\ &\leq 2\|x_n - q^*\| + \textstyle\sum_{k=n}^{n+m-1} D_k \\ &= 2\|x_n - q^*\| + \textstyle\sum_{k=n_0}^{n+m-1} D_k < 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชีและลู่เข้า ให้ $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ เพราะว่า $d(x_n, F(T_1)) \to 0$ ขณะที่ $n \to \infty$ เป็นผลให้ $d(p, F(T_1)) = 0$ และดังนั้น $p \in F(T_1)$ ต่อไปจะแสดงว่า $p \in F(T_2) \cap F(T_3)$ เพราะว่า T_2, T_3 เป็น L ลิฟชิทซ์แบบเอกรูปและโดยบทตั้ง 5 จะได้

$$\begin{aligned}\|T_i p - p\| &\leq \|T_i x_n - T_i p\| + \|T_i x_n - x_n\| + \|x_n - p\| \\ &\leq L\|x_n - p\| + \|T_i x_n - x_n\| + \|x_n - p\| \to 0 \text{ ขณะที่ } n \to \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $T_i p = p$ $(i = 2,3)$ เพราะฉะนั้น $p \in F$ □

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จะเป็นทฤษฎีบทของการลู่เข้าแบบอ่อนของการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ไม่ส่งไปยังตัวมันเองในปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล

ทฤษฎีบท 3 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคชนิดคอนเวกซ์แบบเอกรูปและสอดคล้องกับเงื่อนไขโอเปียล และให้ C เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ X และ C มีสมบัติเป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และเป็นเซตหดแบบไม่ขยายที่มี P เป็นการหดตัวแบบไม่ขยาย ให้ $T_1, T_2, T_3 \colon C \to X$ เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับเทียบกับ $\{k_n\}$, $\{l_n\}$ และ $\{m_n\}$ ตามลำดับ โดยที่ $F \neq \emptyset$, $k_n \geq 1$, $l_n \geq 1$, $m_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(m_n - 1) < \infty$ ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $[0,1]$ โดยที่ $a_n + \delta_n$, $b_n + c_n + \sigma_n$ และ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \rho_n$ อยู่ใน $[0,1]$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, และให้ $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C ให้ T_1, T_2, T_3 เป็น L ลิฟชิทซ์แบบเอกรูปและ $I - T_i$, (i= 1,2,3) เป็นการส่งครึ่งปิดที่ 0 และสอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) ในทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ใน (3.1) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของ T_1, T_2 และ T_3

พิสูจน์ กำหนดให้การพิสูจน์สอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไข (C1) - (C5) โดยบทตั้ง 4 และบทตั้ง 5 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\|T_i x_n - x_n\| = 0$ $(i = 1,2,3)$ เพราะว่า X เป็นคอนเวกซ์แบบเอกรูปและ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ดังนั้น $x_n \to u$ แบบอ่อน ขณะที่ $n \to \infty$ เพราะว่า $I - T_i$, (i= 1,2,3) เป็นการส่งครึ่งปิดที่ 0