



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 70 เล่มที่ 713 มกราคม – เมษายน 2568

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ต้นกำเนิดของการประมาณค่ารากที่สองด้วยวิธีบาบิโลน

Babylonian Square Root Estimation Beginnings

DOI: 10.14456/mj-math.xxxx.x

เคมีจิรา เทียงอู^{1,*} และ กฤติธี อนันต์²

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร 10110

²ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

Khemjira Tiengyoo^{1,*} and Krittitee Anan²

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok 10110

²Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: ¹khemjirat@g.swu.ac.th ²krittiteean@gmail.com

วันที่รับบทความ : 31 ธันวาคม 2566

วันที่แก้ไขบทความ : 7 พฤษภาคม 2567

วันที่ตอบรับบทความ : 11 เมษายน 2568

บทคัดย่อ

บทความนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาของการประมาณค่ารากที่สองด้วยวิธีบาบิโลน และแนวความคิดการประมาณค่ารากที่สองของนักคณิตศาสตร์ในยุคโบราณ

คำสำคัญ: การประมาณค่า บาบิโลน รากที่สอง

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

In this article, the origins of the Babylonian square root estimation are explored. Moreover, various notions of square root approximations by ancient mathematicians are given.

Keywords: Estimation, Babylonian, Square root

1. บทนำ

แม้ว่านักคณิตศาสตร์ในอดีตจะพยายามหาวิธีการประมาณค่ารากที่สอง เพื่อให้ค่ารากที่สองมีความแม่นยำ สามารถนำไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่อย่างไรก็ตาม สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่ได้เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ รากที่สองของจำนวนเต็มเหล่านั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ ส่งผลให้ไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนได้ ในการประมาณค่าของรากที่สองจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง อีกทั้งมีการค้นพบหลักฐานตั้งแต่ยุคบาบิโลนซึ่งแสดงให้เห็นว่า แนวคิดของการประมาณค่ารากที่สองถูกพัฒนามาหลายยุค หลายสมัย กว่าจะมาเป็นหลักการคำนวณในปัจจุบัน

2. การประมาณค่ารากที่สองด้วยวิธีบาบิโลน

มีการค้นพบแผ่นดินเหนียวเยล 7289 (Yale Babylonian Collection, YBC 7289) [1] ซึ่งคาดว่าอยู่ในยุคบาบิโลนเก่า (Old Babylon) หรือประมาณศตวรรษที่ 19 - 17 ก่อนคริสต์ศักราช แผ่นดินเหนียวเยล 7289 ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็นหลักฐานสำคัญชิ้นหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่าต้นกำเนิดของการประมาณค่ารากที่สองอาจเริ่มต้น ณ ยุคนี้ ถัดไปจะขอยกปัญหาการประมาณค่ารากที่สองซึ่งดึงมาจากปัญหาทางคณิตศาสตร์ในยุคบาบิโลนเก่า

ปัญหาแรก เป็นปัญหาในการหาความยาวของเส้นทแยงมุมของประตูที่มีความสูง h หน่วย และความกว้าง b หน่วย นั่นคือ ความยาวของเส้นทแยงมุมของประตูมีค่าประมาณ $\sqrt{h^2 + b^2}$ หน่วย

ในการอธิบายแนวคิดของชาวบาบิโลน จะใช้เศษส่วนทั่วไปแทนเศษส่วนฐานหกสิบ (sexagesimal fractions) ที่ใช้กันในยุคบาบิโลน [2] โดยมีตัวอย่างวิธีการดังนี้

กำหนดให้ ความสูงเป็น $\frac{2}{3}$ แท่ง และความกว้างเป็น $\frac{1}{6}$ แท่ง จะได้ว่าเส้นทแยงมุมของประตุมีความยาวประมาณ $\frac{2}{3} + \left(\left(\frac{1}{6} \right)^2 \div \left(2 \times \frac{2}{3} \right) \right)$ หรือ $\frac{11}{16}$ แท่ง ซึ่งมีความต่างจากค่าแท้จริง $\sqrt{\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^2}$ ไม่เกิน 0.0004

ปัญหาที่สอง เป็นปัญหาในการหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเป็น 1 หน่วย นั่นคือ ความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีค่าประมาณของ $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2}$ หรือ $\sqrt{\frac{3}{4}}$

ในกรณีนี้ ชาวบาบิโลนใช้วิธีการในทำนองเดียวกับปัญหาแรก ทำให้ได้ค่าประมาณของความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็น $1 - \frac{\frac{1}{4}}{2 \times 1}$ หรือ $\frac{7}{8}$ ซึ่งมีความต่างจากค่าแท้จริง $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ไม่เกิน 0.01

จากตัวอย่างการประมาณค่ารากที่สองทั้งสอง นักประวัติศาสตร์คาดเดาได้เพียงเหตุผลที่ชาวบาบิโลนอาจใช้ในการหาค่าประมาณเท่านั้น โดยจะเห็นได้ว่า ความยาวของเส้นทแยงมุมของประตุมหาได้จาก $\sqrt{h^2 + b^2} \approx h + \frac{b^2}{2h}$ ส่วนความสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหาได้จาก $\sqrt{h^2 - b^2} \approx h - \frac{b^2}{2h}$ แต่อย่างไรก็ตามการคาดเดาของนักประวัติศาสตร์นี้สอดคล้องกับ Fowler และ Robson [3] ที่กล่าวว่า ชาวบาบิโลนใช้การประมาณค่าของ $\sqrt{n}$ ด้วย a โดยที่ $n = a^2 + e_a$ หรือ $n = a^2 - e_a$ เมื่อ a เป็นจำนวนบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือมากกว่า $\sqrt{n}$ และ e_a เป็นค่าความคลาดเคลื่อน ทั้งนี้ยังพบว่าชาวบาบิโลนได้สมการ (*) ในการประมาณค่ารากที่สองซึ่งได้ค่าที่ใกล้เคียงค่าแท้จริงมากกว่าค่าของ a โดยขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของค่า a ที่เลือก เพราะผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณนั้นมีค่าที่ปรับปรุงจากค่า a ที่นำมาใช้ตั้งต้น ดังตัวอย่างที่ 1

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + e_a} \approx a + \frac{e_a}{2a} \text{ หรือ } \sqrt{n} = \sqrt{a^2 - e_a} \approx a - \frac{e_a}{2a} \quad (*)$$

ตัวอย่าง ค่าประมาณแรกของ $\sqrt{2}$ เป็น $\frac{3}{2}$ แสดงว่า $n=2$ และ $a=\frac{3}{2}$ แต่จาก $2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

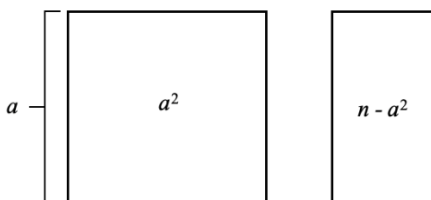
ดังนั้น ค่าประมาณที่ดีกว่าจะเป็น $\frac{3}{2}-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{17}{12}$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ ที่ปรากฏอยู่บน

แผ่นดินเหนียวยุคบาบิโลนเก่า

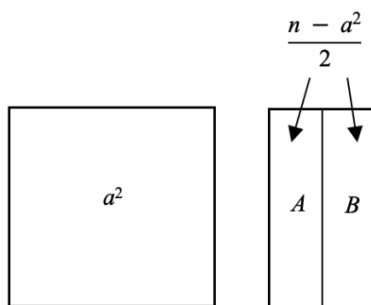
การประมาณค่ารากที่สองตามสมการ (*) นั้น สามารถแสดงได้โดยใช้พีชคณิตเชิงเรขาคณิต ดังนี้

ให้ a^2 แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ a หน่วย โดยที่ $a < \sqrt{n}$ เป็นค่าเริ่มต้นในการประมาณค่ารากที่สองของ n และ $e_a = n - a^2$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านด้านหนึ่งยาว a หน่วย ดังรูปที่ 1

จะได้ว่า ด้านอีกด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ จะยาว $\frac{e_a}{a}$ หรือ $\frac{n-a^2}{a}$ หน่วย และ n เป็นผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



รูปที่ 1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ e_a ตารางหน่วย



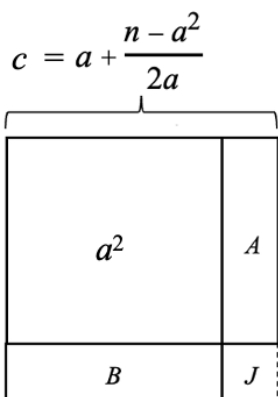
รูปที่ 2 การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

แบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ $e_a = n - a^2$ ตารางหน่วย ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า A และ B ซึ่งมีพื้นที่เท่ากัน คือ $\frac{n - a^2}{2}$ ตารางหน่วย ดังรูปที่ 2 จากนั้นนำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า A และ B มาประกอบกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย ดังรูปที่ 3

ให้ c แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหม่ ซึ่งเป็นค่าประมาณที่สองของรากที่สองของ n ซึ่งได้ว่า

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + (n - a^2)} \approx c = a + \frac{n - a^2}{2a} = a + \frac{e_a}{2a}$$

ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการหาค่าประมาณรากที่สองในสมการ (*) ที่ชาวบาบิโลนค้นพบ



รูปที่ 3 การประกอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า A และ B กับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย

จากรูปที่ 3 จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหม่มีพื้นที่เท่ากับ c^2 ตารางหน่วย ซึ่งมีค่ามากกว่า n ซึ่งป็นผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามรูปที่ 1 โดยที่

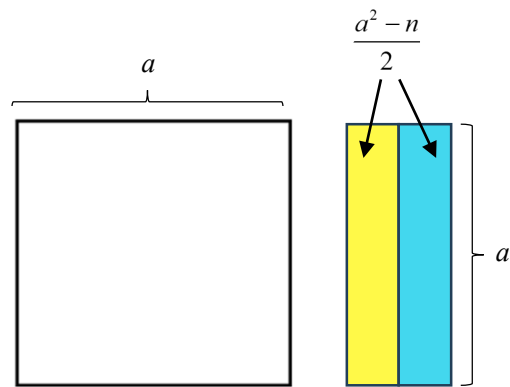
$$n = \text{พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหม่} - \text{พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส } J$$

และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส J เท่ากับ $\left(\frac{n - a^2}{2a}\right)^2$

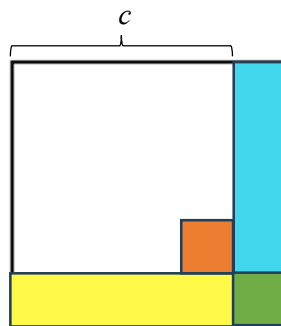
ดังนั้น ค่าประมาณใหม่ของ $\sqrt{n}$ คือ $c = \frac{a^2 + n}{2a}$

ในทางตรงข้าม เมื่อค่าเริ่มต้นในการประมาณค่ารากที่สองของ n ซึ่งคือ a มีค่ามากกว่า $\sqrt{n}$ จะเริ่มพิจารณาจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปซึ่งแต่ละรูปมีพื้นที่ $\frac{a^2 - n}{2}$ ตารางหน่วย โดยด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว a หน่วย ดังรูปที่ 4 จากนั้น

นำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ $\frac{a^2 - n}{2}$ ตารางหน่วย สองรูปนี้วางทับบนขอบของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย ดังรูปที่ 5 เนื่องจากการวางทับของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองรูปนี้มีการซ้อนทับกันคือบริเวณรูปสี่เหลี่ยมสีเขียว ทำให้ต้องนำพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมสีเขียวที่ซ้อนทับกันมาหักออกเพิ่มเติม ซึ่งคือรูปสี่เหลี่ยมสีส้ม จึงจะได้ค่าที่แท้จริงของพื้นที่ของรูปที่ไม่ได้แรเงาในรูปที่ 5 หรือคือการนำค่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ c หน่วย ลบด้วยพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมสีส้ม ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ c หน่วย จึงมีค่าไม่เท่ากับ n ซึ่งเป็นค่าของพื้นที่ของรูปที่ไม่ได้แรเงาในรูปที่ 5



รูปที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



รูปที่ 5 การวางทับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่า c มีค่าน้อยกว่า a ที่เป็นความยาวของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a^2

ตารางหน่วย และสามารถคำนวณได้ว่า $c = a - \frac{a^2 - n}{2a}$

ดังนั้น $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 - (a^2 - n)} \approx c = a - \frac{a^2 - n}{2a}$

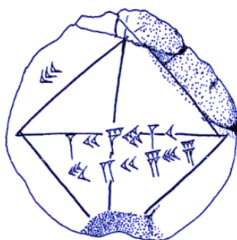
จะเห็นว่าเมื่อรวมพื้นที่ในส่วนที่ไม่ได้แรเงากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสี่มุม ในรูปที่ 5 แล้วจะมีค่าเท่ากับ c^2 ซึ่งมีความมากกว่า n และจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสี่มุมมีค่าเท่ากับ $c^2 - n$ ตารางหน่วย ซึ่งถูกลบออกนั้น มีขนาดน้อยกว่าค่าเริ่มต้นในการประมาณค่ารากที่สองของ n คือ $e_a = a^2 - n$ ซึ่งเป็นผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในรูปที่ 4

ดังนั้น ค่าประมาณใหม่ของ $\sqrt{n}$ คือ $c = \frac{a^2 + n}{2a}$

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นว่า การประมาณค่ารากที่สองในสมการ (*) นั้น สามารถอธิบายโดยใช้พีชคณิตเชิงเรขาคณิตได้ และตามตรรกะเหตุผลดังกล่าวนี้พบว่า การประมาณค่าเริ่มต้นด้วย a ถูกใช้เพื่อสร้างค่าการประมาณที่สองสำหรับ $\sqrt{n}$ คือ c ซึ่งมีความแม่นยำมากขึ้น และที่ยิ่งไปกว่านั้น ทำให้ทราบว่า ไม่ว่า $a > \sqrt{n}$ หรือ $a < \sqrt{n}$ ค่าประมาณที่สอง c จะมีค่ามากกว่า $\sqrt{n}$ เสมอ และค่าประมาณที่แท้จริงคือ $c = \frac{a^2 + n}{2a}$

3. การประมาณค่า $\sqrt{2}$ อันน่าทึ่งของชาวบาบิโลน

นักคณิตศาสตร์ชาวบาบิโลนค้นพบค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับ $\sqrt{2}$ และเป็นหนึ่งในตัวอย่างซึ่งเป็นที่รู้จักกันนั้น คือ แผ่นดินเหนียวของชาวบาบิโลน ที่เรียกว่า เยล 7289 ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 การประมาณค่า $\sqrt{2}$

จะสังเกตได้ว่า แผ่นดินเหนียวเยล 7289 ข้างต้น มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บริเวณแนวเส้นทแยงมุมมีอักษรปรากฏอยู่ซึ่งบ่งบอกถึงจำนวนระบบฐานหกสิบ ซึ่งหมายความว่า

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1.414212963$$

ทั้งนี้หากเทียบค่าประมาณดังกล่าวกับค่าประมาณที่แท้จริงของ $\sqrt{2}$ จะพบว่า มีความคลาดเคลื่อนเพียง 6×10^{-7}

จากวิธีของบาบิโลน ซึ่งคือ $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 - (a^2 - n)} \approx c = a - \frac{a^2 - n}{2a}$ เมื่อให้ค่าประมาณเริ่ม a เป็น $\frac{17}{12}$ เนื่องจาก $2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}$ ดังนั้น

$$\sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} \approx \frac{17}{12} - \frac{\left(\frac{1}{144}\right)}{2\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{577}{408}$$

จะเห็นว่า สามหลักแรกของ $\frac{577}{408}$ ในระบบฐานหกสิบ มีค่าเท่ากับ $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ และมีเศษเหลือในระบบฐานหกสิบเพื่อแปลงเป็นจำนวนต่อไป คือ $\frac{1}{367200}$ ซึ่งหากพิจารณาเพียงสามหลักแรกของ $\frac{577}{408}$ จะสอดคล้องกับค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ ในระบบฐานหกสิบ ที่แสดงบนแผ่นดินเหนียวเยล 7289 คือ $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$

4. แนวคิดสร้างสรรค์อื่น ๆ ของการประมาณค่ารากที่สอง

แม้ว่าวิธีของบาบิโลนจะเป็นจุดเริ่มต้นของการประมาณค่ารากที่สองอย่างน่ามหัศจรรย์ อีกทั้งยังเป็นที่แพร่หลายในแวดวงคณิตศาสตร์ แต่อย่างไรก็ตาม มีนักการศึกษาหลายท่านหลายยุคสมัยได้พยายามคิดค้นการประมาณค่ารากที่สองด้วยวิธีที่หลากหลาย ในที่นี้ได้รวบรวมมาพอสังเขป ดังนี้

นักคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แห่งยุคกรีกโบราณ อาร์คิมิดีส ได้ค้นพบค่ารากเกี่ยวกับ Measurement of the Circle มีการใช้ $\sqrt{3}$ ในการประมาณช่วงของค่าพาย (π) ซึ่งใช้ค่าประมาณของ $\sqrt{3}$ คือ $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ และ $\sqrt{3} < \frac{351}{780}$ โดยที่อาร์คิมิดีสไม่ได้ให้ที่มาของตัวเลขดังกล่าวนี้ แต่มีผู้คาดการณ์ถึงที่มาของตัวเลขดังกล่าวว่าเป็นค่าประมาณตามวิธีของบาบิโลน [4] สำหรับ ฮีรอน ไม่ได้ใช้แนวคิดเกี่ยวกับจำนวนในระบบฐานหกสิบเช่นเดียวกับของชาวบาบิโลน แต่ใช้หลักการของเศษส่วนที่มีตัวเศษเป็น 1 ตามแนวคิดของชาวอียิปต์โบราณ แล้วนำมาทำซ้ำ เพื่อประมาณค่ารากที่สอง ซึ่งในปัจจุบันเรียกวิธีดังกล่าวว่า ขั้นตอนวิธีของเฮรอน (Heron's Algorithm) ในขณะที่ หลิวฮุย นักคณิตศาสตร์ฝั่งภูมิภาคกลางตอนเหนือของประเทศจีน ได้อธิบายในหนังสือโบราณชื่อ Nine Chapters on the Mathematical Art ซึ่งเป็นหนังสือที่มี 9 บท ประกอบไปด้วย 246 คำถามที่มีคำตอบพร้อมแนวทางการค้นหาคำตอบ โดยหนึ่งในคำถามนั้นกล่าวถึง “การหาค่ารากที่สองและ

ค่ารากที่สาม” ผ่านการวาดรูปทางเรขาคณิต [5] ในหนังสือ 4th Volume of Marifetname ของ อิบราฮิม ฮักกี แห่งแอร์ซุรัม ชาวตุรกี มีการเสนอวิธีการประมาณค่าของรากที่สองแบบง่ายด้วย ขั้นตอนการเทียบระหว่างค่าของรากที่สองกับจำนวนสมบูรณ์ที่มากที่สุดที่น้อยกว่าค่าที่ต้องการหารากที่สองนั้น และอีกหนึ่งบุคคลที่เสนอวิธีการประมาณค่ารากที่สอง คือ นิวตัน โดยเป็นวิธีที่ชื่อว่า ขั้นตอนวิธีการของนิวตัน (Newton’s Algorithm) โดยการประมาณค่าคำตอบของสมการ ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์กับการหาค่าประมาณรากที่สองได้ [6]

เอกสารอ้างอิง

- [1] จินดิษฐ์ ละออปักชิน และ สมภพ วัชฤทธิ์. (2566). คณิตศาสตร์ของเราแต่เก่าก่อน: ทฤษฎีบทพีทาโกรัส. *วารสารคณิตศาสตร์*. 68 (709), น. 1 - 21.
Laorpaksin, J., and Watcharit, S. (2023). Our Mathematics From The Past: Pythagoras’ Theorem. *Mathematical Journal*. 68 (709), p. 1 - 21.
- [2] Neugebauer, O. (1935). *Mathematische Keilschrift-Texte*. Berlin: Springer.
- [3] Fowler, D., and Robson, E. (1998). Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context. *Historia Mathematica*. 25 (366), p. 1 - 78.
- [4] Knorr, W. R. (1976). Archimedes and The Measurement of The Circle: A New Interpretation. *Archive for History of Exact Sciences*. 15 (2), p. 115 - 140.
- [5] Shen, K., Crossley, J. N., and Lun, A. (1999). *The Nine Chapters on The Mathematical Art Companion and Commentary*. Oxford: Oxford University Press.
- [6] Boyer, C. B., and Merzbach, U C. (2011). *A History of Mathematics*. Canada: John Wiley & Sons Inc.