ผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิต

Static Responses of Fifth-Order Polynomial Shaped Shell under Hydrostatic Pressure

วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา[1*] คมกร ไชยเดชาธร[1] เสริมศักดิ์ ติยะแสงทอง[1] การันต์ คล้ายฉ่ำ[2] และสิทธิศักดิ์ แจ่มนาม[3]
[1]สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา
744 ถนนสุรนารายณ์ ตำบลในเมือง อำเภอเมืองนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา 30000
[2]ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน
1 หมู่ 6 ตำบลกำแพงแสน อำเภอกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม 73140
[3]ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถนนประชาราษฎร์ 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800
Weeraphan Jiammeepreecha[1*], Komkorn Chaidachatorn[1], Sermsak Tiyasangthong[1], Karun Klaycham[2] and Sittisak Jamnam[3]
[1]Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima
744 Suranarai Road, NaiMuang, Mueang, Nakhon Ratchasima, Thailand, 30000
[2]Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering at Kamphaeng Saen, Kasetsart University, Kamphaeng Saen Campus
1 Moo 6, Kamphaeng Saen, Kamphaeng Saen, Nakhon Pathom, Thailand, 73140
[3]Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok
1518 Pracharat 1 Road, Wongsawang, Bangsue, Bangkok, Thailand, 10800
[*]ผู้รับผิดชอบบทความ: weeraphan.ji@rmuti.ac.th เบอร์โทรศัพท์ 09-1779-0935
Received: 26 March 2024, Revised: 22 August 2024, Accepted: 22 August 2024

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิต การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าจะอาศัยหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าสร้างได้โดยใช้ชิ้นส่วนของคานฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าแบบ 1 มิติแบ่งตามแนวรัศมี การศึกษาครั้งนี้จะทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็น 2 ช่วงเพื่อป้องกันค่าอนุพันธ์ $dZ/dr=\infty$ และลดค่าความเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ตำแหน่งระนาบอิเควเตอร์ ที่จุดต่อทั้ง 2 ช่วงจะกำหนดให้ค่าการเคลื่อนตัวและความลาดชันมีความต่อเนื่องกัน ฟังก์ชันพลังงานของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้ใช้หลักการของงานเสมือน และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบาง ผลการศึกษาพบว่าการเปลี่ยนแปลงความลึกของระดับน้ำทะเล ความหนาและโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางจะส่งผลต่อค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า

คำสำคัญ ผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า แรงดันน้ำสถิต เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ หลักการของงานเสมือน

Abstract

This paper presents the static responses of the fifth-order polynomial shaped shell that supports the hydrostatic pressure. The geometry of the fifth-order polynomial shaped shell was computed by the differential geometry. The model of fifth-order polynomial shaped shell was desighed by using one-dimensional beam elements, which divided along the shell radius. In this study, the shell was separeted into 2 regions for preventing $dZ/dr=\infty$ and reducing the errors of result at equator plane. At the junction of two regions, was defined the function values, of displacements and continuous slopes The energy function of the shell can be derived by the principle of virtual work, and the static responses of the shell can be obtained by the finite element method. The results indicate that the sea level, shell thickness, and elastic modulus affec the displacement of the fifth-order polynomial shaped shell.

Keywords: Static Response, Fifth-Order Polynomial Shaped Shell, Hydrostatic Pressure, Differential Geometry, Principle of Virtual Work

1. บทนำ

งานวิจัยทางด้านกลศาสตร์โครงสร้างเปลือกบางได้มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นโครงสร้างที่มีขนาดน้ำหนักเบาเมื่อเทียบกับความสามารถในการรับแรงกระทำจากภายนอกและภายใน [1–2] การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางจะนิยมกำหนดให้เป็นปัญหาโครงสร้างที่มีลักษณะสมมาตรตามแนวแกน เช่นโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม รูปทรงพาราโบลา รูปทรงห่วงยาง รูปทรงกระบอก และรูปทรงกรวย เป็นต้น [3–10] ในบางกรณีโครงสร้างเปลือกบางอาจจะมีรูปแบบผสมเช่นในงานวิจัยของ Shi and Ohtsu [11] ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์ปัญหาแบบขอบเขตจำกัดโดยใช้โปรแกรมวิเคราะห์แบบเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับบรรจุของเหลวรูปทรงกรวยผสมกับรูปทรงกระบอกโดยเปรียบเทียบกับผลการทดสอบและผลการคำนวณเชิงตัวเลข Zingoni [12] ได้ทำการศึกษาความเค้นและค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงไข่สำหรับบรรจุของเหลวโดยใช้ส่วนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมทั้งหมด 4 ส่วนย่อย และใช้ทฤษฎีเมมเบรนในการวิเคราะห์ จากนั้น Zingoni et al. [13] ได้ทำการพัฒนาสมการเพื่อใช้ศึกษาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีหลายชิ้นส่วนย่อยประกอบกัน จนกระทั่งในปี 2020 ได้เริ่มมีการนำทฤษฎีเชลล์มาใช้ในการวิเคราะห์ช่วงรอยต่อระหว่างชิ้นส่วนย่อยในงานวิจัยของ Zingoni et al. [14-15] นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ อีกเช่นแบบจำลองโครงสร้างตาในงานวิจัยของ Yeh et al. [16–17] และเลนส์กระจกตาในงานของ Chen et al. [18] เพื่อใช้เป็นข้อมูลสำหรับการผ่าตัดของจักษุแพทย์

ดังนั้นบทความวิจัยนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางที่สามารถนิยามรูปทรงทางเรขาคณิตได้ด้วยฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าโดยพิจารณาผลของเมมเบรนและโมเมนต์ดัดซึ่งยังไม่มีการศึกษามาก่อน สมการที่ได้จากบทความนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ ได้ตามความเหมาะสม โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับรูปทรงของโครงสร้างเปลือกบางที่ไม่สามารถนิยามได้ด้วยฟังก์ชันทั่วไป เช่น โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม รูปทรงกรวย รูปทรงกระบอก และรูปทรงพาราโบลา เป็นต้น

สำหรับการประยุกต์ใช้โครงสร้างดังกล่าวในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเลโดยโครงสร้างดังกล่าวจะถูกติดตั้งลงในทะเลลึก ดังนั้นแรงดันน้ำสถิตจึงถูกนำมาใช้ในสมการแปรผันสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาด้วย ซึ่งลักษณะปัญหาดังกล่าวได้เคยถูกนำเสนอในงานวิจัยของ Yasuzawa [19] และ Wang et al. [20] ได้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมของ

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต จากนั้น Jiammeepreecha et al. [21] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางรูปครึ่งทรงกลมภายใต้แรงดันน้ำสถิตโดยพิจารณาผลของของเหลวที่บรรจุภายใน สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ ได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยของ Jiammeepreecha and Chucheepsakul [22] และ Tangbanjongkij et al. [23] การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าจะใช้หลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [24] การสร้างแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าสามารถทำได้โดยใช้ชิ้นส่วนของคานฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าแบบ 1 มิติแบ่งตามแนวรัศมี [25] โดยแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็น 2 ช่วงเพื่อป้องกันค่าอนุพันธ์ $dZ/dr=\infty$ และเพื่อลดค่าความเคลื่อนที่ของผลลัพธ์ตำแหน่งระนาบอิเควเตอร์ที่จุดต่อทั้ง 2 ช่วงจะกำหนดให้ค่าการเสียรูปและความลาดชันมีความต่อเนื่องกัน [26] ฟังก์ชันพลังงานของโครงสร้างเปลือกบางเขียนได้โดยใช้หลักการของงานเสมือน [27] และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าภายใต้แรงดันน้ำสถิต

2. ทฤษฎีและวิธีการดำเนินการวิจัย

2.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

วัสดุของโครงสร้างเปลือกบางมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น และความหนาของโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูป ฐานรองรับโครงสร้างเปลือกบางจะสมมติให้เป็นแบบยึดแน่นอย่างสมบูรณ์ โดยที่น้ำหนักของโครงสร้างมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับค่าแรงดันสถิตของน้ำจึงไม่นำมาพิจารณาในการศึกษาครั้งนี้ รวมถึงค่าแรงดันวิกฤติของโครงสร้าง

2.2 เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ของโครงสร้างเปลือกบาง

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าภายใต้แรงดันน้ำสามารถทำได้โดยการกำหนดให้พื้นผิว $\mathbf{S}$ เป็นพื้นผิวอ้างอิง (Reference Surface) ที่สามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\mathbf{r} = \mathrm{X}\hat{\mathbf{i}}+\mathrm{Y}\hat{\mathbf{j}}+\mathrm{Z}\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

โดยที่ X,Y,Z คือระบบพิกัดฉากสำหรับนิยามพื้นผิวที่สภาวะอ้างอิง มีค่าดังสมการที่ (2)

$$\mathrm{X} = \mathrm{r(x)}\cos \mathrm{y} \qquad (2ก)$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{r(x)}\sin \mathrm{y} \qquad (2ข)$$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z(x)} \qquad (2ค)$$

เมื่อ x และ y คือค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิวโดยวัดตามแนวแกนรัศมีและเส้นพิกัดลองจิจูด ตามลำดับ จากรูปที่ 1 พบว่าถ้าใช้พิกัด $\mathrm{r} = \mathrm{x}$ ในการวิเคราะห์พบว่าจะเกิดค่าอนุพันธ์ $dZ/dr=\infty$ ที่ตำแหน่งอิเควเตอร์ ดังนั้นเพื่อป้องกันปัญหาดังกล่าวและลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ตำแหน่งระนาบอิเควเตอร์ จึงได้ทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็น 2 ช่วงคือช่วง A และ B โดยมีค่าพารามิเตอร์เรขาคณิตได้แก่ α และ β โดยในช่วง A และ B จะได้ว่า $\mathrm{Z} = \mathrm{Z(r)}$ และ $\varphi = \varphi(\zeta)$ ตามลำดับ ดังนั้นสมการที่ (1) จะได้ค่าพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางในช่วง A ดังสมการที่ (3)

$$\mathrm{r} = \mathrm{x} \qquad (3ก)$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{x}\cos \mathrm{y} \qquad (3ข)$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{x}\sin \mathrm{y} \qquad (3ค)$$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z(x)} \qquad (3ง)$$

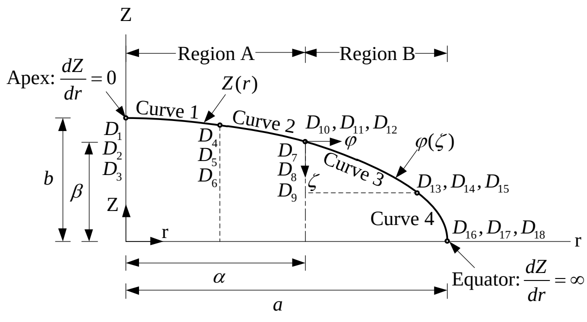
สำหรับช่วง B สามารถเขียนค่าพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางได้ดังสมการที่ (4)

$$\mathrm{r} = \alpha+\varphi(\zeta) \qquad (4ก)$$

$$\mathrm{X} = (\alpha+\varphi)\cos \mathrm{y} \qquad (4ข)$$

$$\mathrm{Y} = (\alpha+\varphi)\sin \mathrm{y} \qquad (4ค)$$

$$\mathrm{Z} = \beta-\zeta \qquad (4ง)$$



รูปที่ 1 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบาง

จากสมการที่ (1) ผลรวมเชิงอนุพันธ์ของความยาวชิ้นส่วน r สามารถหาได้ดังสมการที่ (5)

$$dr = r_x dx + r_y dy \tag{5}$$

ในที่นี้ตัวห้อย x และ y แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบาง นั่นคือ $\mathbf{r}_x=\partial\mathbf{r}/\partial x$ และ $\mathbf{r}_y=\partial\mathbf{r}/\partial y$ ตามลำดับ จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์สามารถแสดงส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor) ได้ดังสมการที่ (6)

$$E = \mathbf{r}_x\cdot\mathbf{r}_x \tag{6ก}$$

$$F = \mathbf{r}_x\cdot\mathbf{r}_y \tag{6ข}$$

$$G = \mathbf{r}_y\cdot\mathbf{r}_y \tag{6ค}$$

กำหนดให้ $A=\sqrt{E}$ และ $B=\sqrt{G}$ ดังนั้นสมการที่ (6ก) และ (6ค) ของโครงสร้างเปลือกบางในช่วง A สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ (7)

$$A=\sqrt{1+Z_x^2} \tag{7ก}$$

$$B=x \tag{7ข}$$

และในช่วง B สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ (8)

$$A=\sqrt{1+\varphi_\zeta^2} \tag{8ก}$$

$$B=\alpha+\varphi \tag{8ข}$$

สำหรับเมตริกซ์ความโค้ง (Metric Curvature) ของพื้นผิวอ้างอิง S สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ (9)

$$L=\mathbf{r}_{xx}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{9ก}$$

$$M=\mathbf{r}_{xy}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{9ข}$$

$$N=\mathbf{r}_{yy}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{9ค}$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวคเตอร์ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวอ้างอิง S ซึ่งหาได้จากสมการที่ (10)

$$\hat{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y}{AB} \tag{10}$$

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเสียรูป

เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\mathbf{R}$ บนพื้นผิวที่เกิดการเสียรูป S^* โดยอ้างอิงจากตำแหน่งของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง r บนพื้นผิวที่อ้างอิง S ที่ตำแหน่งเดียวกันสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (11)

$$R = r+q \tag{11}$$

เมื่อ q คือเวคเตอร์การเสียรูปจากพื้นผิวอ้างอิง S ไปยังพื้นผิวที่เกิดการเสียรูป S^* ซึ่งหาได้จากสมการที่ (12)

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{r}_x}{\sqrt{E}}u+\frac{\mathbf{r}_y}{\sqrt{G}}v+\hat{\mathbf{n}}w \tag{12}$$

เมื่อ (u,v,w) คือองค์ประกอบค่าการเสียรูปตามแนวสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียน แนวเส้นรอบรูป และแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ ในกรณีที่เป็นปัญหาแบบสมมาตรตามแนวแกน จะกำหนดให้ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นรอบรูปมีค่าเป็นศูนย์ (v=0) ดังนั้นสมการที่ (12) จะมีการพิจารณาค่าการเสียรูปเฉพาะแนวสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน เท่านั้น สำหรับส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ของพื้นผิวที่เสียรูป S^* สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (13)

$$E^* = \mathbf{R}_x\cdot\mathbf{R}_x \tag{13ก}$$

$$F^* = \mathbf{R}_x\cdot\mathbf{R}_y \tag{13ข}$$

$$G^* = \mathbf{R}_y\cdot\mathbf{R}_y \tag{13ค}$$

กำหนดให้ $\{g\}^T=\left[uw\ \frac{du}{dx}\ \frac{dw}{dx}\ \frac{d^2u}{dx^2}\ \frac{d^2w}{dx^2}\right]$ ดังนั้นความสัมพันธ์ของความเครียดกับระยะการเสียรูปตามนิยามความเครียดแบบลากรองจ์ (Lagrangian Strains) [28] มีค่าดังสมการที่ (14)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{L}_k^i\mathbf{g}_k \tag{14}$$

เมื่อ $\mathbf{L}_k^i$ คือเวคเตอร์ความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ มีค่าดังสมการที่ (15)

$$\{L_1\}^T=\left[0\quad -\frac{L}{E}\quad \frac{1}{A}\quad 0\quad 0\quad 0\right] \tag{15ก}$$

$$\{L_2\}^T=\left[\frac{B_x}{AB}\quad -\frac{N}{G}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\right] \tag{15ข}$$

สำหรับค่าการเปลี่ยนแปลงค่าความโค้งหลักของพื้นผิวที่กึ่งกลางความหนาของโครงสร้างเปลือกบางเนื่องจากผลของการดัดสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (16)

$$\boldsymbol{\kappa}_i = \mathbf{S}_k^i\mathbf{g}_k \tag{16}$$

เมื่อ $\mathbf{S_k^i}$ คือเวคเตอร์ค่าความโค้งหลัก มีค่าดังสมการที่ (17)

$$\{S_1\}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{A_x}{A^3} & 0 & -\frac{1}{A^2}\end{bmatrix} \quad (17ก)$$

$$\{S_2\}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{A^2B} & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (17ข)$$

2.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบาง

การจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียล ดังแสดงในรูปที่ 2 จะสามารถนิยามได้โดยใช้สมการฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า ดังสมการที่ (18)

$$y=\lfloor 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \rfloor\{a\} \quad (18)$$

เมื่อ $\{a\}$ คือเวคเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันโพลีโนเมียล มีค่าดังสมการที่ (19)

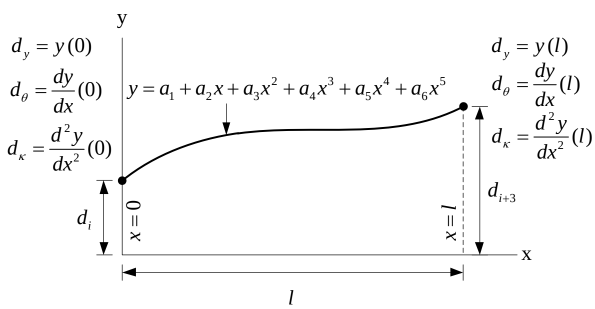
$$\{a\}=\lfloor a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \rfloor^T \quad (19)$$

จากสมการที่ (18) สามารถเขียนใหม่ได้ว่าดังสมการที่ (20)

$$\{d\}=[C_0]\{a\} \quad (20)$$

เมื่อ $\{d\}$ คือเวคเตอร์ดีกรีอิสระเฉพาะที่ (Local Degree of Freedom) มีค่าดังสมการที่ (21)

$$\{d\}^T=\begin{bmatrix}\&y(0)\frac{dy}{dx}(0)\frac{d^2y}{dx^2}(0)\ldots \\ \&\ldots y(l)\frac{dy}{dx}(l)\frac{d^2y}{dx^2}(l)\end{bmatrix} \quad (21)$$



รูปที่ 2 พิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อยฟังก์ชันโพลีโนเมียล

และ $[C_0]$ คือเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (22)

$$[C_0]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & l^2 & l^3 & l^4 & l^5\\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 4l^3 & 5l^4\\ 0 & 0 & 2 & 6l & 12l^2 & 20l^3\end{bmatrix} \quad (22)$$

จากสมการที่ (18) และ (21) จะได้สมการที่ (23)

$$y=\lfloor M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4 \quad M_5 \quad M_6 \rfloor\{d\} \quad (23)$$

ในที่นี้

$$M_1=1-10\frac{x^3}{l^3}+15\frac{x^4}{l^4}-6\frac{x^5}{l^5} \quad (24ก)$$

$$M_2=x-6\frac{x^3}{l^2}+8\frac{x^4}{l^3}-3\frac{x^5}{l^4} \quad (24ข)$$

$$M_3=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\frac{x^3}{l^4}+\frac{3}{2}\frac{x^4}{l^2}-\frac{1}{2}\frac{x^5}{l^3} \quad (24ค)$$

$$M_4=10\frac{x^3}{l^3}-15\frac{x^4}{l^4}+6\frac{x^5}{l^5} \quad (24ฆ)$$

$$M_5=-4\frac{x^3}{l^2}+7\frac{x^4}{l^3}-3\frac{x^5}{l^4} \quad (24ง)$$

$$M_6=\frac{1}{2}\frac{x^3}{l^4}-\frac{x^4}{l^2}+\frac{1}{2}\frac{x^5}{l^3} \quad (24จ)$$

2.5 พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

ค่าพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง จะแบ่งออกเป็น 2 เทอมคือเมมเบรน (Membrane Strain Energy, U_m) และการดัด (Bending Strain Energy, U_b) มีค่าดังสมการที่ (25)

$$U_m=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{\varepsilon\}^T[C']\{\varepsilon\}dx \quad (25ก)$$

$$U_b=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{\kappa\}^T[D']\{\kappa\}dx \quad (25ข)$$

เมื่อ $[C']$ และ $[D']$ คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการยืดหดตัว (Extensional Rigidity) และ การดัด (Bending Rigidity) ตามลำดับ มีค่าดังสมการที่ (26)

$$[C']=\frac{E't}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu\\ \mu & 1\end{bmatrix} \quad (26ก)$$

$$[D']=\frac{E't^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1 & \mu\\ \mu & 1\end{bmatrix} \quad (26ข)$$

ดังนั้นการแปรผันของพลังงานความเครียดในเทอมเมมเบรนและการดัด สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (27)

$$\delta U_m=\int_{x_1}^{x_2}\delta\{g\}^T[\tilde{k}_m]\{g\}\,dx \quad (27ก)$$

$$\delta U_b=\int_{x_1}^{x_2}\delta\{g\}^T[\tilde{k}_b]\{g\}\,dx \quad (27ข)$$

ในที่นี้

$$[\tilde{k}_m]=\Sigma_{i=1}^{2}\Sigma_{j=1}^{2}C'_{ij}\left(\{L_i\}\{L_j\}^T\right) \quad (28ก)$$

$$[\tilde{k}_b]=\Sigma_{i=1}^{2}\Sigma_{j=1}^{2}D'_{ij}\left(\{S_i\}\{S_j\}^T\right) \quad (28ข)$$

2.6 งานเสมือนที่เกิดจากแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น

งานเสมือนเนื่องจากแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้นสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (29ก)

$$\delta\Omega = -\int_{x_1}^{x_2} p_w\{\delta w\}ABdx \tag{29ก}$$

เมื่อ p_w คือค่าแรงดันน้ำสถิตแบบเป็นเชิงเส้น (Linear Hydrostatic Pressure) ที่กระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (29ข)

$$p_w = \rho_w g' Z_w \tag{29ข}$$

เมื่อ ρ_w คือ ค่าความหนาแน่นของน้ำ, kg/m^3
g' คือ ค่าแรงโน้มถ่วงของโลก, m/s^2
Z_w คือ ระยะในแนวดิ่งวัดจากระดับน้ำผิวน้ำ, m

2.7 ผลรวมของงานเสมือน

การคำนวณหาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิตจะได้จากผลรวมของงานเสมือน ดังสมการที่ (30)

$$\delta U_m + \delta U_b - \delta\Omega = 0 \tag{30}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าจากสมการที่ (27) และ (29ก) ลงไปในสมการที่ (30) จะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (31)

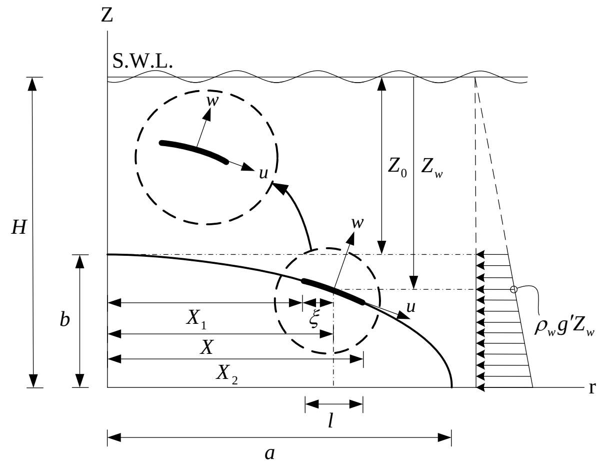
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\{g\}^T\left([\tilde{k}_m]+[\tilde{k}_b]\right)\{g\}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} p_w\{\delta w\}ABdx = 0 \tag{31}$$

2.8 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากพฤติกรรมผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าถูกนำมาพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของการรับแรงดันน้ำสถิต จะทำให้พื้นผิวของโครงสร้างเกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะเส้นเมอร์ริเดียนเท่านั้น ดังนั้นในการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [25] สามารถทำได้โดยการจำลองโครงสร้างเปลือกบางด้วยชิ้นส่วนของคานแบบ 1 มิติ และแบ่งเป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ตามแนวพิกัด x ดังแสดงในรูปที่ 3 ดังนั้นเมื่อพิจารณาชิ้นส่วนใด ๆ จะได้ว่าค่าการประมาณค่าการเคลื่อนที่ ณ จุดต่าง ๆ บนชิ้นส่วนย่อยจะสามารถทำได้โดยการกำหนดให้แต่ละจุดขั้วของชิ้นส่วนย่อยมีดีกรีอิสระเท่ากับ 6 และใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าเป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่เพื่อหาฟังก์ชันรูปร่างและประมาณค่าการเสียรูปในแนวสัมผัส u และแนวตั้งฉาก w ได้ดังสมการที่ (32)

$$\{g\}=[\psi]\{d\} \tag{32}$$

เมื่อ $\{g\}$ คือ เวคเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ
$\{d\}$ คือ เวคเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ
$[\psi]$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า



รูปที่ 3 โครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าภายใต้แรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น

จากนั้นทำการแทนค่าสมการที่ (32) ลงไปในสมการที่ (31) จะได้ดังสมการที่ (33)

$$\{\delta d\}^T \int_{x_1}^{x_2}[\psi]^T[\tilde{k}][\psi]dx\{d\}+\{f\}=0 \tag{33}$$

ในที่นี้

$$[\tilde{k}] = [\tilde{k}_m]+[\tilde{k}_b] \tag{34ก}$$

$$\{f\} = \{\delta w\}^T \int_{x_1}^{x_2} p_w\{\psi\}ABdx \tag{34ข}$$

เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ $\{d\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม $\{Q\}$ ดังนั้นสมการที่ (33) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (35)

$$[K]\{Q\}+\{F\} = 0 \tag{35}$$

เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าที่มีความสมมาตรตามแนวแกนถูกนำมาพิจารณา

ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าดังสมการที่ (36)

$$u = w_x = 0 \tag{36}$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาให้เป็นแบบยึดแน่นดังสมการที่ (37)

$$u = w = w_\zeta = 0 \tag{37}$$

และเงื่อนไขของความต่อเนื่องที่เปลี่ยนจากช่วง A ไปเป็นช่วง B จะมีค่าดังสมการที่ (38)

$$u^A - u^B = 0 \tag{38ก}$$

$$w^A - w^B = 0 \tag{38ข}$$

$$\frac{u_x^A}{\sqrt{1+Z_x^2}} - \frac{u_x^B}{\sqrt{1+\varphi_x^2}} = 0 \tag{38ค}$$

$$\frac{w_x^A}{\sqrt{1+Z_x^2}} - \frac{w_x^B}{\sqrt{1+\varphi_x^2}} = 0 \tag{38ง}$$

เงื่อนไขของความต่อเนื่องในสมการที่ (38) สามารถแก้สมการได้โดยอาศัยหลักการของตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange's multipliers) โดยจะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (39)

$$\pi_c = \{\lambda\}^T[G]\{Q\} \tag{39}$$

ในที่นี้

$$\{\lambda\}^T = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4] \tag{40ก}$$

$$\{Q\}^T = \begin{bmatrix} u^A w^A u_x^A w_x^A \ldots \\ \&\ldots u^B w^B u_\zeta^B w_\zeta^B \end{bmatrix} \tag{40ข}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+Z_x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+Z_x^2}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_\zeta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_\zeta^2}} \end{bmatrix} \tag{40ค}$$

ที่สภาวะสมดุลจะได้ว่า $\delta\pi_c = (\partial\pi_c/\partial\lambda)\delta\lambda = 0$ โดยที่ $\delta\lambda \neq 0$ นั่นคือ $\partial\pi_c/\partial\lambda = [G]\{Q\} = 0$ เมื่อนำไปรวมกับสมการที่ (31) จะได้ดังสมการที่ (41)

$$\begin{bmatrix} [K] & | & [G] \\ --- & + & --- \\ [G]^T & | & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ -- \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ -- \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{41}$$

ในกรณีที่ต้องการคำนวณหาค่าแรงภายในได้แก่ แรงในระนาบ (Membrane Forces) และโมเมนต์ (Bending Moment) สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (14) และ (16) ร่วมกับค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้น สำหรับการหาค่าความเครียดและการเปลี่ยนแปลงความโค้งหลัก ตามลำดับ จากนั้นสามารถคำนวณหาค่าแรงในระนาบและโมเมนต์ได้โดยใช้สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitutive Equation) [24]

3. ผลการวิจัยและอภิปราย

สำหรับการนำเสนอผลการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิต จะเริ่มต้นจากการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันโพลีโนเมียลในสมการที่ (19) โดยในที่นี้จะแบ่งออกเป็น 2 ช่วงคือ A และ B ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยที่ค่าดีกรีอิสระเฉพาะที่ d_1, d_2 และ d_3 สำหรับชิ้นส่วนลำดับต่อไปที่ติดกันจะเท่ากับดีกรีอิสระเฉพาะที่ d_4, d_5 และ d_6 ของชิ้นส่วนเดิม ตามลำดับ นอกจากนี้สมการของเส้นโค้งจะต้องมีเงื่อนไขขอบเขตที่จุดปลายบนสุด (Apex) ดังสมการที่ (42)

$$D_2 = 0 \tag{42ก}$$

$$\frac{D_3}{(1+D_2^2)^{3/2}} = \frac{1}{r_1} \tag{42ข}$$

เมื่อ $1/r_1$ คือค่าความโค้ง (Curvature) ณ ตำแหน่งจุดปลายบนสุด สำหรับค่าดีกรีอิสระรวมที่เปลี่ยนจากช่วง A ไปเป็นช่วง B นั่นคือ D_7, D_8, D_9 และ D_{10}, D_{11}, D_{12} จะต้องมีความต่อเนื่องกันทั้ง 3 ค่า ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขของความต่อเนื่อง (Continuity Constraint Conditions) ดังสมการที่ (43)

$$D_{10} = 0 \tag{43ก}$$

$$D_8 D_{11} + 1 = 0 \tag{43ข}$$

การกำหนดเงื่อนไข $D_{10}=0$ และ $D_8D_{11}+1=0$ เพื่อให้เกิดความต่อเนื่องระหว่างสมการเส้นโค้งที่ 2 และ 3 ภายใต้การเปลี่ยนแปลงทิศทางของระบบแกนอ้างอิงดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้นจากเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขของความต่อเนื่องดังกล่าวข้างต้น จะสามารถกำหนดสมการเส้นโค้งได้ดังสมการที่ (44)

$$y_1=1.5-0.0375x^2-0.03x^3+0.04x^4-0.015x^5 \quad (44ก)$$

$$y_2=1.40297-0.15469x-0.13875x^2+0.045x^3-0.003x^4-0.002x^5 \quad (44ข)$$

$$\varphi_3=2.79086x-1.75x^2-13.9x^3+47.9x^4-43.7x^5 \quad (44ค)$$

$$\varphi_4=0.83907+1.008x-4.60023x^2+18.35x^3-35.6244x^4+24.45x^5 \quad (44ง)$$

ในที่นี้เมื่อทำการแทนค่า $x=0$ ลงในสมการที่ (44ค) จะได้ $\varphi_3=0$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $D_{10}=0$ และเมื่อทำการแทนค่า $x=\alpha/2$ และ $x=0$ ลงในสมการที่ (44ข) และ (44ค) ตามลำดับ จะพบว่าผลคูณค่าความชันของเส้นโค้งจะมีสอดคล้องกับเงื่อนไข $D_8D_{11}+1=0$ ซึ่งทำให้เส้นโค้งมีค่าความชันความต่อเนื่อง

สำหรับโปรแกรมการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกจะถูกเขียนบน MATLAB 2015b โดยเริ่มต้นจากการทดสอบระยะการเสียรูปที่ปลายด้านบนสุดของโครงสร้างเพื่อหาค่าจำนวนชิ้นส่วนย่อยที่เหมาะสม โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 ในที่นี้กำหนดให้จำนวนชิ้นส่วนย่อยในช่วง B มีค่าเป็น 2 เท่าของช่วง A เพื่อป้องกันผลของความคลาดเคลื่อนตรงบริเวณฐานรองรับ จากตารางที่ 2 พบว่าเมื่อจำนวนชิ้นส่วนย่อยมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลง ซึ่งงานวิจัยชิ้นนี้จึงได้กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าไม่เกินร้อยละ 0.05 เมื่อเทียบกับการเลือกใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยที่สูงขึ้น ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้ชิ้นส่วนย่อยในช่วง A และ B จำนวน 10 และ 20 ชิ้น ตามลำดับ ซึ่งมีจำนวนชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด 30 ชิ้นส่วน จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากงานวิจัยนี้ และศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก โดยทำการแปรเปลี่ยนค่าระดับน้ำ ความหนา และโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบาง ซึ่งจะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้าง

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการเปรียบเทียบกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS [29] โดยใช้ชิ้นส่วนแบบจำลอง SAX2 ซึ่งเป็นการประมาณค่าการเคลื่อนที่แบบฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับสอง (Axisymmetric Quadratic Shell) จำนวน 24 ชิ้นส่วนย่อย พบว่ารูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิตจะมีค่าใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 4 เนื่องจากค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าน้อย ดังนั้นในบทความนี้จึงได้ทำการคูณขยายค่าการเสียรูปเพิ่มขึ้น (Displacement Amplification Factor) เท่ากับ 100 เพื่อให้เห็นรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางภายหลังการเสียรูปมีความชัดเจนมากยิ่งขึ้น และเมื่อทำการเปรียบเทียบกับค่าระยะการเสียรูปที่ปลายด้านบนสุดของโครงสร้างจะพบว่ามีค่าความแตกต่างอยู่ที่ร้อยละ 0.45 ซึ่งถือว่าน้อยมาก นอกจากนี้ยังได้ทำการเปรียบเทียบระยะการเสียรูปในแนวราบและแนวดิ่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า พบว่ามีค่าแตกต่างเล็กน้อย ดังแสดงในรูปที่ 5 อย่างไรก็ตามการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS จะพบว่ามีข้อจำกัดในหลายประการเช่นไม่สามารถคำนวณหาค่าการเสียรูปตามแนวสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนได้โดยตรง ซึ่งค่าการเสียรูปทั้งสองถือเป็นค่าพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญในการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางเชิงลึกซึ่งจะกล่าวถึงในลำดับต่อไป

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

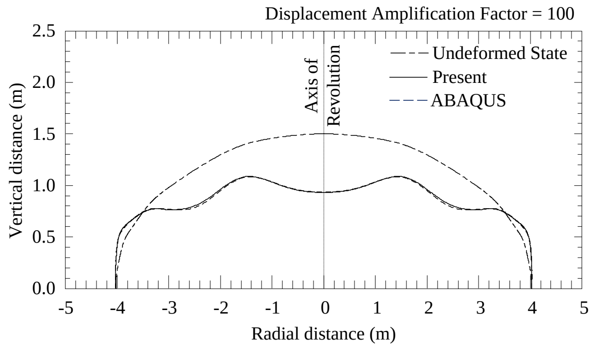
รายการ	ปริมาณ
1. ความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง	0.05 เมตร
2. ความลึกของระดับน้ำ	50 เมตร
3. โมดูลัสยืดหยุ่น	2×10^{11} ปาสคาล
4. อัตราส่วนปัวส์ซอง	0.3
5. ความหนาแน่นของน้ำ	1000 กิโลกรัม/เมตร^3

ตารางที่ 2 การทดสอบการลู่เข้าของระยะการเสียรูปที่ปลายด้านบนของโครงสร้างเปลือกบาง

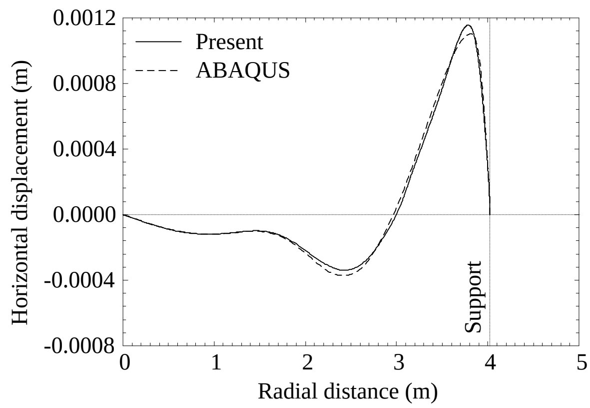
จำนวนชิ้นส่วนย่อย	ระยะการเสียรูป (เมตร)
6	-0.005439
12	-0.005646
18	-0.005687
24	-0.005699
30	-0.005703
36	-0.005705

3.2 ผลของค่าระดับน้ำที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

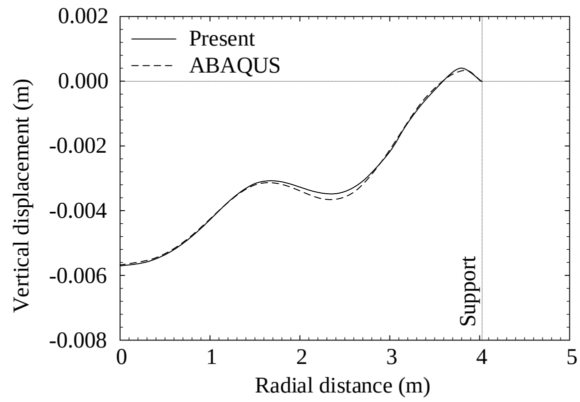
สำหรับการศึกษาผลของระดับน้ำที่มีต่อผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าสามารถทำได้โดยการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความสูงของระดับน้ำต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางจาก 500 ถึง 2500 โดยที่ค่าความหนาของโครงสร้างเป็นค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง สำหรับข้อมูลและคุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าที่ใช้ในการคำนวนจะใช้ค่าดังแสดงในตารางที่ 1 ผลการศึกษาพบว่าแนวโน้มการเสียรูปของโครงสร้างมีลักษณะคล้ายคลึงกันดังแสดงในรูปที่ 6 นั่นคือเมื่อความสูงของระดับน้ำมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้โครงสร้างมีค่าการเสียรูปเพิ่มสูงขึ้น สำหรับระยะการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนภายใต้การเปลี่ยนแปลงค่าระดับน้ำจะแสดงได้ดังรูปที่ 7 นอกจากนี้ยังพบว่าค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนจะมีจุดดัดกลับที่เปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นลบอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันไม่ขึ้นอยู่กับค่าความลึกของระดับน้ำ ดังแสดงในรูปที่ 7(ข) อีกด้วย นอกจากนี้ยังพบว่าที่ตำแหน่งดังกล่าวเกิดขึ้นในช่วงของเส้นโค้งดังสมการที่ (44ค) และมีความสำคัญในการวิเคราะห์เสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบางเนื่องจากเป็นตำแหน่งที่เกิดปัญหาการสูญเสียเสถียรภาพของโครงสร้าง (Loss of Stability) [30-31]



รูปที่ 4 ผลการเปรียบเทียบรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า

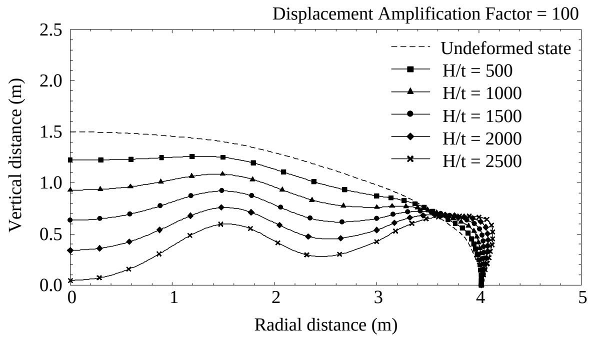


(ก) การเสียรูปตามแนวราบ

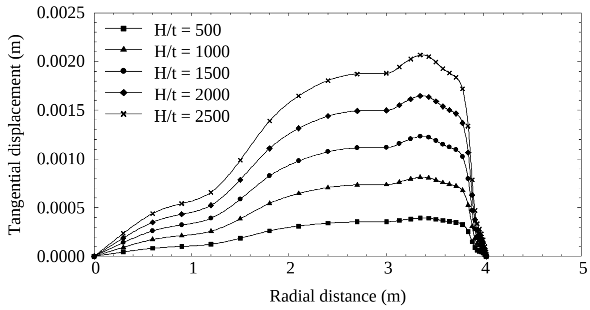


(ข) การเสียรูปแนวดิ่ง

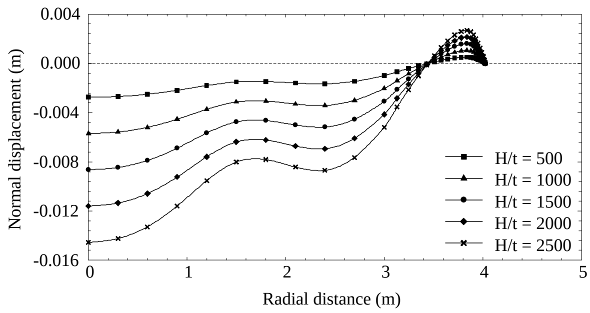
รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปกับแนวแกนรัศมีของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า



รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนระดับน้ำต่อรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า



(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน

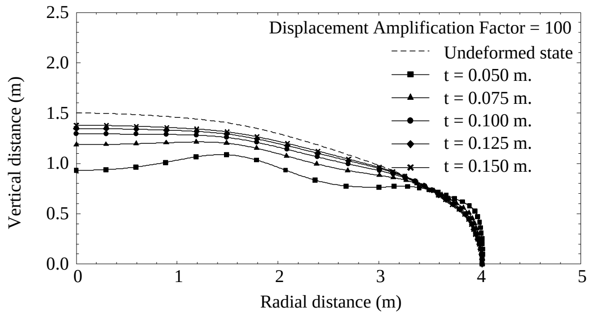


(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

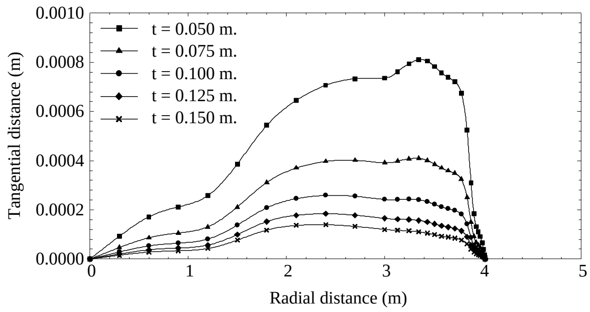
รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนระดับน้ำต่อระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า

3.3 ผลของความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

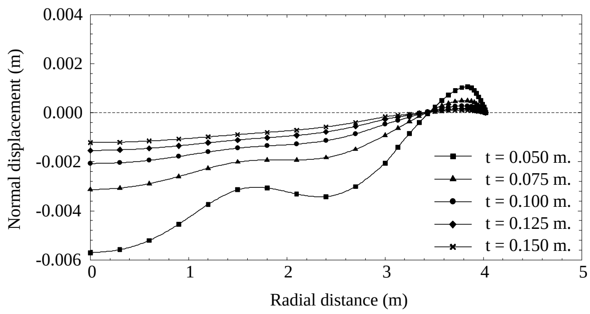
การศึกษาผลของความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า สามารถทำได้โดยใช้ความหนาตั้งแต่ 0.05 ถึง 0.15 เมตร ในขณะที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 มีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่าเมื่อความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้การเสียรูปของโครงสร้างมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 8 อย่างไรก็ตามพบว่าค่าการเสียรูปมีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นแบบไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงเนื่องจากผลของค่าการดัดที่เกิดขึ้น ซึ่งจะแตกต่างจากงานวิจัยของ Jiammeepreecha et al. [6] สำหรับรูปที่ 9 จะแสดงผลของการแปรเปลี่ยนความหนาที่มีต่อระยะการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า ตามลำดับ ซึ่งพบว่าค่าการเสียรูปทั้งสองจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าความหนามีค่าลดลง และค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนจะมีจุดดัดกลับที่เปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นลบอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันเหมือนกับการแปรเปลี่ยนค่าความสูงระดับน้ำ



รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาต่อรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า



(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

รูปที่ 9 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาต่อระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า

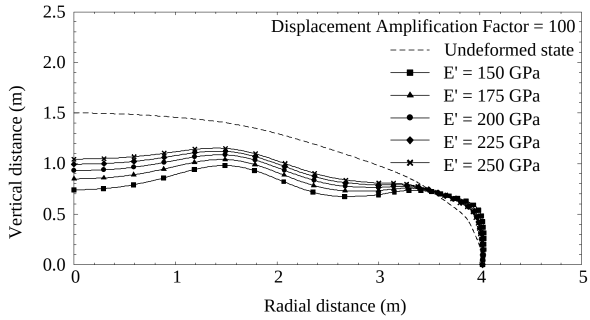
3.4 ผลของโมดูลัสยืดหยุ่นที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

สำหรับค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะทำการศึกษาในครั้งนี้คือผลของโมดูลัสยืดหยุ่นที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า โดยทำการแปรเปลี่ยนค่าโมดูลัสยืดหยุ่นตั้งแต่ 150×10^3 ถึง 250×10^3 เมกะปาสคาล พบว่าค่าการเสียรูปจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อโมดูลัสยืดหยุ่นมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 10 และ 11 สำหรับรูปร่างของโครงสร้างหลังการเสียรูป ระยะการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า ตามลำดับ นั่นคือความแข็งแกร่งของโครงสร้างจะมีค่าลดลงนั่นเอง นอกจากนี้ยังพบว่าค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากจะมีจุดดัดกลับที่ตำแหน่งเดียวกันเช่นเดียวกับกรณีการแปรเปลี่ยนค่าความสูงระดับน้ำและความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง

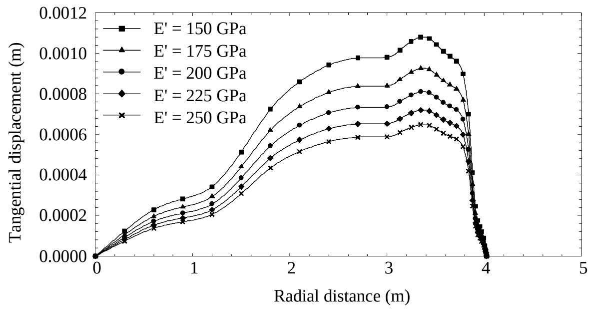
จากผลการแปรเปลี่ยนค่าระดับน้ำ ความหนา และโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบาง พบว่าจุดดัดกลับที่เกิดขึ้นในรูปที่ 7(ข), 9(ข) และ 11(ข) เกิดที่ตำแหน่งเดียวกันเนื่องจากรูปทรงของโครงสร้างและแรงดันที่กระทำมีลักษณะแบบเดียวกันจึงส่งผลให้ตำแหน่งดังกล่าวเกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกันหรือใกล้เคียงกัน ในกรณีที่ต้องการคำนวณหาค่าแรงภายในได้แก่ แรงในระนาบ (Membrane Forces) และโมเมนต์ (Bending Moment) สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (14) และ (16) ร่วมกับค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้น สำหรับการหาค่าความเครียดและการเปลี่ยนแปลงความโค้งดัดตามลำดับ จากนั้นสามารถคำนวณหาค่าแรงในระนาบและโมเมนต์ได้โดยใช้สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitutive Equation) [24]

4. บทสรุป

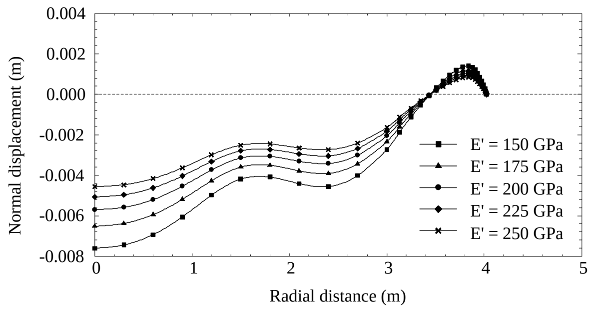
การศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้ารับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ในการกำหนดรูปทรงโครงสร้าง และใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าการเสียรูปทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าสามารถสรุปได้ดังนี้



รูปที่ 10 ผลของการแปรเปลี่ยนโมดูลัสยืดหยุ่นต่อรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า



(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

รูปที่ 11 ผลของการแปรเปลี่ยนโมดูลัสยืดหยุ่นต่อระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า

4.1 ความลึกของระดับน้ำ ความหนา และโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางจะส่งผลกระทบโดยตรงต่อระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า

4.2 ค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากจะมีจุดดัดกลับที่เปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นลบอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันไม่ขึ้นอยู่กับค่าความลึกของระดับน้ำ ความหนา และโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบาง

4.3 วิธีการวิเคราะห์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางและสามารถรวมผลของแรงดันที่เกิดขึ้นเนื่องจาก

ของเหลวที่บรรจุภายในได้ ซึ่งจะเป็นงานวิจัยเชิงลึกในลำดับต่อไป โดยที่โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS จะมีข้อจำกัดในเรื่องดังกล่าว

5. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับการสนับสนุนจากกองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ตามคำรับรองการปฏิบัติตามเงื่อนไขของการอนุมัติงบประมาณโครงการวิจัยทุนสนับสนุนงานมูลฐาน (Fundamental Fund) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2567 เลขที่ FF67/P1-038

6. เอกสารอ้างอิง

[1] Reddy JN. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press;2007.

[2] Zingoni A. Liquid-containment shells of revolution: a review of recent studies on strength, stability and dynamics. Thin-Walled Struct. 2015;87:102-14.

[3] Pai PF, Young LG. Fully nonlinear modeling and analysis of precision membranes. Int J. Comp Engrg Sci. 2003;4(1):16-65.

[4] Rotter JM, Sadowski, AJ. Cylindrical shell bending theory for orthotropic shells under general axisymmetric pressure distributions. Engrg Struct. 2012;42:258-65.

[5] Al-Gahtani H, Khathlan A, Sunar M, Naffa'a M. Local pressure testing of spherical vessels. Int J. Pres Ves Pip. 2014;114-115:61-8.

[6] Jiammeepreecha W, Chucheepsakul S, Huang T. Nonlinear static analysis of deep water axisymmetric spherical half drop shell. KMUTT Res Develop J. 2014;37(1):239-55. Thai.

[7] Jiammeepreecha W, Detphan S, Chaidachatorn K, Ngohpok C, Tiyasangthong S, Detphan P, Lerdchaipong K, Jamnam S. Large displacement analysis of toroidal dome structures having variable thickness under external pressure. RMUTL Engrg J. 2023;9(1). Thai.

[8] Zingoni A. Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering: Theory and Analysis. London: ICE Publishing;2017.

[9] Tangbanjongkij C, Chucheepsakul S, Jiammeepreecha W. Large displacement analysis of ellipsoidal pressure vessel heads using the fundamental of differential geometry. Int J Pres Ves Pip. 2019;172:337-47.

[10] Jiammeepreecha W, Suebsuk J, Chucheepsakul S. Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure. J. Struct Engrg. 2020;146(1):04019169.

[11] Shi Z, Ohtsu M. Application of linear programming to the limit analysis of conical-shaped steel water tanks. J. Struct Engrg. 2001;127(11):1316-23.

[12] Zingoni A. Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors: membrane effects. Engrg Struct. 2001;23(11):1365-72.

[13] Zingoni A, Mokhothu B, Enoma N. A theoretical formulation for the stress analysis of multi-segmented spherical shells for high-volume liquid containment. Engrg Struct. 2015;87:21-31.

[14] Enoma N, Zingoni A. Analytical formulation and numerical modelling for multi-shell toroidal pressure vessels. Comp Struct. 2020;232:105811.

[15] Zingoni A, Enoma N. Strength and stability of spherical-conical shell assemblies under external hydrostatic pressure. Thin-Walled Struct. 2020;146:106472.

[16] Yeh HS, Huang T, Schachar RA. A solid shell element for the shell structured eyeball with application to radial keratotomy. Int J. Numer Method Engrg. 1992;33:1875-90.

[17] Yeh HS, Huang T, Schachar RA. A closed shell structured eyeball model with application to radial keratotomy. J. Biomech Engrg. 2000; 122(5):504-10.

[18] Chien CHM, Huang T, Schachar RA. Analysis of human crystalline lens accommodation. J. Biomech, 2006;39(4):672-80.

[19] Yasuzawa Y. Structural response of underwater half drop shaped shell: Proceedings of the 3rd International Offshore and Polar Engineering Conference; 1993 June 6-11; Singapore. 1993. p. 476-81.

[20] Wang CM, Vo KK, Chai YH. Membrane analysis and minimum weight design of submerged spherical domes. J. Struct Engrg. 2006;132(2): 253-59.

[21] Jiammeepreecha W, Chucheepsakul S, Huang T. Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume. Engrg Struct. 2014;68:111-20.

[22] Jiammeepreecha W, Chucheepsakul S, Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. Thin-Walled Struct. 2017;116:12-8.

[23] Tangbanjongkij C, Chucheepsakul S, Jiammeepreecha W. Analytical and numerical analyses for a variety of submerged hemi-ellipsoidal shells. J. Engrg Mech. 2020;146: 04020066.

[24] Langhaar H. Foundations of Practical Shell Analysis. Illinois: University of Illinois;1964.

[25] Cook RD, Malkus DS, Plesha ME, Witt RJ. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons;2002.

[26] Goan LA. An Analysis of an Axisymmetrical Closed Shell Subjected to Equatorial Pull with Application to Accommodation of the Crystalline Lens. PhD thesis. The University of Texas at Arlington; 2000.

[27] Langhaar H. Energy Methods in Applied Mechanics. New York: John Wiley & Sons;1962.

[28] Mase GT, Mase GE. Continuum Mechanics for Engineers. Florida: CRC Press:1999.

[29] Abaqus. ABAQUS User's Manual, Rhode Island: Hibbit, Karlsson and Sorensen;2016.

[30] Shilkrut DI. Bifurcation in tension of nonlinear spherical caps. J. Engrg Mech. 1983;109(1):289-95.

[31] Ross CTF, Youster P, Sadler R. The buckling of plastic oblate hemi- ellipsoidal dome shells under external hydrostatic pressure. Ocean Engr. 2001;28(7):789-803.