

อิทธิพลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในกระบวนการหล่อเหล็กต่อเนื่อง

ปิยนันท์ ฝาโสม¹⁾ และ เบญจวรรณ วิวัฒน์ปฐพี²⁾

1) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

2) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล* Email: scbww@mahidol.ac.th

บทคัดย่อ

ผลิตภัณฑ์เหล็กที่ได้จากกระบวนการหล่อเหล็กแบบต่อเนื่อง มักมีผิวไม่เรียบมีลักษณะเป็นรอยคลื่น (oscillation marks) รอยคลื่นที่เกิดขึ้นนี้ทำให้ผู้ผลิตต้องเสียต้นทุนเพิ่มขึ้น เพื่อปรับแต่งผิวของแท่งเหล็ก นอกจากนี้ความลึกของรอยคลื่นที่มากเกินไปอาจทำให้เกิดการประทุของเหล็กหลอมเหลวบริเวณใต้เตาหล่อ ซึ่งก่อให้เกิดความเสียหายมาก ดังนั้นการลดขนาดความลึกของรอยคลื่นที่เกิดขึ้นจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง

เป็นที่ทราบว่ามีพารามิเตอร์หลายตัวที่มีอิทธิพลต่อขนาดความลึกของรอยคลื่น และจากทดลองประยุกต์ใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในกระบวนการหล่อเหล็ก พบว่ามีผลช่วยลดขนาดความลึกของรอยคลื่น นอกจากนี้ยังทำให้ผลิตภัณฑ์เหล็กที่ได้มีคุณภาพดีขึ้นด้วย วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยนี้คือ การศึกษาและพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบริเวณเตาหล่อ จากนั้นได้นำระเบียบวิธี Point Collocation Method มาหาผลเฉลยของแบบจำลองที่สร้างขึ้น

คำสำคัญ กระบวนการหล่อเหล็กต่อเนื่อง, สนามแม่เหล็กไฟฟ้า, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, Point Collocation Method

1. บทนำ

อุตสาหกรรมเหล็กเป็นอุตสาหกรรมพื้นฐานที่สำคัญต่อการพัฒนาภาคอุตสาหกรรมของประเทศ ดังนั้นรัฐบาลจึงส่งเสริมให้มีการหล่อเหล็กเพิ่มมากขึ้น สำหรับกระบวนการหล่อเหล็กที่กำลังเป็นที่นิยมกว่ากระบวนการหล่อเหล็กแบบดั้งเดิม ก็คือ กระบวนการหล่อเหล็กแบบต่อเนื่อง (Continuous Casting Process) โดยขั้นตอนการหล่อ เริ่มจากเหล็กหลอมเหลว (the molten steel) จะถูกฉีดเข้ามาที่เตาหล่อ ซึ่งมีการเคลื่อนที่ขึ้นลงอย่างสม่ำเสมอ ในระหว่างที่เหล็กหลอมเหลวไหลลงสู่เครื่องหล่อ นั้น จะมีการพ่นน้ำเย็นที่บริเวณผิวนอกของเครื่องหล่อตลอดเวลา เหล็กที่บริเวณรอบนอกจะเริ่มแข็งตัวก่อน แต่ตรงกลางเตาหล่อจะยังเป็นเหล็กหลอมเหลวอยู่ (liquid pool) เหล็กที่แข็งตัวจะถูกลากออกมาจากเตาหล่อด้วยชุดของลูกกลิ้ง จากนั้นจะถูกตัดออกไปใช้งาน และเพื่อที่จะศึกษาผลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีต่อการหล่อเหล็ก จึงได้มีการติดตั้งขด

ลวด (coil) ขึ้นที่สองข้างของเตาหล่อด้วย ในระหว่างขั้นตอนของการหล่อเหล็กนั้น จะมีการใส่ผงหล่อลื่นที่บริเวณผิวด้านบนสุดของเหล็กหลอม เมื่อผงนี้สัมผัสกับเหล็กหลอมเหลวซึ่งมีอุณหภูมิสูงแล้ว จะละลายเป็นน้ำหล่อลื่นแทรกไป อยู่ระหว่างผนังด้านในของเตาหล่อกับเหล็กหลอมเหลว เพื่อป้องกันไม่ให้ เหล็กหลอมที่เริ่มแข็งตัวแล้ว ติดกับผนังของเตาหล่อ เนื่องจากในกระบวนการหล่อเหล็กนั้น เตาหล่อจะมีการเคลื่อนที่ขึ้นลงเป็นจังหวะสม่ำเสมอ ทำให้เกิดแรงดันจากสารหล่อลื่น ดันเหล็กหลอมให้เกิดเป็นรอยลึก ซึ่งมีลักษณะขนานกัน และแต่ละรอยมีระยะห่างค่อนข้างสม่ำเสมอ เรียกว่า รอยคลื่น (oscillation marks) (Pinheiro, 1998) รอยคลื่นที่เกิดขึ้นนี้สามารถทำให้เกิดรอยแตกของแท่งเหล็ก ซึ่งเป็นสาเหตุให้เนื้อเหล็กทำปฏิกิริยากับอากาศ เกิดเป็นสนิม (Brimacombe และคณะ, 1983) ทำให้ต้องเสียค่าใช้จ่ายส่วนหนึ่งเพื่อ ปรับแต่งผิวของเหล็ก ซึ่งเป็นการเพิ่มต้นทุนในการผลิตเหล็ก นอกจากนี้ถ้า

ความลึกของรอยคลื่นมากเกินไป จะทำให้เกิดการปะทุของเหล็กหลอมบริเวณด้านใต้เตาหลอ ซึ่งอาจต้องหยุดผลิตเหล็กในครั้งนั้น ก่อให้เกิดความเสียหายต่อผู้ผลิตอย่างมาก ดังนั้นการศึกษาปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อขนาดความลึกของรอยคลื่นที่ผิวของแท่งเหล็ก จึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง เป็นที่ทราบกันดีว่ามีพารามิเตอร์หลายตัว ซึ่งมีอิทธิพลต่อขนาดความลึกของรอยคลื่น จากการศึกษา โดยอาศัยการทดลองของนักวิจัยหลายท่านพบว่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่ง ซึ่งมีผลทำให้ขนาดความลึกของรอยคลื่นลดลงได้ นอกจากนี้ยังทำให้ผลิตภัณฑ์ของเหล็กดีขึ้นอีกด้วย แต่ยังมีจำนวนน้อย ที่ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ มาอธิบายว่า สนามแม่เหล็กไฟฟ้าทำให้ผิวของผลิตภัณฑ์เหล็กดีขึ้นได้อย่างไร

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เมื่อมีการประยุกต์สนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยการติดตั้งขดลวด (coil) ขึ้นที่สองข้างของเตาหลอนั้น จะมีปริมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเกิดขึ้น ซึ่งความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆ เหล่านี้อธิบายได้ด้วย สมการควบคุม 2 ชุด คือ Maxwell's equations และ Constitutive equations

Maxwell's equations ประกอบด้วยสมการ

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_d \quad (4)$$

เมื่อ $\mathbf{H}$ คือ สนามแม่เหล็กในสสาร มีหน่วยเป็นเทสลา

$\mathbf{E}$ คือ สนามไฟฟ้า มีหน่วยเป็นนิวตัน/คูลอมบ์

$\mathbf{J}$ คือ เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า มีหน่วยเป็น แอมแปร์ / ตร.ม.

$\mathbf{D}$ คือ สนามไฟฟ้าในสสาร มีหน่วยเป็น นิวตัน / คูลอมบ์

$\mathbf{B}$ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็กมีหน่วยเป็นเทสลา

ρ_d คือ ความหนาแน่นของประจุอิสระมีหน่วยเป็น คูลอมบ์ / ตร.ม

Constitutive equations ประกอบด้วยสมการ

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_d \mathbf{v} \quad (7)$$

เมื่อ μ คือ ความสามารถที่จะให้สนามแม่เหล็กแพร่ผ่านได้ของสาร

ϵ คือ ความสามารถที่จะให้สนามไฟฟ้าแพร่ผ่านได้ของสาร

σ คือ ความสามารถในการนำไฟฟ้าของสาร

$\mathbf{v}$ คือ ความเร็วของประจุ

เนื่องจากเหล็กที่ถูกหลอมเหลว (molten metal) มีคุณสมบัติเป็นตัวนำไฟฟ้าที่ดี ดังนั้นเราสมมติให้ประจุสามารถกระจายไปยังส่วนต่างๆ ได้สม่ำเสมอ นั่นคือ

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

ดังนั้น สมการ (1) กลายเป็น

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (9)$$

ในปัญหานี้ค่า magnetic Reynolds number ($R_m = \mu \sigma v L$) มีค่าน้อยมากๆ ($\ll 1$) ดังนั้นเทอมของ $\mathbf{v}$ เป็นศูนย์

จากข้อกำหนดทั้งหมดทำให้ได้ชุดของสมการใหม่ คือ

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (13)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (14)$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหา เราจะเปลี่ยน Maxwell's equations และ Constitutive equations ให้อยู่ในรูปของ magnetic vector potential A และ electric scalar potential ϕ

เนื่องจาก divergence ของ curl ของ vector field มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น สมการ (12) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

เมื่อ $\mathbf{A}$ คือ magnetic vector potential จาก

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A})$$

แทนค่า $\mathbf{H}$ ในสมการ (10) จะได้

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = \mathbf{J} \quad (15)$$

แทนค่า $\mathbf{B}$ ในสมการ (11) และจัดรูปใหม่ จะได้

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (16)$$

เนื่องจาก $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ เป็น conservative ดังนั้นจะมี

scalar potential ϕ ซึ่ง

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (17)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (18)$$

ความหนาแน่นของกระแสในสมการ (14) เป็นความหนาแน่นของกระแสที่ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้น (induced current density) เขียนแทนด้วย $\mathbf{J}_e$ ดังนั้นเราได้ว่า

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (19)$$

แทนค่า $\mathbf{E}$ ในสมการที่ (19) จะได้

$$\mathbf{J}_e = \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \quad (20)$$

เรานิยาม ความหนาแน่นของกระแสทั้งหมด (total current density) เขียนแทนด้วย $\mathbf{J}$ เป็นผลบวกของความหนาแน่นของกระแสที่ถูกเหนี่ยวนำ, $\mathbf{J}_e$, กับความหนาแน่นของกระแสที่เราให้เข้าไป (forced current density) เขียนแทนด้วย $\mathbf{J}_s$ นั่นคือ เราได้สมการ

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi + \mathbf{J}_s \quad (21)$$

แทนค่า $\mathbf{J}$ ในสมการ (9) และ (15) จะได้

$$\nabla \cdot \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi + \mathbf{J}_s \right) = 0 \quad (22)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi + \mathbf{J}_s \quad (23)$$

จะเห็นว่า จาก Maxwell's equations และ Constitutive equations สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูป magnetic vector potential $\mathbf{A}$ และ electric scalar potential ϕ ได้ดังสมการ (22) และ (23)

สำหรับปัญหานี้ เราได้ประยุกต์ใช้ sinusoidal current ดังนั้น เราสามารถสมมติให้ผลเฉลย $\mathbf{A}$ เขียน

$$\text{อยู่ในรูป} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(x) e^{j\omega t}$$

แทนค่า $\mathbf{A}$ ลงในสมการ (22) และ (23) จะได้

$$\nabla \cdot (-\sigma j\omega \mathbf{A} - \sigma \nabla \phi + \mathbf{J}_s) = 0 \quad (24)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = -\sigma j\omega \mathbf{A} - \sigma \nabla \phi + \mathbf{J}_s \quad (25)$$

ระบบสมการซึ่งประกอบด้วยสมการ (24) และ (25) รวมทั้งเงื่อนไขขอบที่เหมาะสม สามารถใช้อธิบายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติได้ แต่สำหรับโครงงานวิจัยนี้ เราพิจารณาในระบบใน 2 มิติเท่านั้น และสำหรับแบบจำลอง 2 มิติเพื่ออธิบายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระนาบ $x-z$ นั้น เรากำหนดให้

$$\mathbf{A} = (0, f(x, z), 0)$$

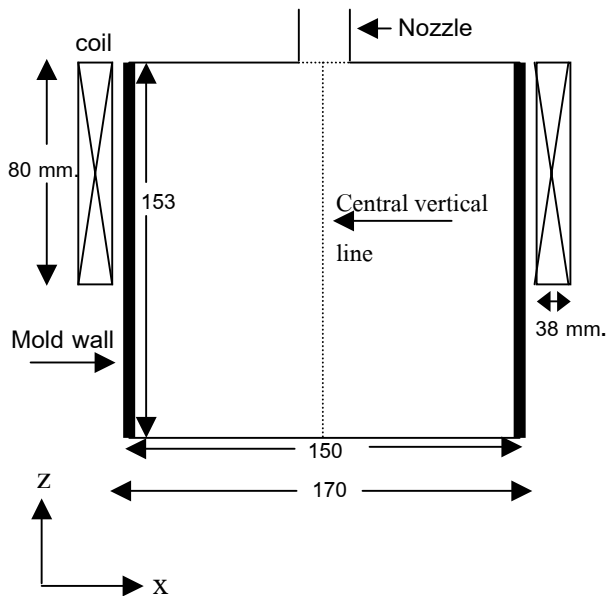
$$\mathbf{J}_s = (0, J(x, z), 0)$$

ϕ เป็นค่าคงที่

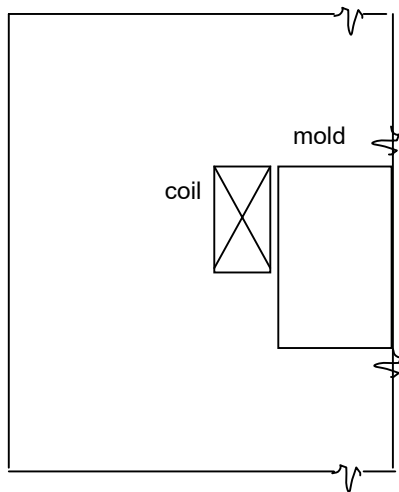
แทนค่า $\mathbf{A}$ ในสมการ (25) และพิจารณาในแนวแกน y เราจะได้

$$\sigma j\omega f - \frac{1}{\mu} \nabla^2 f = J \quad (26)$$

เนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนั้น สามารถกระจายไปได้ทั่วทุกทิศทุกทาง แต่บริเวณซึ่งไกลออกไปค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีค่าลดลง เราสมมติให้สนามแม่เหล็กมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับบริเวณที่ไกลออกไปกว่า 6 เท่าของเตาหล่อ เนื่องจากเตาหล่อมีความสมมาตร เราจึงศึกษาเพียงครึ่งหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นพื้นที่คำนวณ Ω ที่ศึกษา มีขนาดดังรูปที่ 2



รูปที่ 1 แสดงพื้นที่ตัดขวางของเตาหล่อในแนวแกน x-z



รูปที่ 2 แสดงพื้นที่คำนวณ Ω

3. เงื่อนไขค่าขอบ (Boundary Conditions)

-ในระนาบที่สมมาตร เราสมมติว่า ฟลักซ์แม่เหล็กไม่สามารถทะลุผ่านไปยังด้านตรงข้ามได้ นั่นคือ $f = 0$

-บริเวณขอบนอกของพื้นที่คำนวณ กำหนดให้ $f = 0$

เราจะหาผลเฉลย f ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (26) และเงื่อนไขค่าขอบที่กำหนดไว้ข้างต้น ภายใต้พื้นที่คำนวณ Ω

4. ระเบียบวิธี Point Collocation Method

$$\text{จากสมการ } \sigma j \omega f - \frac{1}{\mu} \nabla^2 f - J = 0$$

$$\text{ให้ } L(f) = \sigma j \omega f - \frac{1}{\mu} \nabla^2 f - J = 0$$

เราต้องการประมาณค่า f ด้วย $\hat{f}$ ดังนั้นเมื่อเราแทนค่า $\hat{f}$ ลงใน $L(f)$ จะมีฟังก์ชันเศษเหลือ (residual function) , $R(x,z)$, และสำหรับปัญหานี้

$$R(x,z) = L(\hat{f}) = \sigma j \omega \hat{f} - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f} - J$$

จากนั้นประยุกต์ใช้วิธี Point Collocation Method โดยเริ่มจากการคูณค่าเศษเหลือ $R(x,z)$ ด้วยฟังก์ชันดิแรกเดลต้า (dirac delta function), δ , จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดพื้นที่คำนวณ Ω แล้วกำหนดให้เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} \delta(x-\xi, z-\eta) R(x,z) d\Omega = 0 \quad (27)$$

โดยที่ ฟังก์ชันดิแรกเดลต้าสำหรับสองมิติ นิยามโดย

$$\delta(x-\xi, z-\eta) = \begin{cases} \infty & ; r = 0 \\ 0 & ; r \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2}$$

ฟังก์ชันดิแรกเดลต้านี้มีคุณสมบัติว่า

$$\int_{\Omega} \delta(x-\xi, z-\eta) f(x,z) d\Omega = \begin{cases} 0 & ; (\xi, \eta) \notin \Omega \\ f(\xi, \eta) & ; (\xi, \eta) \in \Omega \end{cases}$$

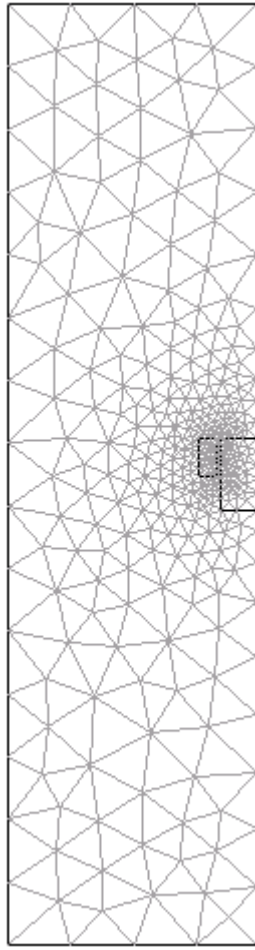
แทนค่า $R(x,z)$ ลงในสมการ (27) จะได้

$$\int_{\Omega} \delta(x-\xi, z-\eta) [\sigma j \omega \hat{f} - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f} - J] d\Omega = 0$$

จากนั้นแบ่งพื้นที่คำนวณออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปสามเหลี่ยมจำนวน 845 เอลิเมนต์ ซึ่งพื้นที่คำนวณของเอลิเมนต์ย่อยนี้ถูกแทนด้วย Ω^e

$$\text{โดยที่ } \bigcup_{e=1}^{845} \Omega^e = \Omega$$

และ สำหรับ $i \neq j$; $\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset$ ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงพื้นที่คำนวณซึ่งถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปสามเหลี่ยม

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\Omega} \delta(x-\xi, z-\eta) \left[\sigma j \omega \hat{f} - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f} - J \right] d\Omega \\ = \sum_{e=1}^{845} \int_{\Omega^e} \delta(x-\xi, z-\eta) \left[\sigma j \omega \hat{f}^e - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f}^e - J^e \right] d\Omega^e \\ \text{นั่นคือ} \\ \sum_{e=1}^{845} \int_{\Omega^e} \delta(x-\xi, z-\eta) \left[\sigma j \omega \hat{f}^e - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f}^e - J^e \right] d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

จากนั้น พยายามคำนวณแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งก็คือพิจารณาพจน์

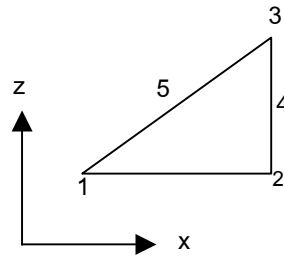
$$\int_{\Omega^e} \delta(x-\xi, z-\eta) \left[\sigma j \omega \hat{f}^e - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f}^e - J \right] d\Omega^e = 0$$

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันดิแรกเดลต้า สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\sigma j \omega \hat{f}^e(\xi, \eta) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \hat{f}^e(\xi, \eta) - J^e(\xi, \eta) = 0$$

$$\text{เมื่อ } (\xi, \eta) \in \Omega^e \quad (29)$$

สำหรับเอลิเมนต์ย่อยรูปสามเหลี่ยมที่มี 6 จุดต่อ พื้นที่จะคำนวณเป็น Ω^e ดังรูป



สมมติให้ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าสำหรับเอลิเมนต์ อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นโค้งอันดับสองดังนี้

$$\hat{f}^e(x, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 z + \alpha_4 xz + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 z^2 \quad (30)$$

เมื่อ α_i , $i=1,2,\dots,6$ เป็นค่าคงที่คำนวณได้จากความสัมพันธ์ด้านล่างนี้

$$\hat{f}^e(x_i, z_i) = \hat{f}_i^e = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 z_i + \alpha_4 x_i z_i + \alpha_5 x_i^2 + \alpha_6 z_i^2$$

จากนั้นแทนค่า α_i , $i=1,2,\dots,6$ กลับไปยังสมการ (30) และจัดพจน์ใหม่จะได้

$$\hat{f}^e(x, z) = \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, z) \hat{f}_i^e$$

โดยที่ $N_i^e(x, z)$ คำนวณได้จาก

$$N_1^e(x, z) = L_1(2L_1 - 1) \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4^e(x, z) = 4L_2L_3$$

$$N_5^e(x, z) = 4L_3L_1$$

$$N_6^e(x, z) = 4L_1L_2$$

$$\text{เมื่อ } L_i(x, z) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i z) \quad i = 1, 2, 3$$

$$A = \frac{1}{2}[x_2(z_3 - z_1) + x_1(z_2 - z_3) + x_3(z_1 - z_2)]$$

$$a_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2 \quad b_1 = z_2 - z_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3 \quad b_2 = z_3 - z_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1 \quad b_3 = z_1 - z_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

จากนั้นแทนค่า $\hat{f}^e$ ลงในสมการ (29) จะได้

$$\sigma_j \omega \sum_{i=1}^6 N_i^e \hat{f}_i^e - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \sum_{i=1}^6 N_i^e \hat{f}_i^e = J^e$$

สามารถ เขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$[A]^e [f]^e = [J]^e$$

(1×6) (6×1) (1×1)

$$\text{โดยที่ } [A]^e = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{16}]_{1 \times 6}$$

$$a_{1j} = \sigma_j \omega N_j^e(x_j, z_j) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 N_j^e(x_j, z_j)$$

$$j = 1, 2, \dots, 6$$

$$[f]^e = [\hat{f}_1 \ \hat{f}_2 \ \hat{f}_3 \ \hat{f}_4 \ \hat{f}_5 \ \hat{f}_6]^T$$

$[J]^e$ มีค่าคงที่ เท่ากับกระแสที่ให้อำนาจในระบบ ถ้าเอลิเมนต์อยู่บริเวณ coil นอกจากบริเวณนี้ $[J]^e$ มีค่าเป็นศูนย์

สำหรับเอลิเมนต์อื่นก็ทำในทำนองเดียวกัน จากนั้นนำสมการย่อยจากแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบกัน ได้เป็นระบบสมการรวมขนาดใหญ่ ซึ่งเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$[A]^{sys} [f]^{sys} = [J]^{sys}$$

(845×447) (447×1) (1×1)

เนื่องจากเอลิเมนต์ทั้งหมดมี 845 เอลิเมนต์ แต่จุดต่อที่ต้องการคำนวณค่า $\hat{f}$ มีเพียง 447 จุดต่อ ดังนั้นเมตริกซ์ $[A]^{sys}$ ที่ได้เป็น rectangular matrix ซึ่งในการแก้ระบบสมการนี้ ต้องอาศัยหลักการของ left inverse , right inverse จากนั้นจึงพิจารณาหาผลเฉลยที่ดีที่สุด (optimal solution) ซึ่งเป็นความรู้ที่จะต้องศึกษาเพิ่มในระดับบัณฑิตต่อไป

5. สรุปผล

โครงการวิจัยนี้ได้ ศึกษาและพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ของปริมาณทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเมื่อมีการประยุกต์ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่บริเวณสองข้างของเตาหลอม จากนั้นได้นำระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ชื่อ Point Collocation Method มาหาผลเฉลยของแบบจำลองที่สร้างขึ้น ผลจากการใช้ระเบียบวิธีนี้คือ ระบบสมการพีชคณิตขนาดใหญ่ และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้เป็น rectangular matrix สำหรับการแก้ระบบสมการลักษณะนี้ ต้องอาศัยหลักการของ left inverse , right inverse และพิจารณาหาผลเฉลยที่ดีที่สุด (optimal solution) ซึ่งเป็นความรู้ที่จะต้องศึกษาเพิ่มเติมขึ้นอีก ดังนั้นโครงการวิจัยที่ควรศึกษาต่อ ในระดับบัณฑิตคือ การศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ จากนั้นนำผลเฉลยที่ได้มาพิจารณาเป็นแรงดันเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสมการ Navier-Stokes เพื่อจะได้ศึกษา อิทธิพลของแรงนี้ร่วมกับปัจจัยอื่น

6. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจาก สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ฝ่ายอุตสาหกรรม โครงการโครงการอุตสาหกรรมสำหรับนักศึกษาปริญญาตรี ประจำปี 2546 ผู้วิจัยขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้ และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. เบญจวรรณ วิวัฒนปฐพี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ผู้ที่คอยให้คำแนะนำในการทำโครงการวิจัยนี้ด้วยดีเสมอมา

เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, *ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์* เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล, พิมพ์ครั้งที่ 1, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม., 2545.

สมชาติ จันทศิริวรรณ, *วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์เบื้องต้น*, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม., 2546.

Deok-Soo KIM, Woo-Seung KIM and Dee-Syeon CHO, " Numerical Simulation of the Coupled Turbulent Flow and Macroscopic Solidification in Continuous Casting with Electromagnetic Brake," *ISIJ International*, Vol. 40, March 2000, pp. 670-676.

X.R. Zhu, R.A. Harding and J. Campbell, " Calculation of the free surface shape in the electromagnetic processing of liquid metals," *Appl. Math. Modelling*, Vol. 21, April 1997, pp. 207-214.

Y. Katsumura, H. Hashizume and S. Toda, " Numerical Analysis of Fluid Flow with Free Surface and Phase Change under Electromagnetic Force," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 32, No. 3, May 1996, pp. 1002-1005.