



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของรูปสามเหลี่ยม On The Rectangle Flanks of A Triangle

DOI: 10.14456/mj-math.2024.x

คมสัน ไชยกาล¹ อินทัช โพธิ์ล้ำ² และอรรณพ แก้วขาว^{3,*}

^{1,2,3}ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Komsan Chaiyakarn¹ Intouch Pothilar² and Annop Kaewkhao^{3,*}

^{1,2,3}Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, ChonBuri 20131

Email: ¹Komsan@gmail.com ²Intouch@gmail.com ³Tor_idin@buu.ac.th

วันที่รับบทความ : 23 เมษายน 2567

วันที่แก้ไขบทความ : 15 สิงหาคม 2567

วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

บทความนี้ จะแสดงว่า อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเท่ากับ 3 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และอัตราส่วนนี้มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$ เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านอิสระมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาน

คำสำคัญ: สี่เหลี่ยมขนานข้าง

* ผู้เขียนหลัก

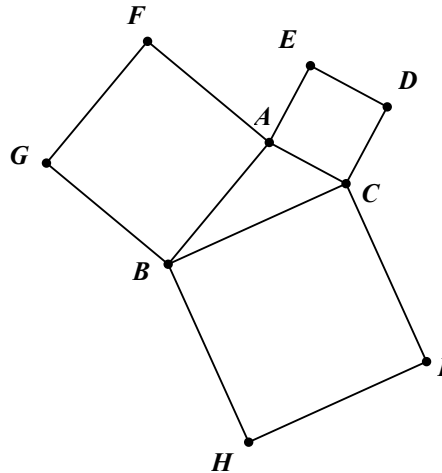
ABSTRACT

In this paper, we show that if the rectangle flanks of triangle are squares, then the ratio of the sum of the areas of the 2nd order rectangle flanks to the sum of the areas of the 1st order rectangle flanks is 3. On the other hand, the ratio equal to $\frac{3}{4}$ if the length of the free side is half of the length of the flank side.

Keywords: Rectangle flanks

1. บทนำ

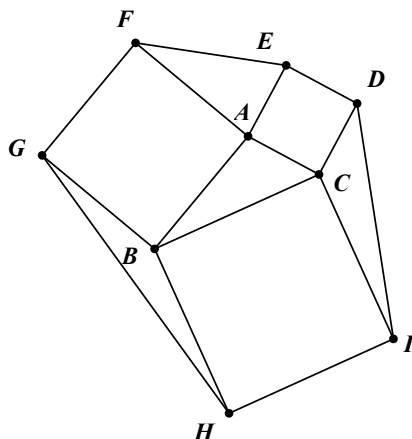
กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านร่วมกับ $\triangle ABC$ ว่ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้าง (Rectangle flanks) อันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$



รูปที่ 1.1 รูปสี่เหลี่ยมขนานข้าง อันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ เรียกด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ ที่เป็นด้านร่วมกับรูปสามเหลี่ยมว่า **ด้านขนาน (Flank side)** และเรียกด้านที่ประชิดกับด้านขนานว่า **ด้านอิสระ (Free side)**

เรียกรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ว่า **รูปสามเหลี่ยมขนานข้าง (Triangle flank)** ของ $\triangle ABC$



รูปที่ 1.2 รูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$

จากรูปที่ 1.2 จะได้ว่า $\triangle AEF$, $\triangle BGH$ และ $\triangle CID$ เป็นรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$

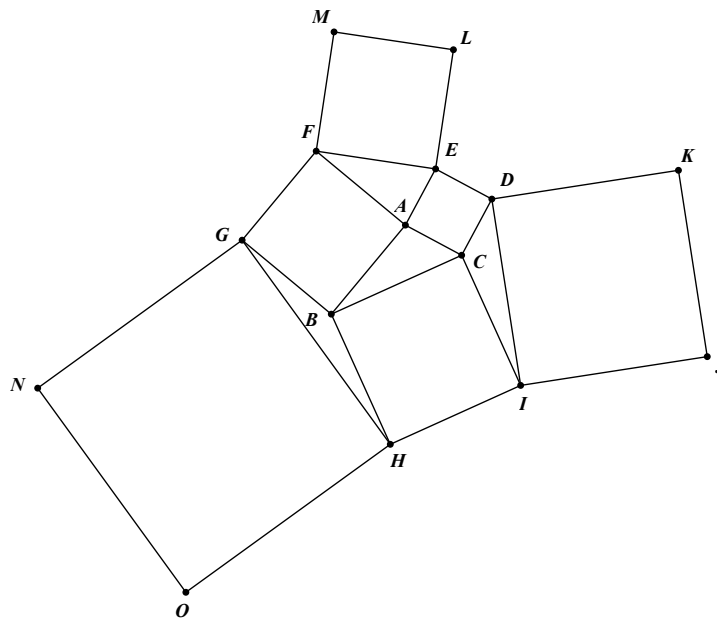
ในปี ค.ศ. 2005 Gilbey [1] ได้แสดงให้เห็นว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ แต่ละรูปจะมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ABC$ นั่นคือ $[AEF] = [BGH] = [CID] = [ABC]$

ในปี ค.ศ. 2018 Syawaludin และคณะ [2] ได้แสดงว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ ทั้งสามรูปมีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาน แล้วรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ ทั้งสามรูปจะมีพื้นที่เท่ากัน นั่นคือ $[AEF] = [BGH] = [CID]$

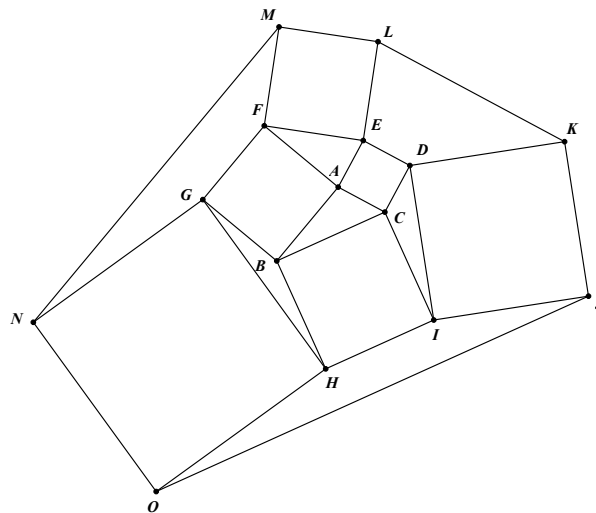
พิจารณารูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ จะเรียก รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ ที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ ว่า **รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ของ $\triangle ABC$**

จากรูปที่ 1.3 จะเห็นว่า $\square FELM$, $\square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ของ $\triangle ABC$

Syawaludin และคณะ [2] ยังได้แสดงให้เห็นอีกด้วยว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างทั้งสองอันดับเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วรูปสี่เหลี่ยมที่เกิดจากรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งมีพื้นที่เท่ากัน และมีพื้นที่เป็น 5 เท่าของ $\triangle ABC$ นั่นคือ $\square GFMN$, $\square IHOJ$ และ $\square EDKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และ $[GFMN] = [IHOJ] = [EDKL] = 5[ABC]$ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.3 รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ของ $\triangle ABC$



รูปที่ 1.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูของ Syawaludin และคณะ

ในบทความนี้ เราสนใจความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และเมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านขนาน

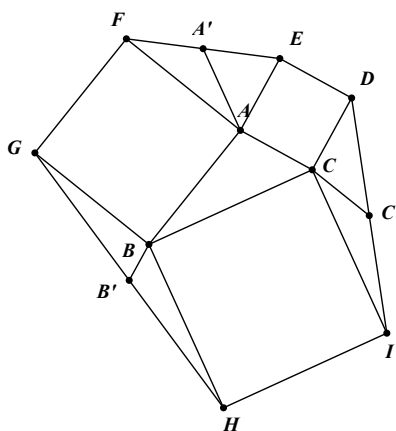
2. สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดข้าง

ในหัวข้อนี้ จะแสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยเริ่มจากบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

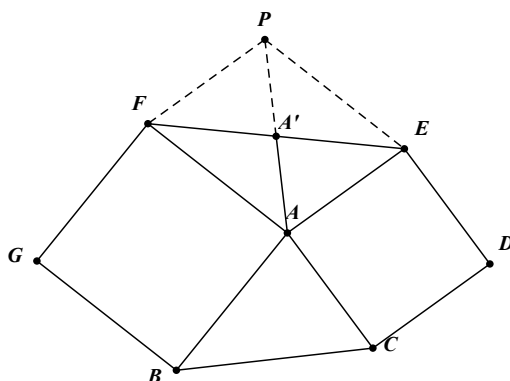
ถ้า A' , B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF , GH และ ID ตามลำดับ แล้ว

$$AA' = \frac{BC}{2}, BB' = \frac{AC}{2} \text{ และ } CC' = \frac{AB}{2}$$



รูปที่ 2.1 ภาพประกอบบทตั้ง 2.1

บทพิสูจน์ ให้ P เป็นจุดที่ทำให้ $\square AEPF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ภาพประกอบบทพิสูจน์บทตั้ง 2.1

เนื่องจาก A' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AEPF$ จะได้ A' อยู่บนเส้นทแยงมุม AP และ $AA' = \frac{AP}{2}$

พิจารณาที่จุด A จะได้ $180^\circ = \angle FAE + \angle CAB = (\angle FAP + \angle PAE) + \angle CAB$

เนื่องจาก $\overline{PE} \parallel \overline{FA}$ จะได้ $\angle FAP = \angle APE$ ดังนั้น $180^\circ = \angle APE + \angle PAE + \angle CAB$ นั่นคือ $\angle CAB = 180^\circ - (\angle APE + \angle PAE)$ ดังนั้น $\angle CAB = \angle AEP$

เนื่องจาก $AC = AE$, $\angle CAB = \angle AEP$ และ $AB = PE$ จะได้ $\triangle ABC \cong \triangle EPA$ ดังนั้น $AP = BC$ นั่นคือ $AA' = \frac{BC}{2}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $BB' = \frac{AC}{2}$ และ $CC' = \frac{AB}{2}$ □

ต่อไปจะแสดงว่า อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ มีค่าเท่ากับ 3 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และมี $\square FELM$, $\square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างทุกรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว $\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = 3$

บทพิสูจน์ ให้ A' , B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF , GH และ ID ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.3

โดยทฤษฎีบทของสจวร์ต (Stewart's theorem) และบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า

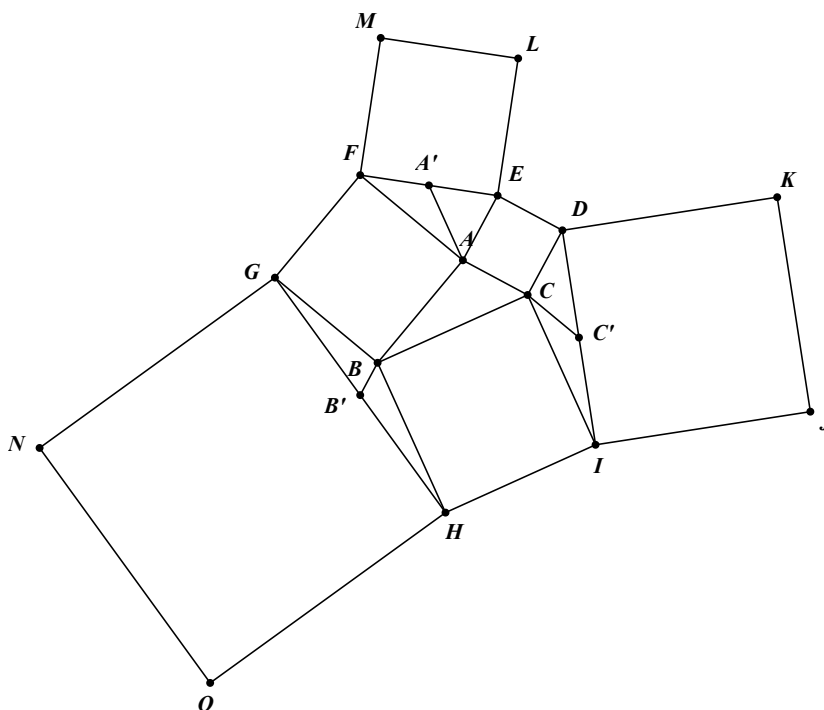
$$(AA')^2 = \frac{1}{2} \left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \right)$$

นั่นคือ $\frac{BC^2}{4} = \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2}{2} - \frac{EF^2}{4}$ ดังนั้น $BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - EF^2$

นั่นคือ $EF^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $GH^2 = 2BA^2 + 2BC^2 - AC^2$ และ $DI^2 = 2CA^2 + 2CB^2 - AB^2$

ดังนั้น $\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = \frac{EF^2 + GH^2 + DI^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$



รูปที่ 2.3 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) + (2BA^2 + 2BC^2 - AC^2) + (2CA^2 + 2CB^2 - AB^2)}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \\
 &= \frac{3AB^2 + 3AC^2 + 3BC^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

□

3. สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดข้าง

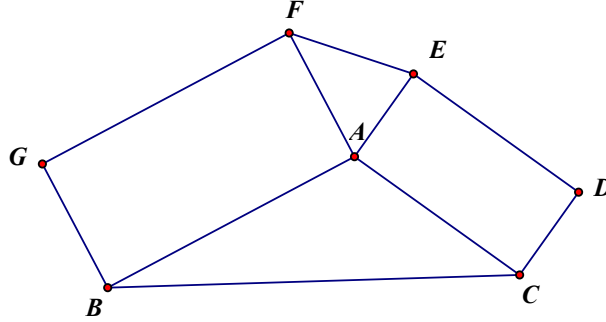
ในหัวข้อนี้ จะแสดงว่า เมื่อสี่เหลี่ยมขนาดข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาดแล้ว อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 และมี $\square FELM$, $\square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 2

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างมีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาน แล้ว

$$\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = \frac{3}{4}$$

บทพิสูจน์ พิจารณา $\triangle AEF$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1

โดยกฎของโคไซน์ จะได้ $EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2(AE)(AF)\cos(\angle FAE)$

นั่นคือ $EF^2 = AE^2 + AF^2 + 2(AE)(AF)\cos(\angle CAB)$

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างมีด้านอิสระยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาน จะได้ $AE = \frac{AC}{2}$

และ $AF = \frac{AB}{2}$ ดังนั้น

$$4EF^2 = AC^2 + AB^2 + 2(AC)(AB)\cos(\angle CAB) \quad (1)$$

พิจารณา $\triangle ABC$ โดยกฎของโคไซน์ จะได้

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos(\angle CAB) \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $4EF^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$

นั่นคือ $EF^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $GH^2 = \frac{BA^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$ และ $DI^2 = \frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} &= \frac{EF^2 + GH^2 + DI^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \\ &= \frac{\left(\frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right) + \left(\frac{BA^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}\right) + \left(\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}\right)}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \end{aligned}$$

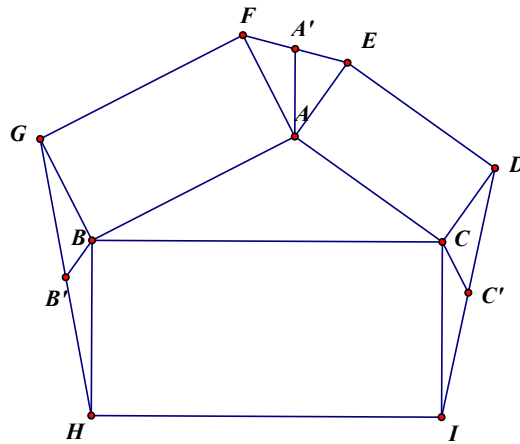
$$= \frac{\frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2)}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

นั่นคือ $\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = \frac{3}{4}$ □

จากการพิสูจน์ข้างต้น ยังสามารถหาความสัมพันธ์ของขนาดของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ขนาบข้างกับด้านของรูปสามเหลี่ยมตั้งต้นได้ ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ซึ่งด้านอิสระยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาน ถ้า A' , B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF , GH และ ID ตามลำดับ แล้ว $AA' = \frac{BC}{4}$, $BB' = \frac{AC}{4}$ และ $CC' = \frac{AB}{4}$



รูปที่ 3.2 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.2

บทพิสูจน์ จากบทพิสูจน์ข้างต้น ได้ว่า $EF^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

เนื่องจาก $AE = \frac{AC}{2}$ และ $AF = \frac{AB}{2}$ จะได้

$$BC^2 = 8 \left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \right) \quad (3)$$

พิจารณา $\triangle AEF$ โดยทฤษฎีบทของสจวร์ต จะได้ $(AA')^2 = \frac{1}{2} \left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \right)$ หรือ

$$2(AA')^2 = AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \quad (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $BC^2 = 16(AA')^2$ นั่นคือ $AA' = \frac{BC}{4}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $BB' = \frac{AC}{4}$ และ $CC' = \frac{AB}{4}$ □

4. สรุป

จากข้างต้นพบว่า การศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของรูปสามเหลี่ยมนั้นค่อนข้างเรียบง่ายและน่าสนใจ ซึ่งนำไปพิจารณาต่อไปว่า ในกรณีที่ด้านอิสระและด้านขนานมีความสัมพันธ์กันเป็นอัตราส่วน k แล้วความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของรูปสามเหลี่ยมนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าคงที่ k หรือไม่อย่างไร

เอกสารอ้างอิง

- [1] Gilbey, J. (2005). Responding to Geoff Fauxs Challenge. *Mathematics Teaching*, 190, p. 16
- [2] Syawaludin, M. R., Mashadi, M. and Gemawati, S. (2018). Modification Cross' Theorem on Triangle with Congruence. *Pekanbaru Indonesia*, 4 (5), p. 40 - 44