



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วบนกราฟไตรไซคลิก

Finding The Number of Spanning Trees on The Tricyclic Graph

DOI: 10.14456/mj-math.2024.x

ปฐยา มีสุข¹ และ นิรุตต์ พิพรรณจินดา^{2,*}

¹โรงเรียนวัดทองคั้ง “ไพโรจน์ประชาสรรค์” ชลบุรี 20000

²โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
กำแพงเพชร 62000

Padtaya Meesuk¹ and Nirutt Pipattanajinda^{2,*}

¹ Watthongkung School, Chonburi 20000

² Program of Mathematic, Faculty of sciences and Technology,
Kamphaeng Phet Rajabhat University, Kamphaeng Phet, 62000

Email: ¹pad.padtaya@gmail.com ²nirutt.p@gmail.com

วันที่รับบทความ : 22 มิถุนายน 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 22 ตุลาคม 2565

วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{Z}^+$ และ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีอันดับ n จะเรียก G ว่า กราฟ k -ไซคลิก ถ้า G เป็นกราฟที่มีขนาด $m = n + k - 1$ และเรียกกราฟ 3-ไซคลิก ว่า กราฟไตรไซคลิก ในบทความนี้จะเป็นการแสดงวิธีการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก โดยพิจารณา

* ผู้เขียนหลัก

กราฟไตรไซคลิกเป็น 4 รูปแบบ ตามจำนวนของวัฏจักรของกราฟ จากนั้นใช้หลักการนับในการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิกในแต่ละรูปแบบ

คำสำคัญ: ต้นไม้แบบแผ่ทั่ว จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ กราฟไตรไซคลิก

ABSTRACT

For each $k \in \mathbb{Z}^+$ and G is a connected graph of order n , G is said to be a k -cyclic graph if G is the graph has size $m = n + k - 1$ and the 3-cyclic graph is said to be a tricyclic graph. In this paper, we find the number of spanning trees on the tricyclic graph, considering 4 types from the number of cycles. Then use the counting techniques to find the number of spanning trees on the tricyclic graph of each type.

Keywords: Spanning tree, Number of spanning trees of graph, Tricyclic

1. บทนำและความรู้พื้นฐาน

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ คือ การหาจำนวนกราฟย่อยแบบแผ่ทั่วที่เป็นรูปต้นไม้ทั้งหมดในกราฟ ซึ่งในปี ค.ศ. 1847 Gustav Kirchhoff [5] ได้แสดงวิธีการหาโดยใช้ตัวกำหนดของเมทริกซ์บางประการของกราฟ ต่อมาในปี ค.ศ. 1889 Arthur Cayley [4] ได้ขยายสูตรไปในหลากหลายทิศทาง โดยการใช้ระดับชั้นของจุดมาพิจารณา จากทั้งสองแนวคิดนี้ส่งผลให้มีการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟออกมอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ. 1990 Moh'd Z. Abu-Sbeih [3] ได้แนะนำวิธีการแบบใหม่ในการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟของกราฟบริบูรณ์ K_n และกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{n,m}$ ในปี ค.ศ. 2010 Jianxi Li, Wai Chee Shiu และ An Chang [7] ได้แสดงขอบเขตบนของจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟโดยใช้อันดับ ขนาด ระดับชั้นค่ามากที่สุด-น้อยที่สุด จำนวนของสภาพเชื่อมโยง และรงคเลขของกราฟในการพิจารณา ในปี ค.ศ. 2014 Jianxi Li และ Wai Chee Shiu [6] ได้แสดงสูตรการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของการดำเนินการบวกของกราฟ และในปี ค.ศ. 2020 ปัฐยา มีสุข และ นิรุตต์ พิพรรณจินดา [2] ได้แสดงการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ และการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไไบไซคลิก

สำหรับในบทความนี้จะเป็นการขยายวงศ์ของกราฟที่จะนำมาพิจารณาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ กล่าวคือ การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก หรือกราฟ 3-ไซคลิก ซึ่งมีวิธีการที่ซับซ้อนกว่ากราฟไบไซคลิก

ต่อไปจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟที่จำเป็นต้องใช้ในที่นี้ จะเรียก G ว่า **กราฟ** เมื่อ $G = (V(G), E(G))$ โดยที่เซต $V(G) \neq \emptyset$ เป็นเซตจำกัด จะเรียกว่า **เซตของจุด** เรียกสมาชิก $v \in V(G)$ ว่า **จุด**ของกราฟ G และเรียกเซต $E(G)$ ว่า **เซตของเส้น** ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตย่อยที่มีสองสมาชิกใน $V(G)$ นั่นคือ $E(G) \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G)\}$ เรียกสมาชิก $e \in E(G)$ ว่า **เส้น**ของกราฟ G ถ้า $e = \{u, v\} \in E(G)$ เขียนอย่างง่ายในรูป $e = uv$ และจะเรียกว่า u **ประชิดกับ** v ทั้งนี้จะเรียกจำนวนจุดและจำนวนเส้นในกราฟ G ว่า **อันดับและขนาด**ของกราฟ G ตามลำดับ

สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ และกราฟ $H = (V(H), E(H))$ จะเรียกกราฟ H ว่า **กราฟย่อย**ของกราฟ G ถ้า H เป็นกราฟที่ $V(H) \subseteq V(G)$ และ $E(H) \subseteq E(G)$ และใช้สัญลักษณ์ $H \subseteq G$ แทน H เป็นกราฟย่อยของ G และจะเรียกกราฟย่อย H ของ G ว่า **กราฟย่อยแบบแผ่ทั่ว**ของกราฟ G ถ้า H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ที่ $V(H) = V(G)$

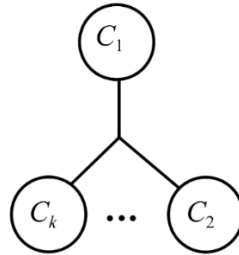
ให้ G เป็นกราฟ โดยที่ $e \in E(G)$ แล้ว $G \setminus e$ จะหมายถึง กราฟย่อยแบบแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการลบเส้น e จากกราฟ G นั่นคือ $V(G \setminus e) = V(G)$ และ $E(G \setminus e) = E(G) - \{e\}$ ทำนองเดียวกัน ถ้า $T = \{e_1, e_2, \dots, e_s\} \subseteq E(G)$ แล้ว $G \setminus T$ จะหมายถึง กราฟย่อยแบบแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการลบเส้น $e_1, e_2, \dots, e_s$ จากกราฟ G

เรียกวิถีปิด $u - v$ ที่มีความยาวมากกว่าหรือเท่ากับ 3 ว่า **วัฏจักร** เรียกกราฟ G ว่า **กราฟเชื่อมโยง** ถ้าแต่ละ $u, v \in V(G)$ จะได้ว่า G บรรจุวิถี $u - v$ และเรียกกราฟ G ว่า **กราฟไม่เชื่อมโยง** ถ้ากราฟ G ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

สำหรับกราฟเชื่อมโยง G จะเรียกเส้น $e \in E(G)$ ว่า **เส้นตัด** ถ้า $G \setminus e$ เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง จะเรียกกราฟ G ว่า **ต้นไม้** ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่บรรจุวัฏจักร จะเรียกกราฟย่อยแบบแผ่ทั่ว T ของกราฟ G ว่า **ต้นไม้แบบแผ่ทั่ว**ของกราฟ G ถ้า T เป็นต้นไม้ กำหนดสัญลักษณ์ $\tau(G)$ แทนจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่แตกต่างกันทั้งหมดของกราฟ G

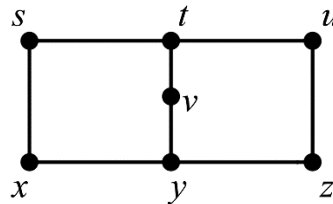
ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีอันดับ n จะเรียกกราฟ G ว่า **k -ไซคลิก** เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงและมีขนาด $n + k - 1$ ยิ่งไปกว่านั้นจะเรียก G ว่า **กราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน** ถ้า G เป็นกราฟ k -ไซคลิก ซึ่งแต่ละ 2 วัฏจักร C_i และ C_j ไต ๆ ในกราฟ G จะเป็นวัฏจักรที่มี

เส้นแตกต่างกัน นั่นคือ $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$ ในกรณีที่ $k \in \{1, 2, 3\}$ จะกำหนดชื่อเรียกเฉพาะสำหรับกราฟ k -ไซคลิก คือ กราฟยูนิไซคลิก กราฟไบไซคลิก และ กราฟไตรไซคลิก ตามลำดับ สำหรับโครงสร้างของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกันจะมีได้หลายแบบ ซึ่งจะแสดงตัวอย่างของแผนภาพของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน จำนวน 1 แบบ ดังรูปที่ 1.1



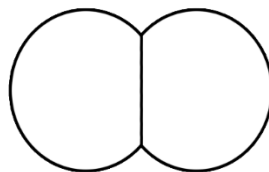
รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของแผนภาพของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน

หมายเหตุ สำหรับกราฟ k -ไซคลิก G ที่มีอันดับ n จะหมายความว่า G ที่มีขนาดเป็น $n + k - 1$ แต่ไม่สามารถสรุปได้ว่า G บรรจุจำนวน k วัฏจักรได้ เช่น ให้ G เป็นกราฟดังรูปที่ 1.2 จะได้ว่ากราฟ G มีอันดับ 7 และมีขนาดเป็น 8 ดังนั้น G จะเป็นกราฟไบไซคลิก แต่จะเห็นว่า G เป็นกราฟที่มี 3 วัฏจักร ได้แก่ $C_1: s, t, v, y, x, s$, $C_2: t, u, z, y, v, t$ และ $C_3: s, t, u, z, y, x, s$



รูปที่ 1.2 กราฟไบไซคลิก

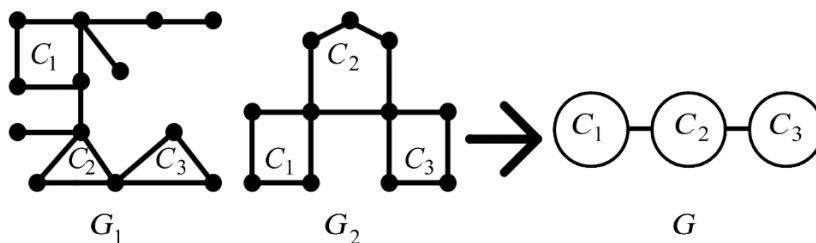
สำหรับกราฟไบไซคลิกในรูปที่ 1.2 จะเขียนเป็นแผนภาพทั่วไปเป็นวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักรติดกัน โดยระหว่าง 2 วัฏจักรจะมีเส้นร่วมกันอย่างน้อย 1 เส้น ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 แผนภาพทั่วไปของกราฟไบไซคลิกที่มีลักษณะดังรูปที่ 1.2

ในกรณีที่กราฟบรรจุวัฏจักร 2 วัฏจักรที่แตกต่างกัน โดยจะมีเพียงวิธีจำนวน 1 วิธีเชื่อมระหว่าง 2 วัฏจักร ซึ่งวิธีที่เชื่อมดังกล่าวอาจมีวิธีอื่น ๆ เชื่อมโยงกับวิธีนั้นได้ด้วย จะเขียนเป็นแผนภาพทั่วไป

เป็นวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักร ที่มีเส้นเชื่อม 1 เส้น เนื่องจากแต่ละเส้นบนวิถีจะเป็นเส้นตัด ในการหาต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟจึงไม่สามารถลบเส้นใด ๆ บนวิถีได้ สำหรับการเขียนแผนภาพทั่วไปของกราฟดังกล่าวนี้มีดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 แผนภาพ G_1 และ G_2 สามารถเขียนเป็นแผนภาพทั่วไปได้รูปแบบเดียวกัน

ต่อไปจะเป็นบทตั้งที่จำเป็นในการพิสูจน์ในบทความนี้ โดยบทตั้ง 1.1 – 1.2 เป็นบทตั้งที่ทราบกันดีอยู่แล้ว ผู้อ่านสามารถพบได้จากหนังสือทฤษฎีกราฟเบื้องต้นทั่วไป เช่น ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนิรุทธิ์ พิพรรณจินดา [1] และบทตั้ง 1.3 – 1.5 เป็นบทตั้งที่เกี่ยวกับจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน กราฟยูนิไซคลิก และกราฟไบไซคลิก ตามลำดับ

บทตั้ง 1.1 [1] สำหรับกราฟเชื่อมโยง G จะได้ว่าเส้น $e \in E(G)$ จะเป็นเส้นตัดในกราฟ G ก็ต่อเมื่อ e ไม่เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักรของกราฟ G

บทตั้ง 1.2 [1] ให้ G เป็นกราฟที่มีอันดับ n และขนาด m ถ้า G มีสมบัติ 2 ข้อใด ๆ จาก 3 ข้อต่อไปนี้

- (1) G เป็นกราฟเชื่อมโยง
- (2) G ไม่บรรจุวัฏจักร
- (3) $m = n - 1$

แล้ว G จะเป็นต้นไม้

บทตั้ง 1.3 [2] ให้ G เป็นกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ ที่มี C_i เป็นวัฏจักรในกราฟ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, k$ ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ แล้ว $\tau(G) = \prod_{i=1}^k q_i$

บทตั้ง 1.4 [2] ให้ G เป็นกราฟยูนิไซคลิกที่มี C เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C)| = q$ แล้ว $\tau(G) = q$

บทตั้ง 1.5 [2] ให้ G เป็นกราฟไบไซคลิกที่มี C_1 และ C_2 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ แล้ว $\tau(G) = q_1 q_2 - s^2$

2. การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ตัวของกราฟไตรไซคลิก

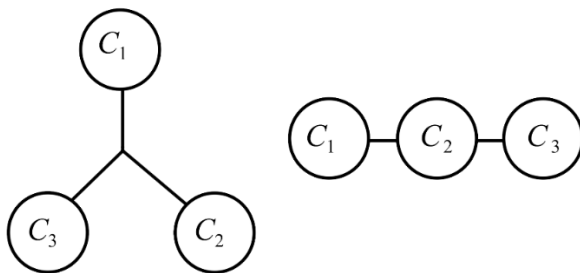
จากที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ผ่านมาว่า จะเรียกกราฟ G อันดับ n ว่า กราฟไตรไซคลิก ถ้ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยงและมีขนาดเป็น $n + 2$ ในที่นี้เพื่อให้ง่ายต่อการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ จะแบ่งกราฟไตรไซคลิกเป็น 4 กลุ่ม ตามรูปแบบโครงสร้างของวัฏจักรที่ปรากฏในกราฟ โดยพิจารณาจากรูปแบบของวัฏจักรจำนวน 3 วัฏจักร ดังนี้

รูปแบบ A ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่อยู่ในรูปแบบของกราฟ 3-ไซคลิกที่แตกต่างกัน โดยวัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรไม่ใช่เส้นร่วมกันเลย มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.1

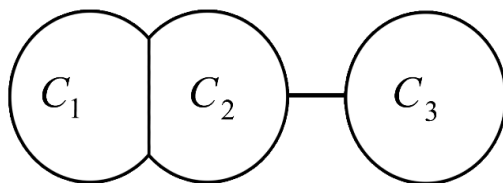
รูปแบบ B ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่มีวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกัน มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.2

รูปแบบ C ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรที่ 1 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 2 และวัฏจักรที่ 2 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 3 แต่วัฏจักรที่ 1 และวัฏจักรที่ 3 ไม่ใช่เส้นร่วมกัน มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.3

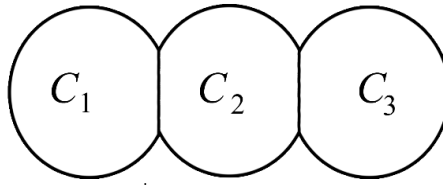
รูปแบบ D ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกันทั้งหมด มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.4



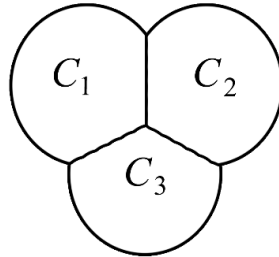
รูปที่ 2.1 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ A



รูปที่ 2.2 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B



รูปที่ 2.3 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ C



รูปที่ 2.4 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ D

สำหรับกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ A เป็นกราฟไตรไซคลิกที่แตกต่างกันสามารถหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิกที่แตกต่างกัน รูปแบบ A ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 q_i$$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากบทตั้ง 1.3

□

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B, C และ D จะแสดงโดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

ถ้า $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = |E(C_2) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = (q_1 q_2 - s^2) q_3$$

บทพิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B ดังรูปที่ 2.2

เนื่องจากต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G เกิดจากการลบเส้น 1 เส้นของแต่ละวัฏจักร

ถ้า $e \in E(C_3)$ แล้ว $G \setminus e$ จะเป็นกราฟไบไซคลิก จากบทตั้ง 1.5 จะได้ $\tau(G \setminus e) = q_1 q_2 - s^2$

เนื่องจาก $|E(C_3)| = q_3$ ดังนั้น

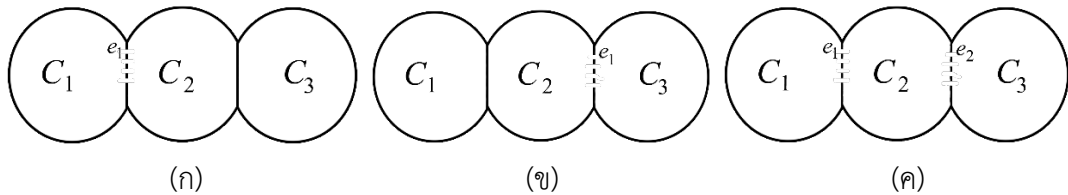
$$\tau(G) = \sum_{e_i \in E(C_3)} \tau(G \setminus e_i) = (q_1 q_2 - s^2) q_3 \quad \square$$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ C ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G

ถ้า $|E(C_1) - E(C_2)| = q_1$, $|E(C_2) - E(C_1) - E(C_3)| = q_2$, $|E(C_3) - E(C_2)| = q_3$,
 $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_2$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = q_1 q_2 q_3 + s_1 (q_1 + q_2) q_3 + s_2 q_1 (q_2 + q_3) + s_1 s_2 (q_1 + q_2 + q_3)$$

บทพิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์จะแบ่งออกเป็น 4 กรณี ประกอบด้วย กรณี 1 ไม่ลบเส้นร่วมระหว่าง 2 วัฏจักรเลย และ กรณี 2 – 4 การลบเส้นบนเส้นร่วมระหว่าง 2 วัฏจักร จำนวนไม่เกิน 2 เส้น จากนั้นจึงทำการพิจารณาลบเส้นบนวัฏจักรที่ไม่ใช่เส้นร่วม ดังรูปที่ 2.5 (ก) - (ค)



รูปที่ 2.5 แผนภาพทั่วไปของการแบ่งกรณีตามการลบเส้นบนเส้นร่วมระหว่าง 2 วัฏจักร

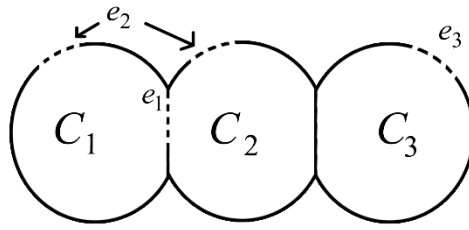
กรณี 1 ถ้าต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G คือกราฟ $G\{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $e_1 \in E(C_1) - E(C_2)$,
 $e_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e_3 \in E(C_3) - E(C_2)$

จาก $|E(C_1) - E(C_2)| = q_1$, $|E(C_2) - E(C_1) - E(C_3)| = q_2$, $|E(C_3) - E(C_2)| = q_3$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า ต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G คำนวณได้จากผลคูณของ q_1, q_2 และ q_3 นั่นคือ $\tau(G\{e_1, e_2, e_3\}) = q_1 q_2 q_3$

กรณี 2 ถ้า $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$

เพื่อไม่ให้เกิดกรณีการลบเส้นที่ซ้ำกับกรณีตามรูปที่ 2.5 (ค) จะพิจารณาลบเส้นบนวัฏจักรที่ไม่ใช่เส้นร่วมจำนวน 2 เส้น ได้แก่ $e_2 \in E(C_1) - E(C_2)$ หรือ $e_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e_3 \in E(C_3) - E(C_2)$ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G\{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า $\tau(G \setminus e_1) = (q_1 + q_2)q_3$

เนื่องจาก $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$ ดังนั้น

$$\sum_{e_i \in E(C_1) \cap E(C_2)} \tau(G \setminus e_i) = s_1(q_1 + q_2)q_3$$

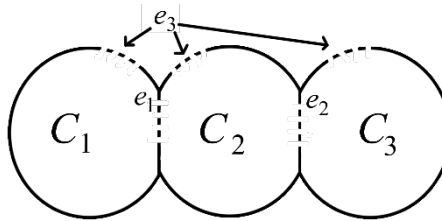
กรณี 3 ถ้า $e_1 \in E(C_2) \cap E(C_3)$

จะสามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกับกรณี 2 ดังนั้น

$$\sum_{e_i \in E(C_2) \cap E(C_3)} \tau(G \setminus e_i) = s_2q_1(q_2 + q_3)$$

กรณี 4 ถ้า $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$ และ $e_2 \in E(C_2) \cap E(C_3)$

จะพิจารณาลบเส้นบนวัฏจักรที่ไม่ใช่เส้นร่วมจำนวน 1 เส้น ได้แก่ $e_3 \in E(G) - (E(C_1) \cap E(C_2)) - (E(C_2) \cap E(C_3))$ ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G\{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$, $e_2 \in E(C_2) \cap E(C_3)$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า $\tau(G \setminus \{e_1, e_2\}) = q_1 + q_2 + q_3$

เนื่องจาก $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$ และ $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_2$ ดังนั้น

$$\sum_{\substack{e_i \in E(C_1) \cap E(C_2) \\ e_j \in E(C_2) \cap E(C_3)}} \tau(G \setminus \{e_i, e_j\}) = s_1s_2(q_1 + q_2 + q_3)$$

จากกรณี 1 - 4 จะได้

$$\tau(G) = q_1q_2q_3 + s_1(q_1 + q_2)q_3 + s_2q_1(q_2 + q_3) + s_1s_2(q_1 + q_2 + q_3)$$

□

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ D ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ซึ่ง $|E(C_i)| = r_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ i \neq j}} s_j$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_3$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_1$,

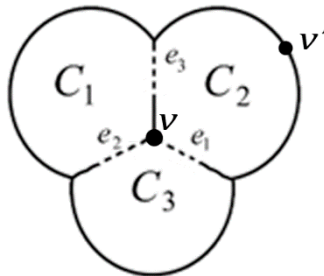
$|E(C_1) \cap E(C_3)| = s_2$, $s = s_1 + s_2 + s_3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 r_i + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} r_i r_j (s_i + s_j) + t \sum_{i=1}^3 r_i$$

$$\text{เมื่อ } t = \binom{s}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2}$$

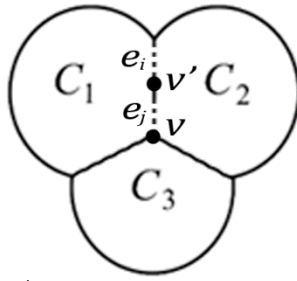
บทพิสูจน์ ให้ $S_1 = E(C_2) \cap E(C_3)$, $S_2 = E(C_1) \cap E(C_3)$, $S_3 = E(C_1) \cap E(C_2)$

ถ้า $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3$ จะได้ $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ เป็นกราฟย่อยของกราฟ G (1) ถ้าแต่ละ e_1, e_2, e_3 เป็นเส้นที่บรรจุอยู่ในเซต S_1, S_2, S_3 ที่แตกต่างกันทั้งหมด จะได้ว่ามีจุด v และ v' ในกราฟ $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ ไม่เชื่อมโยงกัน เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$ และ v' เป็นจุดภายในบางวัฏจักร C_k ที่ไม่มีเส้นร่วมกับวัฏจักรอื่น ดังรูปที่ 2.9 (2) ถ้า $e_i, e_j \in S_k$ สำหรับบาง $k \in \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่ามีจุด v และ v' ในกราฟ $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ ไม่เชื่อมโยงกัน เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$ และ v' เป็นจุดปลายของเส้น e_i และ e_j หรือ v' เป็นจุดที่ประชิดกับเส้นร่วมของเซต S_k ที่อยู่ระหว่างเส้น e_i และ e_j ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.9 แผนภาพของกราฟไม่เชื่อมโยง $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$

และ v' เป็นจุดภายในบางวัฏจักร C_k ที่ไม่มีเส้นร่วมกับวัฏจักรอื่น



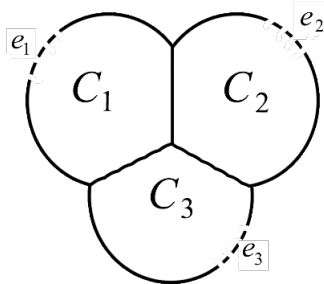
รูปที่ 2.10 แผนภาพของกราฟไม่เชื่อมโยง $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$

และ v' เป็นจุดที่ประชิดกับเส้นร่วมของเซต S_k ที่อยู่ระหว่างเส้น e_i และ e_j

ดังนั้น ต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G คือ กราฟ $G \setminus E'$ เมื่อ $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ โดยที่ $E' \not\subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3$ จะมี 3 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $e'_i \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3$ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3\}$ โดยที่ $e'_1 \in E(C_1) - (E(C_2) \cup E(C_3))$,

$e'_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e'_3 \in E(C_3) - (E(C_1) \cup E(C_2))$ จะได้ $G \setminus E'$ เป็นต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.11

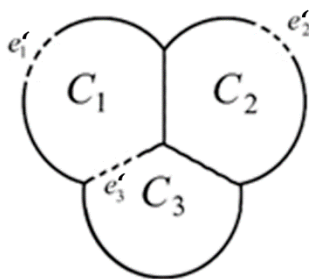


รูปที่ 2.11 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus E'$ ที่ได้จากกรณี 1

โดยหลักการนับ จะได้ $\tau_1(G) = r_1 r_2 r_3$ เมื่อ $\tau_1(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E' ที่ได้จากกรณี 1

กรณี 2 พิจารณาเป็น 3 กรณีย่อย ได้แก่

กรณี 2.1 ถ้า $e'_3 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ โดยที่ $e'_3 \in S_1 \cup S_2$, $e'_1 \in E(C_1) - (E(C_2) \cup E(C_3))$ และ $e'_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ จะได้ $G \setminus E'$ เป็นต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.12



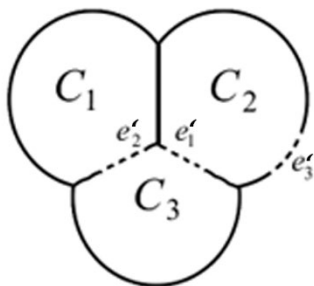
รูปที่ 2.12 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus E'$ ที่ได้จากกรณี 2.1

โดยหลักการนับ จะได้ $\tau_{2.1}(G) = r_1 r_2 (s_1 + s_2)$ เมื่อ $\tau_{2.1}(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E' ที่ได้จากกรณี 2.1

กรณี 2.2 ถ้า $e_2' \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ โดยที่ $e_2' \in S_1 \cup S_3$, $e_1' \in E(C_1) - (E(C_2) \cup E(C_3))$ และ $e_3' \in E(C_3) - (E(C_1) \cup E(C_2))$ จะได้ $\tau_{2.2}(G) = r_1 r_3 (s_1 + s_3)$ เมื่อ $\tau_{2.2}(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E'

กรณี 2.3 ถ้า $e_1' \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ โดยที่ $e_1' \in S_2 \cup S_3$, $e_2' \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e_3' \in E(C_3) - (E(C_1) \cup E(C_2))$ จะได้ $\tau_{2.3}(G) = r_2 r_3 (s_2 + s_3)$ เมื่อ $\tau_{2.3}(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E'

กรณี 3 ถ้า $e_1' \in S_i$, $e_2' \in S_j$ โดยที่ $i \neq j$ และ $e_3' \in E(G) - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ จะได้ $G \setminus E'$ เป็นต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus E'$ ที่ได้จากกรณี 3

โดยหลักการนับ จะได้ $\tau_3(G) = (r_1 + r_2 + r_3) \left(\binom{s}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2} \right)$ เมื่อ $\tau_3(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E' ที่ได้จากกรณี 3

จากกรณี 1, 2 และ 3 จะได้

$$\begin{aligned}\tau(G) = & r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 (s_1 + s_2) + r_1 r_3 (s_1 + s_3) + r_2 r_3 (s_2 + s_3) \\ & + (r_1 + r_2 + r_3) \left(\binom{S}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2} \right)\end{aligned}$$

ให้ $t = \binom{S}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2}$ จะได้

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 r_i + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} r_i r_j (s_i + s_j) + t \sum_{i=1}^3 r_i \quad \square$$

3. สรุป

ในการศึกษาการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก ได้แบ่งการศึกษาดังออกเป็น 4 รูปแบบตามโครงสร้างของวัฏจักรที่ปรากฏในกราฟ ดังนี้

รูปแบบ A ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่อยู่ในรูปแบบของกราฟ 3-ไซคลิกที่แตกต่างกัน โดยวัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรไม่ใช้เส้นร่วมกันเลย

รูปแบบ B ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่มีวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกัน

รูปแบบ C ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรที่ 1 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 2 และวัฏจักรที่ 2 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 3 แต่วัฏจักรที่ 1 และวัฏจักรที่ 3 ไม่ใช้เส้นร่วมกัน

รูปแบบ D ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกันทั้งหมด

ซึ่งได้สูตรของการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิกทั้ง 4 กรณี ดังนี้

รูปแบบ A ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิกที่แตกต่างกัน ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 q_i$$

รูปแบบ B ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

ถ้า $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = |E(C_2) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = (q_1 q_2 - s^2) q_3$$

รูปแบบ C ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G

ถ้า $|E(C_1) - E(C_2)| = q_1$, $|E(C_2) - E(C_1) - E(C_3)| = q_2$, $|E(C_3) - E(C_2)| = q_3$,

$|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_2$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = q_1 q_2 q_3 + s_1(q_1 + q_2)q_3 + s_2 q_1(q_2 + q_3) + s_1 s_2(q_1 + q_2 + q_3)$$

รูปแบบ D ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ซึ่ง

$|E(C_i)| = r_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ i \neq j}} s_j$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_3$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_1$,

$|E(C_1) \cap E(C_3)| = s_2$, $s = s_1 + s_2 + s_3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 r_i + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} r_i r_j (s_i + s_j) + t \sum_{i=1}^3 r_i$$

เมื่อ $t = \binom{s}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2}$

สำหรับผู้สนใจในการศึกษาต่อ สามารถนำขั้นตอนวิธีการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิกไปสู่การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ k -ไซคลิก ที่มีลักษณะเฉพาะบางประการได้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการจัดทำบทความฉบับนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] นิรุตต์ พิพรรณจินดา. (2560). *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น*. กำแพงเพชร: มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร.
- Pipattanajinda, N. (2017). *Introduction to graph theory*. Kampheng Phet: Kamphaeng Phet Rajabhat University.
- [2] ปฐยา มีสุข และ นิรุตต์ พิพรรณจินดา. (2563). สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร. *วารสารคณิตศาสตร์ราชภัฏ*. 5 (1), น. 23 – 34.

- Meesuk, M., and Pipattanajinda, N. (2020). A Formula for Finding The Number of Spanning Trees on The Bicyclic Graph. *Rajabhat Mathematics Journal*. 5 (1), p. 23 – 34.
- [3] Abu-Sbeih, M. Z. (1990). On The Number of Spanning Tree of K_n and $K_{n,m}$. *Discrete Mathematics*, 84 (2), p. 205 – 207.
- [4] Cayley, A. (1889). A Theorem on Trees, *Quart. J. Pure Appl. Math.* 23, p. 376 – 378.
- [5] Kirchhoff, G. (1847). Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen der Physik*, 148, p. 497 – 508.
- [6] Lia, J. and Shiua, W. C. (2014). The Number of Spanning Trees of Composite Graphs. *J. of Combi. Math. and Combi. Compu.* 89, p. 45 – 52.
- [7] Lia, J., Shiua, W. C. and Changb, A. (2010). The Number of Spanning Trees of A Graph. *Appl. Math. Letters*. 23 (3), p. 286 – 290.