ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ อันดับสี่โดยใช้การแปลงซูมูดู

The general solutions of fourth order Cauchy-Euler equations using Sumudu transform

ธวิกานต์ ตรียะประเสริฐ*, กุลณัฐ ธนผาติกุล, กิตติพงศ์ ผลทวี, เวธกา เพิ่มพูนพรสิน

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Tawikan Treeyaprasert*, Kullanat Thanaphatikun, Kittipong Poltawee and Vetaga Permpoonpornsin

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

Received: March 28, 2024 ; Revisions: June 17, 2024 ; Accepted: June 20, 2024

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เสนอวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = r(t)$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง และ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยใช้การแปลงซูมูดู

คำสำคัญ : สมการโคชี – ออยเลอร์; สมการโคชี – ออยเลอร์ อันดับสี่; การแปลงซูมูดู; ผลเฉลยทั่วไป

Abstract

Using the Sumudu transform technique, we investigate the general solution of the fourth order nonhomogeneous Cauchy-Euler equation

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = r(t),$$

where a, b, c, d are real numbers and $r(t)$ is a polynomial function.

Keywords: Cauchy-Euler equations; Fourth order Cauchy-Euler equations; Sumudu transform; General solution

1. บทนำ

ในปัจจุบันปัญหาประยุกต์ทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์หลายปัญหามีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเข้ามาเกี่ยวข้อง สมการโคชี – ออยเลอร์ เป็นรูปแบบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัว

**Corresponding author: tawikan@mathstat.sci.tu.ac.th*

แปร ซึ่งมีนักวิจัยหลายท่านนำเสนอวิธีการที่แตกต่างกันในการหาผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความวิจัยที่อ้างอิงในหัวข้อที่ 6

ในปี ค.ศ. 2015 Ghil และ Kim ได้เสนอวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์อันดับสองและอันดับสามโดยใช้การแปลงลาปลาซ ซึ่งการศึกษาผลงานวิจัยดังกล่าว ทำให้เรามีแรงบันดาลใจในการนำการแปลงซูมูดู (Sumudu Transform) มาใช้สร้างสูตรในการหาผลเฉลยทั่วไปของของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่ $t^4y^{(4)}+at^3y'''+bt^2y''+cty'+dy=r(t)$ เมื่อ a,b,c,d เป็นจำนวนจริง และ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

เนื้อหาในบทความในแต่ละหัวข้อประกอบไปด้วย บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่จำเป็นในการนำการแปลงซูมูดูมาช่วยหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ ซึ่งจะกล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2 ส่วนหัวข้อที่ 3 จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสี่โดยใช้การแปลงซูมูดู โดยเราจะนำการแปลงซูมูดูมาสร้างทฤษฎีบทที่ช่วยในการหาผลเฉลยทั่วไปซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสี่ พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างประกอบให้เห็นว่าทฤษฎีบทของเราสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยทั่วไปได้จริง ในหัวข้อ 4 จะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเฉพาะของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่ในกรณีที่ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างประกอบ และหัวข้อ 5 เป็นส่วนสรุปผลงานวิจัย

2. วิธีการ

หัวข้อนี้กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีพื้นฐานสำคัญที่ควรทราบเพื่อนำไปใช้ในหาผลลัพธ์หลักในหัวข้อถัดไป

บทนิยาม 2.1 (Belgacem & Karaballi (2005)) ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับชี้กำลัง α การแปลงซูมูดูของฟังก์ชัน $f(t)$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{S}\{f(t)\}$ หรือ $F(u)$ นิยามโดย

$$\mathrm{S}\{f(t)\}=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t/u}f(t)\,dt$$

สำหรับทุกจำนวนจริง u ที่ทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า

บทนิยาม 2.2 (Belgacem & Karaballi (2005)) ผลการแปลงซูมูดูผกผันของฟังก์ชัน $F(u)$ คือฟังก์ชัน $f(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงเพียงฟังก์ชันเดียวที่ทำให้ $\mathrm{S}\{f(t)\}=F(u)$ เขียนแทนการแปลงซูมูดูผกผันของฟังก์ชัน $F(u)$ ด้วย $\mathrm{S}^{-1}\{F(u)\}=f(t)$

ทฤษฎีบท 2.3 (Belgacem & Karaballi (2005)) **(สมบัติเชิงเส้นของการแปลงซูมูดู)**
กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาผลการแปลงซูมูดูได้บนโดเมนเดียวกัน จะได้ว่า

$$\mathrm{S}\{f\pm g\}=\mathrm{S}\{f\}\pm\mathrm{S}\{g\}$$
$$\mathrm{S}\{cf\}=c\mathrm{S}\{f\}$$

เมื่อ c คือ ค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 2.4 (Belgacem & Karaballi (2005)) **(สมบัติเชิงเส้นของการแปลงซูมูดูผกผัน)**
กำหนดให้ ให้ $\mathrm{S}^{-1}\{F(u)\}=f(t)$ และ $\mathrm{S}^{-1}\{G(u)=g(t)$ จะได้ว่า

$$\mathrm{S}^{-1}\{F(u)\pm G(u)\}=\mathrm{S}^{-1}\{F(u)\}\pm\mathrm{S}^{-1}\{G(u)\}=f(t)\pm g(t)$$

$$\mathrm{S}^{-1}\{cF(u)\} = c\,\mathrm{S}^{-1}\{F(u)\} = cf(t)$$

เมื่อ c คือค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 2.5 (Belgacem & Karaballi (2005)) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,\infty)$ ซึ่งมีอันดับชี้กำลัง α และ $\mathrm{S}\{f(t)\} = F(u)$ แล้วจะได้ว่า

$$\mathrm{S}\{t^n f^{(n)}(t)\} = u^n F^{(n)}(u)$$

โดยที่ $u \geq \alpha$

3. ผลการวิจัยและวิจารณ์

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสี่โดยใช้การแปลงซูมูดู

กำหนดให้ a,b,c,d เป็นจำนวนจริง พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสี่ที่อยู่ในรูป

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = 0 \tag{3.1}$$

โดยใช้การแปลงซูมูดูเราจะได้ทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยทั่วไปของ (3.1) ได้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $\mathrm{S}\{y(t)\} = Y(u)$ ผลเฉลยของ (3.1) คือ $y = \mathrm{S}^{-1}\{Y(u)\} = \mathrm{S}^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ

$$m^4 + (a-6)m^3 + (b-3a+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d = 0 \tag{3.2}$$

พิสูจน์ ทำการแปลงซูมูดูทั้งสองข้างของ (3.1) และใช้สมบัติเชิงเส้นของการแปลงซูมูดู จะได้

$$\mathrm{S}\{t^4 y^{(4)}\} + a\,\mathrm{S}\{t^3 y'''\} + b\,\mathrm{S}\{t^2 y''\} + c\,\mathrm{S}\{ty'\} + d\,\mathrm{S}\{y\} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 2.5 ทำให้ได้ว่า

$$u^4 \frac{d^4Y}{du^4} + au^3 \frac{d^3Y}{du^3} + bu^2 \frac{d^2Y}{du^2} + cu\frac{dY}{du} + dY = 0 \tag{3.3}$$

ให้ $Y = u^m \neq 0$ เป็นผลเฉลยทดสอบของสมการ (3.3) และแทนผลเฉลยทดสอบนี้ลงใน (3.3) จะได้

$$u^m\left[m^4 + (a-6)m^3 + (b-3a+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d\right] = 0 \tag{3.4}$$

หารตลอดด้วย u^m ทั้งสองข้างของ (3.4) ทำให้ได้

$$m^4 + (a-6)m^3 + (b-3a+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d = 0$$

ซึ่งคือสมการ (3.2) ดังนั้นถ้า $Y = u^m$ เป็นผลเฉลยของ (3.3) แล้ว $y = \mathrm{S}^{-1}\{Y(u)\} = \mathrm{S}^{-1}\{u^m\}$ เป็นผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ (3.1) เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ (3.2) จากนี้เราจะเรียก (3.2) ว่าสมการช่วย

หมายเหตุ 3.1: เราไม่เลือก $Y = e^{mu}$ เมื่อ $u \neq 0$ เป็นผลเฉลยทดสอบของสมการ (3.3) เนื่องจาก $Y = e^{mu}$ เป็นผลเฉลยทดสอบที่ไม่เหมาะสม เราจะแสดงให้เห็นว่า $Y = e^{mu}$ เป็นผลเฉลยทดสอบที่ไม่เหมาะสมของ (3.3) โดยสมมติให้ $Y = e^{mu}$ เป็นผลเฉลยทดสอบของ (3.3) และแทนผลเฉลยทดสอบนี้ลงใน (3.3) จะทำให้ได้สมการ (3.5)

$$u^4 m^4 e^{mu} + au^3 m^3 e^{mu} + bu^2 m^2 e^{mu} + cume^{mu} + de^{mu} = 0 \tag{3.5}$$

หารด้วย $u^4 e^{mu}$ ทั้งสองข้างของ (3.5) จะได้

$$m^4+\frac{am^3}{u}+\frac{bm^2}{u^2}+\frac{cm}{u^3}+\frac{d}{u^4}=0 \tag{3.6}$$

จะเห็นว่าหากใช้ผลเฉลยทดสอบ $Y=e^{mu}$ จะทำให้ได้ (3.6) ซึ่งเป็นสมการที่ไม่สามารถหาราก (m) ของสมการได้ เนื่องจากตัวแปร m จะขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ u นอกจากนี้ตารางการแปลงซูมูดูไม่มีผลการแปลงซูมูดูผกผันของ e^{mu} ดังนั้นฟังก์ชัน $Y=e^{mu}$ ไม่เหมาะที่จะนำมาใช้เป็นผลเฉลยทดสอบของสมการ (3.3)

หมายเหตุ 3.2: ถ้า $m=m_1,m_2,m_3,m_4$ เป็นรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของของสมการช่วย (3.2) แล้วเราจะได้จากทฤษฎีบท 3.1 ว่า

$$y_1=\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_1}\right\},y_2=\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_2}\right\},y_3=\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_3}\right\},y_4=\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_4}\right\}$$

เป็นผลเฉลยของ (3.1) ซึ่งผลเฉลยทั้งสี่เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี - ออยเลอร์ (3.1) คือ

$$y(t)=c_1\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_1}\right\}+c_2\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_2}\right\}+c_3\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_3}\right\}+c_4\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_4}\right\}$$

เมื่อ c_1,c_2,c_3,c_4 เป็นค่าคงตัว

หมายเหตุ 3.3: ในกรณีที่สมการช่วย (3.2) มี m เป็นรากกำลังซ้ำ k (เมื่อ k มีค่าเป็น 2, 3 หรือ 4) จะสามารถแสดงได้ว่าฟังก์ชัน

$$\mathrm{S}^{-1}\left\{u^m\right\},\ \mathrm{S}^{-1}\left\{u^m\right\}\ln t,\ \mathrm{S}^{-1}\left\{u^m\right\}\ln^2 t,\ldots,\ \mathrm{S}^{-1}\left\{u^m\right\}\ln^k t$$

เป็นผลเฉลยของ (3.1) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ในที่นี้จะแสดงวิธีการพิสูจน์ในกรณีที่ $k=3$ (กรณีอื่น ๆ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

สมมติว่ารากทั้งสี่ของสมการช่วย (3.2) คือ $m=m_1,m_2,m_3,m_4$ โดยที่ $m_1\neq m_2$ แต่ $m_2=m_3=m_4$

กำหนดให้ $w=\ln t$ ดังนั้น $\frac{dw}{dt}=\frac{1}{t}$ และโดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2y}{dw^2}-\frac{dy}{dw}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{1}{t^3}\left(\frac{d^3y}{dw^3}-3\frac{d^2y}{dw^2}+2\frac{dy}{dw}\right)$$

$$\frac{d^4y}{dt^4}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)=\frac{1}{t^4}\left(\frac{d^4y}{dw^4}-6\frac{d^3y}{dw^3}+11\frac{d^2y}{dw^2}-6\frac{dy}{dw}\right)$$

แทนลงใน (3.1) จะได้

$$\frac{d^4y}{dw^4}+(a-6)\frac{d^3y}{dw^3}+(-3a+b+11)\frac{d^2y}{dw^2}+\left(2a-b+c-6\right)\frac{dy}{dw}+dy=0 \tag{3.7}$$

ให้ L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นของ (3.7) เมื่อ

$$L = D^4 + (a-6)D^3 + (-3a+b+11)D^2 + \left(2a-b+c-6\right)D + d$$
$$= \frac{d^4}{dx^4} + (a-6)\frac{d^3}{dx^3} + (-3a+b+11)\frac{d^2}{dx^2} + \left(2a-b+c-6\right)\frac{d}{dx} + d$$

แล้วจะได้ว่า $Ly = 0$ ดังนั้นในกรณีที่ $m = m_1, m_2, m_3, m_4$ เมื่อ $m_1 \neq m_2$ แต่ $m_2 = m_3 = m_4$ จึงได้ว่า $L = (D - m_1)(D - m_2)^3$ และ $Ly = (D - m_1)(D - m_2)^3 y = 0$ ส่งผลให้ผลเฉลยที่สอดคล้องกับ $m = m_2$ ต้องสอดคล้องกับสมการ $(D - m_2)^3 y = 0$ ให้ $y = v(w)e^{m_2 w}$ ดังนั้น $(D - m_2)^3 v(w)e^{m_2 w} = 0$

พิจารณา $\left(D - m_2\right)ve^{m_2 w} = vm_2 e^{m_2 w} + \left(Dv\right)e^{m_2 w} - vm_2 e^{m_2 w} = \left(Dv\right)e^{m_2 w}$ ดังนั้น $(D - m_2)^3 ve^{m_2} = (D^3 v)e^{m_2 w} = 0$ เนื่องจาก $e^{m_2 w} \neq 0$ จะได้ $D^3 v = v''' = 0$ ดังนั้น $v(w) = c_2 + c_3 w + c_4 w^2$

โดยที่ c_2, c_3, c_4 เป็นค่าคงตัว ส่งผลให้ได้ผลเฉลยทั่วไปของ (3.7) เป็น

$$y(w) = c_1 e^{m_1 w} + \left(c_2 + c_3 w + c_4 w^2\right)e^{m_2 w}$$

นั่นคือ $y_1 = e^{m_1 w}, y_2 = e^{m_2 w}, y_3 = e^{m_2 w}w, y_3 = e^{m_2 w}w^2$ เนื่องจาก $w = \ln t$ จึงได้ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ (3.1) คือ $y_1 = t^{m_1}, y_2 = t^{m_2}, y_3 = t^{m_2}\ln t, y_4 = t^{m_2}(\ln t)^2$ หรือ

$$y_1 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_1}\right\}, y_2 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_2}\right\}, y_3 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_2}\right\}\ln t, y_4 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{m_2}\right\}(\ln t)^2$$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} - 18t^3 y''' + 111t^2 y'' - 231ty' = 0 \qquad (3.8)$$

จะเห็นว่า $a = -18$, $b = 111$, $c = -231$, $d = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ คือ $y = \mathrm{S}^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ

$$m(m-4)(m-8)(m-12) = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $m = 0, 4, 8, 12$ ดังนั้น

$$y_1 = \mathrm{S}^{-1}\{u^0\} = 1, \qquad y_2 = \mathrm{S}^{-1}\{u^4\} = \frac{t^4}{4!}$$
$$y_3 = \mathrm{S}^{-1}\{u^8\} = \frac{t^8}{8!}, \quad y_4 = \mathrm{S}^{-1}\{u^{12}\} = \frac{t^{12}}{12!}$$

เป็นผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ (4.1) เนื่องจาก y_1, y_2, y_3, y_4 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ (3.8) ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.8) คือ

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t) = c_1 + c_2^* t^4 + c_3^* t^8 + c_4^* t^{12}$$

เมื่อ $c_2^* = \frac{1}{4!}c_2$, $c_3^* = \frac{1}{8!}c_3$, $c_4^* = \frac{1}{12!}c_4$

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} + (1 - 2\sqrt{5})t^3 y''' + (4\sqrt{5} - 3)t^2 y'' + (8\sqrt{5} - 24)ty' = 0 \qquad (3.9)$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3.8) คือ $y = \mathrm{S}^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ

$$m\left(m-5\right)(m-\sqrt{5})(m-\sqrt{5}) = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $m = 0, 5, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ ดังนั้น

$$y_1 = \mathrm{S}^{-1}\{u^0\} = 1,\ y_2 = \mathrm{S}^{-1}\{u^5\} = \frac{t^5}{5!},\ y_3 = \mathrm{S}^{-1}\{u^{\sqrt{5}}\} = \frac{t^{\sqrt{5}}}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}$$

โดยหมายเหตุ 3.3 จะได้ว่า $y_4 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{\sqrt{5}}\right\}\ln t = \dfrac{t^{\sqrt{5}}\ln t}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}$

เนื่องจาก y_1, y_2, y_3, y_4 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (3.9) จึงได้ว่า

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t) = c_1 + c_2^* t^5 + c_3^* t^{\sqrt{5}} + c_4^* t^{\sqrt{5}} \ln t$$

เมื่อ $c_2^* = \dfrac{c_2}{5!},\ c_3^* = \dfrac{c_3}{\Gamma(\sqrt{5}+1)},\ c_4^* = \dfrac{c_4}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ (3.9)

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} + 6t^3 y''' + 10t^2 y'' + 4ty' = 0 \tag{3.10}$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ (3.10) คือ $y = \mathrm{S}^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ $m^2(m^2+3) = 0$ ซึ่ง $m = 0, 0, \pm\sqrt{3}i$ ดังนั้น

$$y_1 = \mathrm{S}^{-1}\{u^0\} = \mathrm{S}^{-1}\{1\} = 1$$

โดยหมายเหตุ 3.3 ได้ว่า

$$y_2 = y_1 \ln t = \ln t$$
$$y_3 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{\sqrt{3}i}\right\}$$
$$y_4 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{-\sqrt{3}i}\right\}$$

เนื่องจาก $\mathrm{S}\left\{\dfrac{t^{\sqrt{3}i}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}\right\} = \left(\dfrac{1}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}\right)\left(\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^\infty e^{-t/u} t^{\sqrt{3}i}\, dt\right) = u^{\sqrt{3}i}$ จึงได้ว่า $\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{\sqrt{3}i}\right\} = \dfrac{t^{\sqrt{3}i}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}$

ดังนั้น $y_3 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{\sqrt{3}i}\right\} = \dfrac{t^{\sqrt{3}i}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \dfrac{e^{\sqrt{3}i\ln t}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \dfrac{\cos\left(\sqrt{3}\ln t\right) + i\sin\left(\sqrt{3}\ln t\right)}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\mathrm{S}^{-1}\left\{u^{-\sqrt{3}i}\right\} = \dfrac{t^{-\sqrt{3}i}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}$ และ

$$y_4 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^{-\sqrt{3}i}\right\} = \frac{t^{-\sqrt{3}i}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \frac{e^{-\sqrt{3}i\ln t}}{\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \frac{\cos\left(\sqrt{3}\ln t\right) - i\sin\left(\sqrt{3}\ln t\right)}{\Gamma\left(1-\sqrt{3}i\right)}$$

เนื่องจาก y_1, y_2, y_3, y_4 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ (3.10) ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ (3.10) คือ

$$y(t) = c_1 + c_2 \ln t + c_3^* \cos\left(\sqrt{3}\ln t\right) + c_4^* \sin\left(\sqrt{3}\ln t\right)$$

เมื่อ $c_3^* = \dfrac{c_3\Gamma\left(1-\sqrt{3}i\right) + c_4\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\Gamma\left(1-\sqrt{3}i\right)\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}$ แล $c_4^* = \dfrac{i\left[c_3\Gamma\left(1-\sqrt{3}i\right) - c_4\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)\right]}{\Gamma\left(1-\sqrt{3}i\right)\Gamma\left(1+\sqrt{3}i\right)}$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่โดยใช้การแปลงซูมูดู

ต่อไปจะพิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = a_q t^q + a_{q-1} t^{q-1} + a_{q-2} t^{q-2} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \qquad (4.1)$$

โดยที่ $a, b, c, d, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, a_q \in \mathbb{R}$ และ $a_q \neq 0$

ทฤษฎีบท 4.1 ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$ ของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่ (4.1) คือ

$$y_p(t) = \mathrm{S}^{-1}\left\{ A_q u^q + A_{q-1} u^{q-1} + A_{q-2} u^{q-2} + \cdots + A_1 u + A_0 \right\}$$

โดยที่ $A_q = \dfrac{q!a_q}{q(q-1)(q-2)(q-3) + aq(q-1)(q-2) + bq(q-1) + cq + d}$,

$$A_{q-1} = \frac{(q-1)!a_{q-1}}{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4) + a(q-1)(q-2)(q-3) + b(q-1)(q-2) + c(q-1) + d},$$

$$\vdots$$

$A_1 = \dfrac{a_1}{c+d}$ เมื่อ $c+d \neq 0$ ถ้า $a_1 = 0$,

$A_0 = \dfrac{a_0}{d}$ เมื่อ $d \neq 0$ ถ้า $a_0 \neq 0$,

และ $A_i = 0$ เมื่อ $a_i = 0$

พิสูจน์ ดำเนินการแปลงซูมูดูทั้งสองข้างของ (4.1) และใช้สมบัติการแปลงเชิงเส้น จะได้

$$u^4 \frac{d^4Y}{du^4} + au^3 \frac{d^3Y}{du^3} + bu^2 \frac{d^2Y}{du^2} + cu\frac{dY}{du} + dY = a_q (q!)u^q + a_{q-1}(q-1)!u^{q-1} + \cdots + a_1(1!)u + a_0 \qquad (4.2)$$

กำหนดให้ $Y = A_q u^q + A_{q-1} u^{q-1} + A_{q-2} u^{q-2} + \cdots + A_1 u + A_0$ (4.3)

เป็นผลเฉลยทดสอบของ (4.2) โดย $A_q, A_{q-1}, A_{q-2}, \ldots, A_1, A_0$ เป็นค่าคงตัวที่ต้องพิจารณา แทน (4.3) ลงใน (4.2) จะได้

$$\begin{aligned} & A_p\big(q(q-1)(q-2)(q-3) + aq(q-1)(q-2) + bq(q-1) + cq + d\big)u^q \\ & + A_{q-1}\big((q-1)(q-2)(q-3)(q-4) + a(q-1)(q-2)(q-3) + b(q-1)(q-2) + c(q-1) + d\big)u^{q-1} \\ & + \cdots + A_2(2c+d)u^2 + A_1(c+d)u + A_0 d \\ & = q!a_q u^q + (q-1)!a_{q-1}u^{q-1} + (q-2)!a_{q-2}u^{q-2} + \cdots + 2!a_2u^2 + a_1u + a_0 \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $i = 0, 1, 2, \ldots, q-1, q$

ถ้า $a_i = 0$ แล้ว $A_i = 0$

ถ้า $a_i \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$A_q = \frac{q!a_q}{q(q-1)(q-2)(q-3) + aq(q-1)(q-2) + bq(q-1) + cq + d}$$ เมื่อตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

$$A_{q-1} = \frac{(q-1)!a_{q-1}}{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4) + a(q-1)(q-2)(q-3) + b(q-1)(q-2) + c(q-1) + d}$$ เมื่อตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

$$\vdots$$

$A_2 = \dfrac{2!a_2}{2b+2c+d}$ เมื่อ $2b+2c+d \neq 0$

$A_1 = \dfrac{a_1}{c+d}$ เมื่อ $c+d \neq 0$

$A_0 = \dfrac{a_0}{d}$ เมื่อ $d \neq 0$

ดังนั้น $y_p(t) = \mathrm{S}^{-1}\{Y(u)\} = \mathrm{S}^{-1}\left\{A_q u^q + A_{q-1}u^{q-1} + A_{q-2}u^{q-2} + \cdots + A_1 u + A_0\right\}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ (4.1)

หมายเหตุ 4.1 เนื่องจากหลักการที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1 นั้นมีส่วนของการใช้หลักการเทียบสัมประสิทธิ์ ซึ่งทฤษฎีบท 4.1 จะไม่สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ได้ หากตัวส่วนที่ปรากฏในสูตรการคำนวณค่า $A_q, A_{q-1}, \ldots, A_1, A_0$ มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อกำลังของ t ที่ปรากฏทางขวามือของ (4.1) มีค่าเท่ากับรากของ (3.2) ดังนั้นในกรณีที่กำลังของ t ที่ปรากฏทางขวามือของ (4.1) มีค่าเท่ากับรากของ (3.2) อาจใช้วิธีการแปรผันพารามิเตอร์ (Variation of parameters) ในการหาผลเฉลยเฉพาะแทนการใช้ทฤษฎีบท 4.1

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} - 10t^3 y''' + 35t^2 y'' - 35ty' = 10t^3 + 5t \qquad (4.4)$$

ผลเฉลยทั่วไปของ (4.4) อยู่ในรูป $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ โดยที่ $y_c(t)$ คือ ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของ (4.4) และ $y_p(t)$ คือ ผลเฉลยเฉพาะของ (4.4) หาผลเฉลย $y_c(t)$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าสมการช่วยของสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของ (4.5) คือ $m(m-2)(m-6)(m-8) = 0$ ดังนั้น $m = 0, 2, 6, 8$ เป็นรากของสมการช่วย และสรุปได้ว่า

$$y_1 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^0\right\} = 1,\ y_2 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^2\right\} = \frac{t^2}{2!},\ y_3 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^6\right\} = \frac{t^6}{6!},\ y_4 = \mathrm{S}^{-1}\left\{u^8\right\} = \frac{t^8}{8!}$$

เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของ (4.4) ดังนั้น

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = c_1 + c_2^* t^2 + c_3^* t^6 + c_4^* t^8$$

เมื่อ $c_2^* = \frac{1}{2}c_2, c_3^* = \frac{1}{6!}c_3, c_4^* = \frac{1}{8!}c_4$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของ (4.4)

ต่อไปจะหาผลเฉลยเฉพาะโดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของ (4.4) คือ

$$y_p(t) = \mathrm{S}^{-1}\left\{A_3 u^3 + A_2 u^2 + A_1 u + A_0\right\}$$

โดยที่ $A_3 = \dfrac{3!a_3}{6a+6b+3c+d} = \dfrac{4}{3},\ A_2 = 0, A_1 = \dfrac{a_1}{c+d} = -\dfrac{1}{7}, A_0 = 0$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ คือ $y_p(t) = \mathrm{S}^{-1}\left\{A_3 u^3 + A_1 u\right\} = \mathrm{S}^{-1}\left\{\frac{4}{3}u^3 - \frac{1}{7}u\right\} = \frac{2}{9}t^3 - \frac{1}{7}t$

และ $y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1 + c_2^* t^2 + c_3^* t^6 + c_4^* t^8 + \dfrac{2t^3}{9} - \dfrac{t}{7}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (4.4)

ตัวอย่าง 4.2 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4y^{(4)} - 2t^3y''' + 7t^2y'' - 15ty' + 16y = 13t^5 - 3t^4 - 2t^3 + 6 \qquad (4.5)$$

หาผลเฉลย $y_c(t)$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าสมการช่วยของสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของ (4.5) คือ $(m-2)^4 = 0$ และผลเฉลยสี่ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของ (4.5) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน คือ

$y_1 = \mathrm{S}^{-1}\{u^2\},\ y_2 = \mathrm{S}^{-1}\{u^2\}\ln t,\ y_3 = \mathrm{S}^{-1}\{u^2\}\ln^2 t,\ y_4 = \mathrm{S}^{-1}\{u^2\}\ln^3 t$ หรือ

$$y_1 = \frac{t^2}{2},\ y_2 = \frac{t^2 \ln t}{2}, y_3 = \frac{t^2 \ln^2 t}{2}, y_4 = \frac{t^2 \ln^3 t}{2}$$

ดังนั้น $y_c(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 = c_1^*t^2 + c_2^*t^2 \ln t + c_3^*t^2 \ln^2 t + c_4^*t^2 \ln^3 t$

เมื่อ $c_1^* = \dfrac{c_1}{2}, c_2^* = \dfrac{c_2}{2}, c_3^* = \dfrac{c_3}{2}, c_4^* = \dfrac{c_4}{2}$ ต่อไปจะหาผลเฉลยเฉพาะโดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของ (4.5) คือ $y_p(t) = \mathrm{S}^{-1}\{A_5u^5 + A_4u^4 + A_3u^3 + A_2u^2 + A_1u + A_0\}$ โดยที่

$$A_5 = \frac{520}{27}, A_4 = -\frac{9}{2}, A_3 = -12, A_2 = 0,\ A_1 = 0, A_0 = \frac{3}{8}$$

ดังนั้น $y_p(t) = \mathrm{S}^{-1}\left\{\dfrac{520}{27}u^5 - \dfrac{9}{2}u^4 - 12u^3 + \dfrac{3}{8}\right\} = \dfrac{13}{81}t^5 - \dfrac{3}{16}t^4 - 2t^3 + \dfrac{3}{8}$ และ

$$y(t) = c_1^*t^2 + c_2^*t^2 \ln t + c_3^*t^2(\ln t)^2 + c_4^*t^2(\ln t)^3 + \frac{13}{81}t^5 - \frac{3}{16}t^4 - 2t^3 + \frac{3}{8}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ (4.5)

4. สรุป

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสี่

$$t^4y^{(4)} + at^3y''' + bt^2y'' + cty' + dy = 0$$

เมื่อ a,b,c,d เป็นจำนวนจริง โดยใช้การแปลงซูมูดู เราได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ให้สูตรในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสี่ อีกทั้งยังได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ใช้การแปลงซูมูดูหาผลเฉลยเฉพาะของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธุ์อันดับสี่ซึ่งอยู่ในรูป

$$t^4y^{(4)} + at^3y''' + bt^2y'' + cty' + dy = r(t)$$

เมื่อ $r(t) = a_qt^q + a_{q-1}t^{q-1} + a_{q-2}t^{q-2} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0$ โดยที่ $a_q, a_{q-1}, a_{q-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \square$

เนื่องจากวัตถุประสงค์หลักของบทความนี้ คือ ใช้ตารางการแปลงซูมูดูเป็นเครื่องมือช่วยในการสร้างสูตรเพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์อันดับที่สี่ ทั้งแบบเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์ ในกรณีสมการแบบไม่เอกพันธุ์นั้นยังมีข้อจำกัดของการหาผลเฉลยโดยใช้การแปลงซูมูดูสำหรับฟังก์ชัน $r(t)$ ใด ๆ เนื่องจากในกรณีที่ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งไม่มีข้อมูลของ $\mathrm{S}\{r(t)\}$ ปรากฏตามตารางผลการแปลงซูมูดู การหาผลเฉลยด้วยการแปลงซูมูดูจะมีความยุ่งยากขึ้นเนื่องจากต้องหา $\mathrm{S}\{r(t)\}$ โดยใช้บทนิยามของการแปลงซูมูดู นอกจากนี้หลังจากนำสมการโคชี – ออยเลอร์ไม่เอกพันธุ์ไปดำเนินการการแปลงซูมูดู จนกระทั่งได้ฟังก์ชัน $Y(u)$ แล้ว จะต้องมีการแปลงซูมูดูผกผันของ $Y(u)$ เพื่อให้ได้ผล

เฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ นั่นคือ $y(t) = \mathrm{S}^{-1}\{Y(u)\}$ หาก $\mathrm{S}^{-1}\{Y(u)\}$ ไม่มีปรากฏในตารางการแปลงซูมูดู ก็จะมีความยุ่งยากในการทำงานมากขึ้น คือต้องหา $\mathrm{S}^{-1}\{Y(u)\}$ โดยใช้บทนิยาม

Table 1 Sumudu conversion results for some functions.

$f(t) = \mathrm{S}^{-1}\{F(u)\}$	$F(u) = \mathrm{S}\{f(t)\}$
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \ldots$	$u^{n-1}, u > 0$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, n > 0$	$u^{n-1}, u > 0$
e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \ldots$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
$\cos at$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{(b-a)}, a \neq b$	$\frac{1}{(1-bu)(1-au)}$
$\ln t$	$-\gamma + \ln u$
$\delta(t-a)$	$\frac{e^{-a/u}}{u}$
$\frac{t}{a}, \quad 0 \le t \le a, \quad f(t+a) = f(t)$	$\frac{u}{a} - \frac{e^{-a/u}}{1-e^{-a/u}}$
$r^n, \quad n \le t < n+1, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1-e^{-1/u}}{1-re^{-1/u}}$

5. References

Belgacem, F. B. M., & Karaballi, A. A. (2005). Sumudu transform fundamental properties investigations and application. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 10*, 1-23.

Ghil, B., & Kim, H. (2015). The solution of Euler-Cauchy equation by using Laplace transform. *International Journal of Mathematical Analysis, 9*(53), 2611-2618.

Jhanthanam, S., Nonlaopon, K., & Orankitjaroen, S. (2019). Generalized solutions of the third-order Cauchy-Euler equation in the space of right-sided distributions via Laplace transform. *Mathematics, 7*(4), 376. https://doi.org/10.3390/math7040376

Pothat, S. H. (2015). The reduction of order on Cauchy-Euler equation with a bulge function. *Applied Mathematical Sciences, 9*, 1139-1143.

Prasertsang, P., Sattaso, S., Nonlaopon, K., & Kim, H. (2021). Analytical study for certain ordinary differential equations with variable coefficient via -transform. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 4*, 1184-1199.

Sacorn, N., Nonlaopon, K., & Kim, H. (2018). A note on the generalized solutions of the third-order Cauchy-Euler equations. *Communications in Mathematical Analysis, 9*, 661-669.