



การวิเคราะห์การเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอก

Large Displacement Analysis of Toroidal Dome Structures Having Variable Thickness under External Pressure

วีรพันธ์ เจียมมีปรีชา^{1*} ศตคุณ เดชพันธ์¹ คมกร ไชยเดชาธร¹ ชาญชัย เงาะปก¹ เสริมศักดิ์ ดิยะแสงทอง¹ ชูดาภาค เดชพันธ์¹ กรกต เลิศชัยพงค์² และสิทธิศักดิ์ แจ่มนาม³

¹สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา 744 ถนนสุรนารายณ์ ตำบลในเมือง อำเภอเมืองนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา 30000

²สาขาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา 744 ถนนสุรนารายณ์ ตำบลในเมือง อำเภอเมืองนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา 30000

³ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 1518 ถนนประชากรราษฎร์ 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800

Weeraphan Jiammeepreecha^{1*}, Satakhun Detphan¹, Komkorn Chaidachatorn¹, Chanchai Ngohpok¹, Sermak Tiyasangthong¹, Chudapak Detphan¹, Korakot Lerdchaipong² and Sittisak Jamnam³

¹Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima

744 Suranarai Road, NaiMuang, Muang, Nakhon Ratchasima, Thailand, 30000

²Department of Survey Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima

744 Suranarai Road, NaiMuang, Muang, Nakhon Ratchasima, Thailand, 30000

³Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok

1518 Pracharat 1 Road, Wongsawang, Bangsue, Bangkok, Thailand, 10800

*ผู้รับผิดชอบบทความ: weeraphan.ji@rmuti.ac.th เบอร์โทรศัพท์ 09-1779-0935

Received: 11 July 2023, Revised: 25 August 2023, Accepted: 27 August 2023

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์การเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอก โดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ การนิยามค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนและแรงดัดจะสามารถนิยามได้ในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์และเมตริกซ์ความโค้ง การสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอกจะอาศัยหลักการของงานเสมือนและเขียนได้ในรูปแบบที่เหมาะสม การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ ในการศึกษารั้งนี้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้ชิ้นส่วนย่อยแบบคาน 1 มิติ ที่นิยามด้วยฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับห้า โดยทำการแบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า



ค่าการเสียรูปของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าแรงดันภายนอกมีค่าเพิ่มสูงขึ้น การเพิ่มอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดจะทำให้พื้นที่ผิวของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นส่งผลให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้น สำหรับการเพิ่มค่า อัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเนื่องจากค่าความแข็งแรงของโครงสร้างมีค่าลดลง

คำสำคัญ การวิเคราะห์การเสียรูปขนาดใหญ่ โครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง ความหนาแปรเปลี่ยน ฟังก์ชันพลังงาน วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Abstract

This paper presents a large displacement analysis of a toroidal dome structure having variable thickness under external pressure using differential geometry. Membrane and flexural strain energies are defined in terms of metric tensor and curvature components. The energy functional of the toroidal dome structure under external pressure is derived from the principle of virtual work, and it is expressed in the appropriate forms. Numerical results can be obtained by finite element method and iterative procedure. In this study, finite element model is simulated using one-dimensional beam elements via a fifth-order polynomial shape function, and it is divided along the meridian line. The numerical results indicate that the displacement responses of the toroidal dome structure increase for larger external pressure. The surface of the toroidal dome structure increases for a large value of the cross-sectional bend radii ratio. Then the displacement responses increase under a large value of the cross-sectional bend radii ratio. In addition, the stiffness of the toroidal dome structure decreases if the cross-sectional radius-to-wall thickness ratios increase. Therefore, the displacement responses increase under a large value of the cross-sectional radius to wall thickness ratio.

Keywords: Large Displacement Analysis, Toroidal Dome Structure, Variable Thickness, Energy Functional, Finite Element Method

1. บทนำ

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยาง (Toroidal Shells) จะมีลักษณะแตกต่างโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Shells) ทั่วไป เช่นโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม รูปทรงอิลิปติก รูปทรงกระบอก และรูปทรงแคปซูล เป็นต้น [1] เนื่องจากพื้นที่ผิวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางจะไม่มีการตัดกันรอบแกนหมุน (Axis of Revolution) โดยทั่วไปโครงสร้างประเภทนี้จะเป็นที่นิยมใช้ในภาคอุตสาหกรรมเช่น ถังบรรจุปิโตรเลียมเหลว, ท่อลมร้อน, เรือดำน้ำ และยางรถยนต์หรือเครื่องบิน เป็นต้น [2-3] โดยที่กระบวนการหาค่าตอบแบบดั้งเดิมสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมภายใต้แรงดันภายในสามารถคำนวณได้จากทฤษฎีเมมเบรนแบบเชิงเส้นแต่เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด (Toroid Crest) ดังนั้น Clark [4], Jordan [5] และ Sanders and Liepins [6] จึงได้นำเสนอสมการ

สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางโดยใช้ทฤษฎีเชลล์แบบเชิงเส้น ทฤษฎีเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้น และทฤษฎีการลดทอมเป็นเมมเบรนแบบเชิงเส้น (Linearized Membrane Theory) ตามลำดับ ต่อมา Sun [7] ซึ่งได้นำเสนอผลเฉลยแบบแม่นยำตรงสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรรูปทรงห้วงยางที่มีความละเอียดสูงโดยประยุกต์ใช้เป็นอุปกรณ์ขยายตัวของท่อลมร้อน

สำหรับการประยุกต์ใช้โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางกับงานทางด้านวิศวกรรมโยธาและนอกชายฝั่งได้มีการจำลองเป็นโครงสร้างโดมในงานวิจัยของ Jiammeepreecha and Chucheepsakul [8] โดยใช้ทฤษฎีเชลล์และทฤษฎีเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้น ตามลำดับ หลังจากนั้น Jiammeepreecha et al. [9-10] ได้ใช้ทฤษฎีเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้นและทฤษฎีเชลล์เพื่อศึกษาผลของโครงสร้างเปลือกบางรับแรงดันน้ำสถิตยเมื่อพิจารณาผลของพลังงานความเครียดเนื่องจากของเหลวที่บรรจุภายใน (Internal

Fluid) พบว่าค่าการเสีรूपมีค่าน้อยลงเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางไม่ได้บรรจุของเหลวภายใน สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงท่วงยางที่มีหน้าตัดรูปทรงอื่น ๆ ในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยของ Tanbanjongkij et al. [11] สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงท่วงยางหน้าตัดรูปทรงอิลิปติก

สำหรับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้คือเพื่อนำเสนอถึงผลตอบสนองการเสีรूपขนาดใหญ่ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงท่วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอกโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) ในการสร้างรูปทรงเรขาคณิตของแบบจำลอง [10,12] และนิยามค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนและแรงดัดได้ในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor) และเมตริกซ์ความโค้ง (Curvature Tensor) การสร้างฟังก์ชันพลังงาน (Energy Functional) ของระบบโครงสร้างโดมรูปทรงท่วงยางรับแรงดันภายนอกจะอาศัยหลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) [13] และเขียนได้ในรูปแบบที่เหมาะสม (Appropriate Form) การเขียนฟังก์ชันพลังงานในรูปแบบที่เหมาะสมเป็นการจัดรูปสมการเพื่อลดระยะเวลาในการคำนวณแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Analysis) สำหรับการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าการเสีรूपขนาดใหญ่โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure) [14] ในการศึกษาครั้งนี้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้ชิ้นส่วนย่อยแบบคาน 1 มิติ ที่นิยามด้วยฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับห้า (Fifth-order Polynomial) โดยทำการแบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน

2. ทฤษฎีและวิธีการดำเนินการวิจัย

2.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

2.1.1 วัสดุของโครงสร้างมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linearly Elastic Material)

2.1.2 ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสีรूप

2.1.3 ค่าการเสีรूपเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้างมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงดันภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้าง จึงไม่นำมาพิจารณา

2.1.4 การวิเคราะห์เสถียรภาพของโครงสร้างไม่ได้พิจารณาในบทความนี้ ดังนั้นแรงดันภายนอกจะมีค่าน้อยกว่าแรงดันวิกฤติที่ทำให้โครงสร้างเกิดสูญเสียเสถียรภาพ

2.2 ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์

จากรูปที่ 1 กำหนดให้ (X, Y, Z) เป็นระบบพิกัดฉาก $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกนในระบบพิกัดฉาก และ (θ, ϕ) คือค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิวซึ่งวัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและเส้นพิกัดลองจิจูด ตามลำดับ ดังนั้นจะสามารถนิยามเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างโดมรูปทรงท่วงยางที่พื้นผิวกึ่งกลางความหนา (Middle Surface) [12] ได้ตั้งสมการที่ (1)

$$\vec{P} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k} \quad (1)$$

ในที่นี้

$$X = (R + r \cos \theta) \cos \phi \quad (2ก)$$

$$Y = (R + r \cos \theta) \sin \phi \quad (2ข)$$

$$Z = r \sin \theta \quad (2ค)$$

เมื่อ r คือ ความยาวรัศมีหน้าตัด, เมตร

R คือ ความยาวรัศมีการดัด, เมตร

จากนั้นเมื่อของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงท่วงยางรับแรงดันภายนอกจะทำให้เกิดการเสีรूपโดยพื้นผิวอ้างอิงเคลื่อนที่ไปยังพื้นผิวที่ตำแหน่งใหม่เรียกว่าพื้นผิวหลังการเสีรूप ดังนั้นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวที่เกิดการเสีรूपจะสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (3)

$$\vec{P}^* = \vec{P} + \frac{\vec{P}_0}{A} u + \frac{\vec{P}_0}{B} v + \vec{n} w \quad (3)$$

เมื่อ (u, v, w) คือค่าการเสีรूपตามแนวเมอร์ริเดียน แนวพิกัดลองจิจูดและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ ในที่นี้ตัวห้อย (θ, ϕ) แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบาง ดังแสดงในรูปที่ 2 เนื่องจากเป็นปัญหาสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Problem)

ดังนั้นค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดสองจุดมีค่าเป็นศูนย์ ($v = 0$) สำหรับ (A, B) คือค่าพารามิเตอร์ของ Lamé ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (4)

$$A = \sqrt{\vec{P}_\theta \cdot \vec{P}_\theta} \quad (4ก)$$

$$B = \sqrt{\vec{P}_\phi \cdot \vec{P}_\phi} \quad (4ข)$$

กำหนดให้ \vec{n} คือเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (5)

$$\vec{n} = \frac{\vec{P}_\theta \times \vec{P}_\phi}{|\vec{P}_\theta \times \vec{P}_\phi|} \quad (5)$$

จากทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [10,12] สามารถนิยามรูปแบบพื้นฐานอันดับหนึ่ง (First Fundamental Form) ของพื้นผิวอ้างอิงและพื้นผิวหลังการเสียรูปได้ดังสมการที่ (6)

$$d\vec{P} \cdot d\vec{P} = (Ad\theta)^2 + (Bd\phi)^2 \quad (6ก)$$

$$d\vec{P}^* \cdot d\vec{P}^* = (A^*d\theta)^2 + (B^*d\phi)^2 \quad (6ข)$$

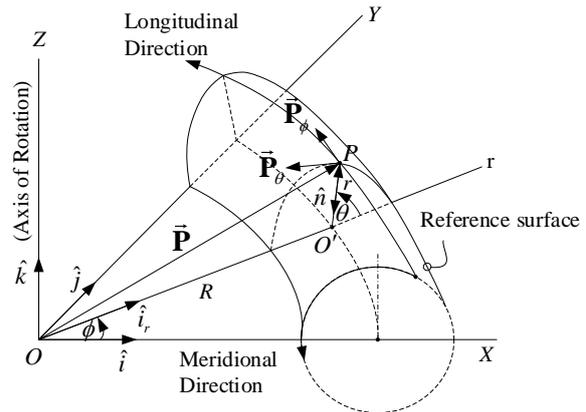
ในที่นี้ด้วย (*) แสดงถึงค่าพารามิเตอร์สำหรับพื้นผิวหลังการเสียรูป เมื่อ (A, B) คือส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ที่สภาวะอ้างอิงสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (4) ในขณะที่ (A^*, B^*) คือส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ที่สภาวะหลังการเสียรูปมีค่าตามสมการที่ (7)

$$A^* = \sqrt{\vec{P}_\theta^* \cdot \vec{P}_\theta^*} \quad (7ก)$$

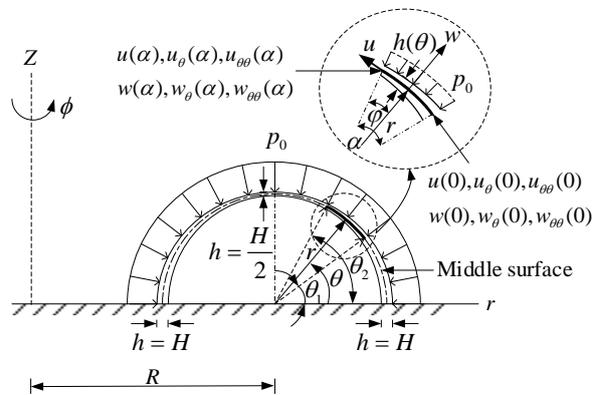
$$B^* = \sqrt{\vec{P}_\phi^* \cdot \vec{P}_\phi^*} \quad (7ข)$$

จากสมการที่ (4) และ (7) จะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังสมการที่ (8)

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} (A^*/A)^2 - 1 \\ (B^*/B)^2 - 1 \end{cases} \quad (8)$$



รูปที่ 1 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างโดมรูปทรงทรงแวงยาง



รูปที่ 2 โครงสร้างโดมรูปทรงทรงแวงยางรับแรงดันภายนอก

สำหรับรูปแบบพื้นฐานอันดับสอง (Second Fundamental Form) ของพื้นผิวอ้างอิง จะแสดงส่วนประกอบของเมตริกซ์ความโค้งได้ดังสมการที่ (9)

$$L = \vec{P}_{\theta\theta} \cdot \vec{n} \quad (9ก)$$

$$N = \vec{P}_{\phi\phi} \cdot \vec{n} \quad (9ข)$$

จากสมการที่ (4) และ (9) จะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์และความโค้ง ดังสมการที่ (10)

$$\kappa_\theta = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w_\theta}{A} \right) - \frac{A_\phi w_\phi}{AB^2} \quad (10ก)$$

$$\kappa_\phi = -\frac{B_\theta w_\theta}{A^2} - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{w_\phi}{B} \right) \quad (10ข)$$

กำหนดให้ $\{\mathbf{g}\}^T = [u \ w \ u_\theta \ w_\theta \ u_{\theta\theta} \ w_{\theta\theta}]$ ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปในสมการที่ (8) ได้ดังสมการที่ (11)

$$\varepsilon_i = L_k^i g_k + \frac{1}{2} H_{kl}^i g_k g_l \quad (11)$$

ในที่นี้

$$\{\mathbf{L}_1\}^T = \left[0 \quad -\frac{L}{A^2} \quad \frac{1}{A} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (12ก)$$

$$\{\mathbf{L}_2\}^T = \left[\frac{B_\theta}{AB} \quad -\frac{N}{B^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (12ข)$$

$$\{\mathbf{H}_1\} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{A^4} & 0 & 0 & \frac{L}{A^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{A^4} & -\frac{L}{A^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{A^3} & \frac{1}{A^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{A^3} & 0 & 0 & \frac{1}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12ค)$$

$$\{\mathbf{H}_2\} = \begin{bmatrix} \frac{B_\theta^2}{(AB)^2} & -\frac{B_\theta N}{AB^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{B_\theta N}{AB^3} & \frac{N^2}{B^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12ง)$$

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในสมการที่ (10) ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (13)

$$\kappa_i = S_k^i g_k \quad (13)$$

ในที่นี้

$$\{\mathbf{S}_1\}^T = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A_\theta}{A^3} \quad 0 \quad -\frac{1}{A^2} \right] \quad (14ก)$$

$$\{\mathbf{S}_2\}^T = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{B_\theta}{A^2 B} \quad 0 \quad 0 \right] \quad (14ข)$$

2.3 พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนและแรงดัด

สำหรับวัสดุของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น จะสามารถคำนวณหาค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรน (Strain Energy due to Membrane Stiffness) [12-13] จะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (15)

$$U_m = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \end{Bmatrix}^T [\mathbf{C}'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \end{Bmatrix} d\theta \quad (15)$$

เมื่อ $[\mathbf{C}']$ คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการยืดหดตัว (Extensional Rigidity) ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (16)

$$[\mathbf{C}'] = \frac{E'h(\theta)}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

เมื่อ E' คือ โมดูลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus), Pa

μ คือ อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's Ratio)

และ $h(\theta)$ คือความหนาของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนดังสมการที่ (17)

$$h(\theta) = H \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (17ก)$$

$$h(\theta) = H \left(\frac{\theta}{\pi} \right) \quad \text{สำหรับ } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \quad (17ข)$$

เมื่อ H คือ ความหนาของโครงสร้างที่ฐานรองรับ, เมตร การแปรเปลี่ยนความหนาของโครงสร้างมักโดยทั่วไปจะพิจารณาเฉพาะตำแหน่งฐานรองรับ (Support Condition) เนื่องจากมีแรงปฏิกิริยาสูง อย่างไรก็ตามสมการที่ (17) สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับกรณีที่โครงสร้างสามารถขึ้นรูปได้ โดยที่ความหนาแปรเปลี่ยนตลอดแนวพิกัดเมอร์ริเดียน ซึ่งเหมาะกับโครงสร้างติดตั้งใต้น้ำ (Underwater Structures) โดยแรงดันภายนอกที่เกิดขึ้นจะแปรเปลี่ยนตลอดความลึกของโครงสร้าง [8-10] ดังนั้นการพิจารณาความหนาแปรเปลี่ยนจะเกิดความประสิทธิภาพมากกว่าโครงสร้างที่มีความหนาคงที่ ดังนั้นจากสมการที่ (15) จะเขียนสมการแปรผันของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนได้ดังสมการที่ (18)

$$\delta U_m = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{\mathbf{g}\}^T ([\mathbf{k}_m] + [\mathbf{n}_1] + [\mathbf{n}_2]) \{\mathbf{g}\} d\theta \quad (18)$$



ในที่นี้

$$[\tilde{\mathbf{k}}_m] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} (\{\mathbf{L}_i\} \{\mathbf{L}_j\}^T) \quad (19ก)$$

$$[\tilde{\mathbf{n}}_1] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} \begin{bmatrix} (\{\mathbf{L}_i\} \{\hat{\mathbf{g}}\}^T) [\mathbf{H}_j] + \\ (\{\hat{\mathbf{g}}\}^T \{\mathbf{L}_i\}) [\mathbf{H}_j] + \\ [\mathbf{H}_i] (\{\hat{\mathbf{g}}\} \{\mathbf{L}_j\}^T) \end{bmatrix} \quad (19ข)$$

$$[\tilde{\mathbf{n}}_1] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} \begin{bmatrix} (\{\mathbf{L}_i\} \{\hat{\mathbf{g}}\}^T) [\mathbf{H}_j] + \\ (\{\hat{\mathbf{g}}\}^T \{\mathbf{L}_i\}) [\mathbf{H}_j] + \\ [\mathbf{H}_i] (\{\hat{\mathbf{g}}\} \{\mathbf{L}_j\}^T) \end{bmatrix} \quad (19ค)$$

สำหรับพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัด (Strain Energy due to Bending Stiffness) ของวัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น [12-13] จะมีค่าดังสมการที่ (20)

$$U_b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \kappa_{\theta} \\ \kappa_{\phi} \end{Bmatrix}^T [\mathbf{D}'] \begin{Bmatrix} \kappa_{\theta} \\ \kappa_{\phi} \end{Bmatrix} d\theta \quad (20)$$

เมื่อ $[\mathbf{D}']$ คือเมตริกซ์ความแข็งแรงแรงเนื่องจากการดัด (Flexural Rigidity) ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (21)

$$[\mathbf{D}'] = \frac{E'h^3(\theta)}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

จากสมการที่ (20) จะเขียนสมการแปรผันของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดได้ดังสมการที่ (22)

$$\delta U_b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{\mathbf{g}\}^T [\tilde{\mathbf{k}}_b] \{\mathbf{g}\} d\theta \quad (22)$$

ในที่นี้

$$[\tilde{\mathbf{k}}_b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{D}'_{ij} (\{\mathbf{S}_i\} \{\mathbf{S}_j\}^T) \quad (23)$$

เนื่องจากการวิเคราะห์การเสถียรภาพขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรับแรงดันแบบสมมาตร ดังนั้นค่าพลังงานความเครียดแบบไม่เชิงเส้นที่เกิดขึ้นในโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอกจะพิจารณาเฉพาะเทอมของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนเท่านั้น ในขณะที่เทอมของแรงดัดจะพิจารณาเฉพาะแบบเชิงเส้น

2.4 งานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายนอก

งานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายนอก (Virtual Work done by External Pressure) ที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอกระทำต่อโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง [13] จะมีค่าดังสมการที่ (24)

$$\delta \Omega = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_o \{\delta \mathbf{w}\} D d\theta \quad (24)$$

เมื่อ p_o คือแรงดันสม่ำเสมอภายนอก, Pa

2.5 ผลรวมงานเสมือน

จากหลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือน (Total Virtual Work) ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอกซึ่งจะอยู่ในสภาวะสมดุลได้ถ้าผลรวมของงานเสมือนมีค่าเป็นศูนย์ [13] ดังสมการที่ (25)

$$\delta U_m + \delta U_b + \delta \Omega = 0 \quad (25)$$

แทนค่าสมการที่ (18), (22) และ (24) ลงในสมการที่ (25) จะได้ดังสมการที่ (26)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{\mathbf{g}\}^T ([\tilde{\mathbf{k}}_L] + [\tilde{\mathbf{k}}_N]) \{\mathbf{g}\} d\theta + 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_o \{\delta \mathbf{w}\} D d\theta = 0 \quad (26)$$

ในที่นี้

$$[\tilde{\mathbf{k}}_L] = [\tilde{\mathbf{k}}_m] + [\tilde{\mathbf{k}}_b] \quad (27ก)$$

$$[\tilde{\mathbf{k}}_N] = [\tilde{\mathbf{n}}_1] + [\tilde{\mathbf{n}}_2] \quad (27ข)$$

2.6 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสถียรภาพในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์และความโค้ง จะต้องพิจารณาถึงค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของค่าการเสถียรภาพ ดังแสดงในสมการที่ (10) ดังนั้นการวิเคราะห์การเสถียรภาพขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอกจะสามารถทำได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ [14] โดยทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนดังแสดงในรูปที่ 2 โดยที่ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ 2 ทำในการประมาณค่าการเสถียรภาพ จะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (28)

$$\{\mathbf{g}\} = [\boldsymbol{\psi}] \{\mathbf{d}\} \quad (28)$$

เมื่อ $[\boldsymbol{\psi}]$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ

$\{d\}$ คือ เวกเตอร์ของดิกกรีอิสระที่จุดต่อ

$\{\psi\}$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function)

ในที่นี้ $\{d\}$ และ $\{\psi\}$ สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (29) และ (30) ตามลำดับดังนี้

$$\{d\}^T = \begin{bmatrix} u(0) & w(0) & u_\theta(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & w_\theta(\alpha) & u_{\theta\theta}(\alpha) & w_{\theta\theta}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & N_6 \\ N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & \dots & 0 \\ 0 & N_{1,\varphi} & 0 & \dots & N_{6,\varphi} \\ N_{1,\varphi\varphi} & 0 & N_{2,\varphi\varphi} & \dots & 0 \\ 0 & N_{1,\varphi\varphi} & 0 & \dots & N_{6,\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ในที่นี้

$$N_1 = 1 - 10 \frac{\varphi^3}{\alpha^3} + 15 \frac{\varphi^4}{\alpha^4} - 6 \frac{\varphi^5}{\alpha^5} \quad (31ก)$$

$$N_2 = \varphi - 6 \frac{\varphi^3}{\alpha^2} + 8 \frac{\varphi^4}{\alpha^3} - 3 \frac{\varphi^5}{\alpha^4} \quad (31ข)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{3}{2} \frac{\varphi^3}{\alpha} + \frac{3}{2} \frac{\varphi^4}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\varphi^5}{\alpha^3} \quad (31ค)$$

$$N_4 = 10 \frac{\varphi^3}{\alpha^3} - 15 \frac{\varphi^4}{\alpha^4} + 6 \frac{\varphi^5}{\alpha^5} \quad (31ง)$$

$$N_5 = -4 \frac{\varphi^3}{\alpha^2} + 7 \frac{\varphi^4}{\alpha^3} - 3 \frac{\varphi^5}{\alpha^4} \quad (31ฉ)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \frac{\varphi^3}{\alpha} - \frac{\varphi^4}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\varphi^5}{\alpha^3} \quad (31จ)$$

แทนค่าสมการที่ (28) ลงใน (26) จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือนของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอก ดังสมการที่ (32)

$$\{\delta d\}^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{\psi\}^T ([\tilde{K}_L] + [\tilde{K}_N]) \{\psi\} d\theta \{d\} + \{f\} = 0 \quad (32)$$

ในที่นี้

$$\{f\} = -2\pi \{\delta w\}^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_w \{\psi\} D d\theta \quad (33)$$

เนื่องจากดิกกรีอิสระเฉพาะที่ (Local Degree of Freedom) $\{d\}$ จะเหมือนกับค่าดิกกรีอิสระรวม (Global Degree of Freedom) $\{D\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (32) ซึ่งจะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (34)

$$[[K_L] + [K_N]]\{Q\} = -\{F\} \quad (34)$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งฐานรองรับกำหนดให้เป็นแบบยึดแน่นจะมีค่าดังสมการที่ (35)

$$u = w = w_\theta = 0 \quad (35)$$

โดยที่ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในสมการที่ (34) จะต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งฐานรองรับจากสมการที่ (35) จึงจะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีการหาค่าวนการทำซ้ำได้

3. ผลการวิจัยและอภิปราย

การศึกษาครั้งนี้จะใช้โปรแกรม MATLAB R2015b ในการวิเคราะห์ผลการเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอก โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับวิธีการหาค่าวนการทำซ้ำในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขโดยที่ค่าพารามิเตอร์สมบัติของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอกจะมีค่าดังแสดงในตารางที่ 1 โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้าง

การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเริ่มต้นจากการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่คำนวณได้จากวิธีการหาค่าวนการทำซ้ำซึ่งจะมีค่าขึ้นอยู่กับจำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่ใช้ในแบบจำลองโครงสร้าง ดังแสดงในตารางที่ 2 โดยแบบจำลองที่ใช้ชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด 24 ชิ้นจะให้คำตอบใกล้เคียงกับแบบจำลองที่ใช้ชิ้นส่วนย่อย 28 ชิ้น นั่นคือมีค่าการเสียรูปตามแนวเมริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมริเดียนที่ตำแหน่ง θ เท่ากับ 90 องศา ไม่เกินร้อยละ 0.05 ดังนั้นในบทความนี้จะกำหนดให้ใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 24 ชิ้นสำหรับการศึกษาพฤติกรรมการเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอก จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณโดยใช้สมบัติของโครงสร้างดังแสดงในตารางที่ 1 โดย



ที่ความหนาของโครงสร้างมีค่าคงที่เท่ากับ 0.05 เมตร ไม่เปลี่ยนแปลงตลอดแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียน พบว่าค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากโปรแกรม ABAQUS [15] ซึ่งใช้ชิ้นส่วนย่อยโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตร นิยามด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับที่สอง (SAX2) ดังแสดงในรูปที่ 3 และ 4

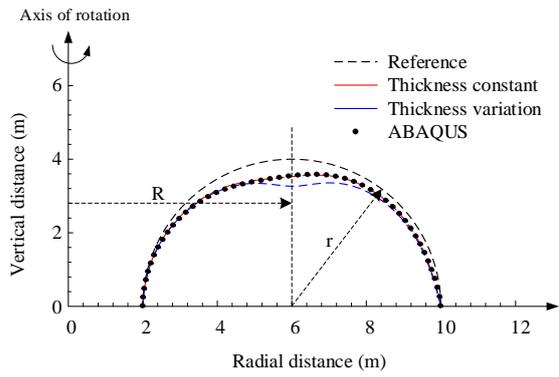
สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอกที่มีความหนาแปรเปลี่ยนตลอดแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนจะพบว่ามีการเสียรูปสูงกว่ากรณีที่มีความหนาของโครงสร้างมีค่าคงที่ ดังแสดงในรูปที่ 3 และ 4 เนื่องจากความหนาของโครงสร้างจะมีค่าลดลงตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนส่งผลทำให้ค่าความแข็งแรงของโครงสร้างมีค่าลดลง ซึ่งในกรณีที่ความหนาของโครงสร้างเปลี่ยนแปลงจะไม่สามารถคำนวณได้โดยใช้โปรแกรม ABAQUS จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณจะสามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการเสียรูปขนาดใหญ่ได้ตั้งหัวข้อต่อไป

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

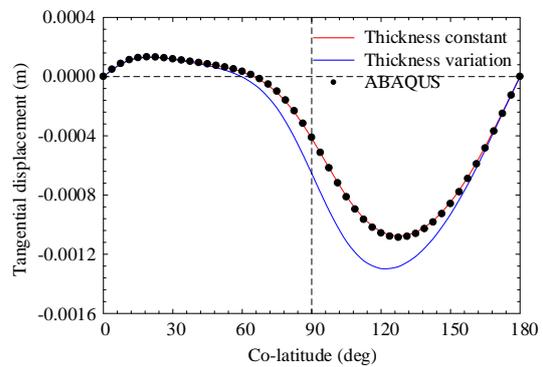
| รายการ | ปริมาณ |
|--|---------------------------|
| 1. ความยาวรัศมีหน้าตัด (r) | 4 เมตร |
| 2. ความยาวรัศมีการตัด (R) | 6 เมตร |
| 3. ความหนาของโครงสร้างที่ฐานรองรับ (H) | 0.075 เมตร |
| 4. แรงดันภายนอก (p_o) | 1×10^6 ปาสคาล |
| 5. โมดูลัสยืดหยุ่น (E') | 2×10^{11} ปาสคาล |
| 6. อัตราส่วนปัวส์ซอง (μ) | 0.3 |

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปกับจำนวนชิ้นส่วนย่อย

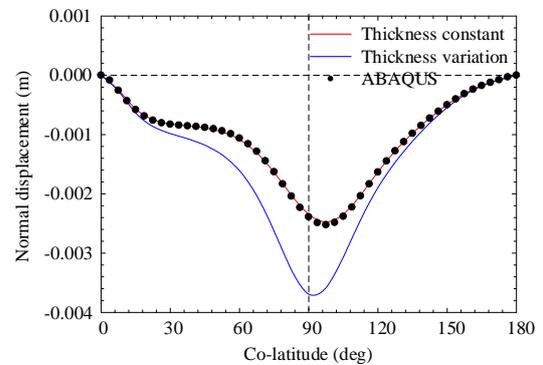
| จำนวนชิ้นส่วนย่อย | ค่าการเสียรูป (เมตร) | | ความแตกต่าง (%) | |
|-------------------|----------------------|----------|-----------------|-------|
| | u | w | u | w |
| 8 | 0.000416 | 0.002332 | 0.106 | 0.317 |
| 12 | 0.000416 | 0.002339 | 0.050 | 0.165 |
| 16 | 0.000417 | 0.002343 | 0.030 | 0.099 |
| 20 | 0.000417 | 0.002346 | 0.020 | 0.066 |
| 24 | 0.000417 | 0.002347 | 0.014 | 0.047 |
| 28 | 0.000417 | 0.002348 | - | - |



รูปที่ 3 การเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางรับแรงดันภายนอก



(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน

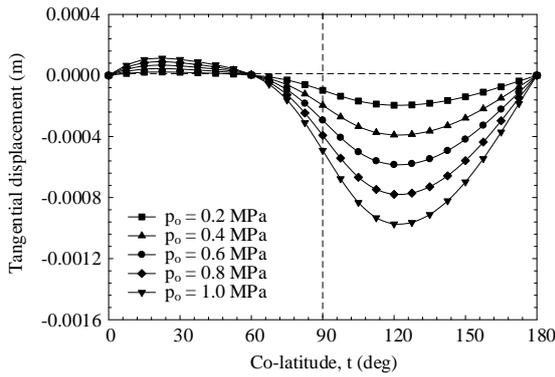


(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

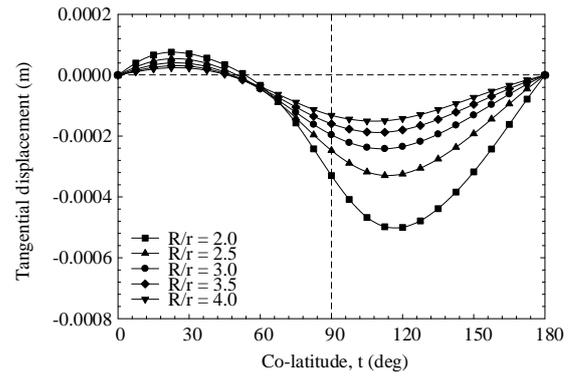
รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปกับแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง

3.2 ผลของการแปรเปลี่ยนค่าแรงดันภายนอก

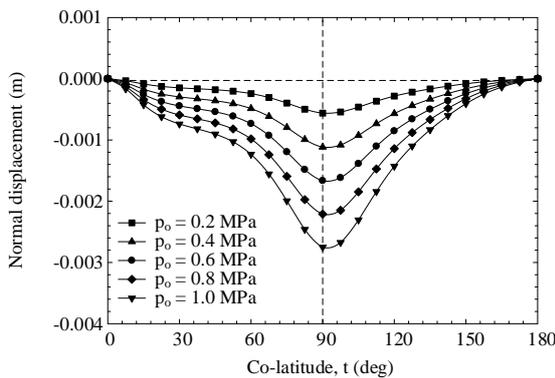
การศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนค่าแรงดันภายนอก (p_o) ที่กระทำต่อโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะสามารถทำได้โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 และทำการแปรเปลี่ยนค่าแรงดันภายนอกตั้งแต่ 0.2 ถึง 1.0 เมกะปาสคาล พบว่าค่าการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าแรงดันภายนอกมีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 5



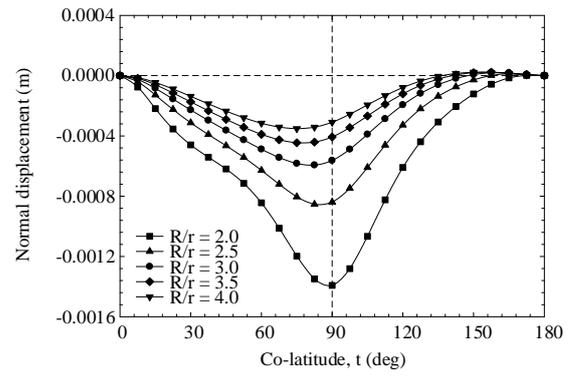
(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน



(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

รูปที่ 5 ผลของการแปรเปลี่ยนค่าแรงดันภายนอกที่มีต่อโครงสร้างโดมรูปทรงห้วยาง

รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดที่มีต่อโครงสร้างโดมรูปทรงห้วยาง

3.3 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัด

ในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัด (R/r) ที่มีผลต่อค่าการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอกจะสามารถทำได้โดยการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดตั้งแต่ 2.0 ถึง 4.0 โดยที่ค่าความยาวรัศมีการตัด (R) มีค่าคงที่เท่ากับ 6 เมตร และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ผลการศึกษาพบว่าค่าการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนที่เกิดขึ้นจะมีค่าลดลงเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 6 นอกจากนี้ยังพบว่าค่าการเสียรูปที่เพิ่มสูงขึ้นนี้เนื่องจากการที่ค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดมีค่าเพิ่มสูงขึ้นในขณะที่ความยาวรัศมีการตัดมีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงทำให้พื้นที่ที่รองรับแรงดันภายนอกมีค่าเพิ่มสูงขึ้นนั่นเอง

3.4 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดต่อความหนาของโครงสร้าง

สำหรับการศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดต่อความหนาของโครงสร้าง (r/H) ที่มีผลต่อค่าการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอกจะสามารถทำได้โดยการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดต่อความหนาของโครงสร้างตั้งแต่ 30 ถึง 50 โดยที่ค่าความยาวรัศมีหน้าตัด (r) มีค่าคงที่เท่ากับ 4 เมตร และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง จากผลการศึกษาพบว่าเมื่อความหนาของโครงสร้างมีค่าลดลงหรืออัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดต่อความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7

3.5 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีการตัดต่อความหนาของโครงสร้าง



เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ความยาวรัศมีการตัด (R) เป็นพารามิเตอร์เฉพาะสำหรับโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางซึ่งจะแตกต่างจากโครงสร้างโดมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนอื่น ๆ เช่น โครงสร้างโดมรูปทรงกลม ทรงรี หรือทรงกรวย เป็นต้น ซึ่งจะส่งผลโดยตรงต่อการเสียรูปของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางนั่นเอง ดังนั้นในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการศึกษาค่าพารามิเตอร์ของอัตราส่วนความยาวรัศมีการตัดต่อความหนาของโครงสร้าง (R/H) ที่มีผลต่อค่าการเสียรูปของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนแรงดันภายนอกจะสามารถทำได้โดยการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดต่อความหนาของโครงสร้างตั้งแต่ 60 ถึง 100 โดยที่ค่าความยาวรัศมีการตัด (R) มีค่าคงที่เท่ากับ 6 เมตร และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากผลการศึกษาพบว่าเมื่ออัตราส่วนความยาวรัศมีการตัดต่อความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 8 ซึ่งจะสอดคล้องกับผลของการศึกษา ดังแสดงในรูปที่ 7

4. บทสรุป

การศึกษาผลตอบสนองของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอกโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ และหลักการของงานเสมือนในการสร้างฟังก์ชันพลังงาน จากนั้นใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าการเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันภายนอก สามารถสรุปได้ดังนี้

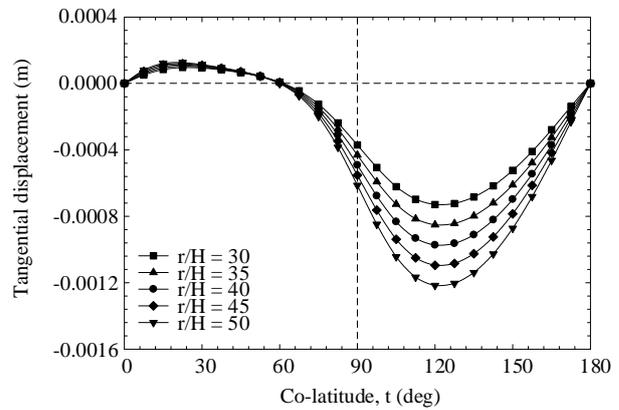
4.1 ค่าการเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าแรงดันภายนอก (p_o) ที่กระทำต่อโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น

4.2 ถ้าความยาวรัศมีหน้าตัด (r) มีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้พื้นที่ผิวในการรับแรงดันภายนอกมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้น

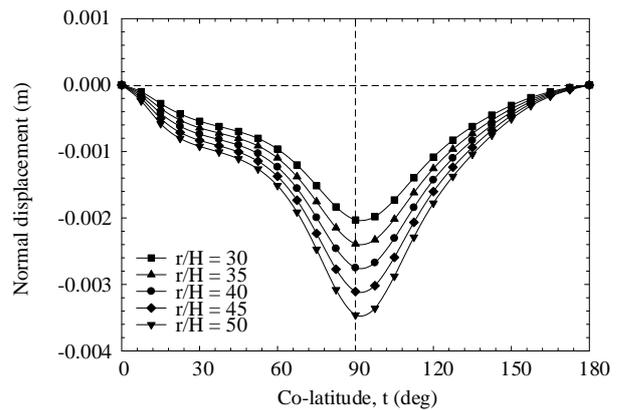
4.3 ค่าความหนาของโครงสร้าง (H) จะส่งผลโดยตรงต่อค่าความแข็งแรง (Stiffness) ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง นั่นคือเมื่อความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปมีค่าลดลง

4.4 ค่าความยาวรัศมีการตัด (R) เป็นพารามิเตอร์เฉพาะสำหรับโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง ดังนั้นเมื่ออัตราส่วน R/H มีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเช่นเดียวกับกรณีการแปรเปลี่ยนอัตราส่วน r/H นั่นเอง

4.5 ผลการศึกษาการแปรเปลี่ยนอัตราส่วน R/r , r/H และ R/H จะเป็นแนวทางในการกำหนดค่าพารามิเตอร์เบื้องต้นสำหรับการออกแบบเพื่อให้ได้โครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางที่มีประสิทธิภาพสูงที่สุด นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าค่าพารามิเตอร์ทุกตัวส่งผลต่อการเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยางนั่นเอง

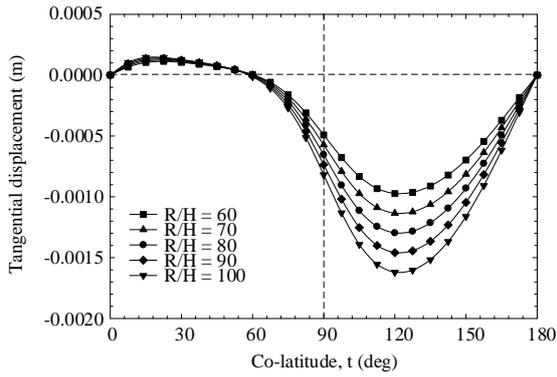


(ก) การเสียรูปตามแนวเมริเดียน

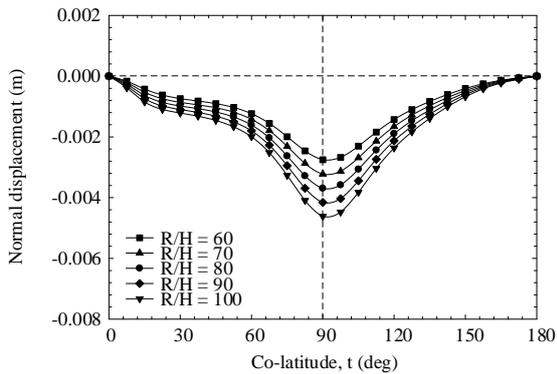


(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมริเดียน

รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดต่อความหนาที่มีต่อโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง



(ก) การเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีมีการตัดต่อความหนาที่มีต่อโครงสร้างโดมรูปทรงห้วงยาง

5. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน ตามสัญญาเลขที่ NKR2566INC045

6. เอกสารอ้างอิง

[1] Pai PF, Young LG. Fully nonlinear modeling and analysis of precision membranes. International Journal of Computational Engineering Science. 2003;4(1):19-65.

[2] Zhan HJ, Redekop D. Static and dynamic loading of an ovaloid toroidal tank. Thin-Walled Structures. 2009;47(6-7):760-7.

[3] Tangbanjongkij C, Chucheepsakul S, Pulngern T, Jiammeepreecha W. Analytical and numerical approaches for stress and displacement components of pressurized elliptic toroidal vessels. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2022; 199:104675.

[4] Clark RA. On the theory of thin elastic toroidal shells. Journal of Mathematics and Physics. 1950; 29(1-4):146-78.

[5] Jordan PF. Stresses and deformations of the thin-walled pressurized torus. Journal of the Aerospace Sciences. 1962; 29(2):213-25.

[6] SANDERS JR JL, LIEPINS AA. Toroidal membrane under internal pressure. AIAA Journal. 1963; 1(9):2105-10.

[7] Sun B. Closed-form solution of axisymmetric slender elastic toroidal shells. Journal of Engineering Mechanics. 2010; 136(10): 1281-8.

[8] Jiammeepreecha W, Chucheepsakul S. Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. Thin-Walled Structures. 2017; 116:12-8.

[9] Jiammeepreecha W, Suebsuk J, Chucheepsakul S. Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure. Journal of Structural Engineering. 2020 ; 146(1):04019169.

[10] Jiammeepreecha W, Chaidachatom K, Chucheepsakul S. Nonlinear static response of an underwater elastic toroidal storage container. International Journal of Solids and Structures. 2021; 228:111134.

[11] Tangbanjongkij C, Chucheepsakul S, Pulngern T, Jiammeepreecha W. Axisymmetric buckling analysis of submerged hemi-elliptic toroidal shells. Thin-Walled Structures. 2023 ; 183:110383.



- [12] Langhaar HL. Foundations of practical shell analysis. Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois; 1964.
- [13] Langhaar HL. Energy methods in applied mechanics. Courier Dover Publications. 2016.
- [14] Cook RD. Concepts and applications of finite element analysis. John wiley & sons; 2007.
- [15] ABAQUS US, Manual SU. Hibbitt, Karlsson, and Sorensen. Inc V5. 2005; 8.