

บทที่ 2

วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย และได้นำเสนอตามหัวข้อ ต่อไปนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมจีเอสพี
 - 1.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมจีเอสพี
 - 1.2 ความสามารถของโปรแกรมจีเอสพี
 - 1.3 การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี
 - 1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมจีเอสพี
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 2.2 องค์ประกอบที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 2.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
 - 3.1 ความหมายของการเชื่อมโยง/ความสามารถในการเชื่อมโยง/ทักษะในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
 - 3.2 การพัฒนาทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
 - 3.3 ลักษณะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์รูปแบบต่างๆ
 - 3.4 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
 - 3.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมจีเอสพี

โปรแกรมจีเอสพี เป็นซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตชนิดหนึ่ง ที่มีสมบัติพื้นฐานของการสร้างและการเคลื่อนย้ายจุด เส้นตรง วงกลม มุม พร้อมทั้งเครื่องมืออำนวยความสะดวกเบื้องต้น เช่น เครื่องมือปรับเปลี่ยนความยาว ขนาดมุม การวัดค่ามุม การสำรวจเชิงเรขาคณิตและพีชคณิต

1.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมจีเอสพี

โปรแกรมจีเอสพีได้รับการพัฒนาขึ้นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ.1991 โดยนิโคลัส แจคิว (Nicholas Jachiw) ในโครงการพัฒนาเรขาคณิตที่มองเห็นได้ (Visual Geometry Project) ของมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National Science Foundation : NSF) ซึ่งมี ดร.ยูจีน คลอทซ์ (Dr.Eugene Klotz) จากวิทยาลัยสวาทมอร์ (Swarthmore College) และดร.ดอริส ซาตซ์ไนเดอร์ (Dr.Doris Schatsneider) จากวิทยาลัยมอราเวียน (Moravian College) ของมหาวิทยาลัยเพนซิลวาเนีย (Pennsylvania University) แห่งสหรัฐอเมริกา เป็นหัวหน้า ซอฟต์แวร์รุ่นเบต้า (Beta Version) พัฒนาขึ้นสำหรับทดลองใช้กับเครื่องแมคอินทอช (Macintosh) และได้พัฒนาขึ้นเป็นจีเอสพี ในปี ค.ศ.1995 และด้วยเงินทุนสนับสนุนของ NSF ในการพัฒนาซอฟต์แวร์ของสำนักพิมพ์คีย์ เคอร์ริคูลัม (Key Curriculum) ในการจัดพิมพ์สื่อสิ่งพิมพ์ที่สนับสนุนการใช้จีเอสพี ทำให้ซอฟต์แวร์นี้ใช้กันอย่างแพร่หลายที่โรงเรียนในสหรัฐอเมริกา และมีเว็บไซต์เพื่อให้ผู้ใช้จีเอสพีส่งข่าวมาเผยแพร่และแลกเปลี่ยนข้อมูลต่างๆ ดร.เจมส์ คับเบิลยู วิลสัน (James W.Wilson) ได้กำหนดให้จีเอสพีเป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาโทและปริญญาเอกของมหาวิทยาลัยจอร์เจีย (Georgia University) สหรัฐอเมริกา ซึ่งปัจจุบันได้พัฒนาถึง Version 4.06 แล้ว

โปรแกรมจีเอสพีสามารถนำไปช่วยสอนคณิตศาสตร์ได้หลายสาขาวิชา เช่น วิชาเรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ และแคลคูลัส นอกจากนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์สร้างสื่อการสอนวิทยาศาสตร์ โดยเฉพาะวิชาฟิสิกส์ได้อีกด้วย โปรแกรมจีเอสพีเป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง (Constructivist Approach) เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ (Visualization) ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) นอกจากนี้การใช้โปรแกรมจีเอสพีในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยังเป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาพหุปัญญา ได้แก่ ปัญญาทางด้านภาษา ด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์และด้านศิลปะ โรงเรียนต่างๆในสหรัฐอเมริกาใช้โปรแกรมนี้สอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน

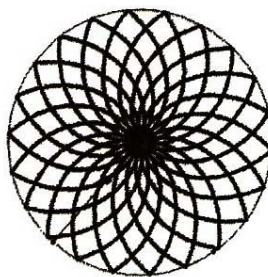
มากที่สุด และในหลายๆ ประเทศทั่วโลก อาทิ แคนาดา สหราชอาณาจักร สิงคโปร์ มาเลเซีย ไต้หวัน ฮังการี เดนมาร์ก ญี่ปุ่น ออสเตรเลีย ได้ใช้โปรแกรมนี้อย่างแพร่หลาย ในส่วนของประเทศไทยนั้น ได้ลงนามในพิธีรองลงนามพิธีการให้ซอฟต์แวร์จีเอสพีเวอร์ชัน 4.06 (Thai version) โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (กสพว. 2548 : 6) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548:1-2) ได้ตระหนักถึงความสำคัญของการใช้เทคโนโลยีที่ช่วยในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน เพื่อให้ให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น มีเจตคติที่ดีในการเรียนรู้ และเรียนรู้ด้วยความหมาย จึงได้พิจารณาโปรแกรมต่าง ๆ และเห็นว่าโปรแกรมจีเอสพี เป็นโปรแกรมหนึ่งที่ครูสามารถเรียนรู้ได้ไม่ยากนักและเกิดแนวคิดในการนำไปบูรณาการกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถทำให้นักเรียนเรียนรู้อคณิตศาสตร์ได้ตามมาตรฐานการเรียนรู้ของหลักสูตร พัฒนานักเรียนให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีทักษะการจินตนาการ เกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง (วิมล อยู่พิพัฒน์.2551: 16-17)

1.2 ความสามารถของโปรแกรมจีเอสพี

ความสามารถของโปรแกรมจีเอสพี (Key Curriculum Press. 2001:1-101)

1. ด้านศิลปะและการเคลื่อนไหว (Art/Animation)

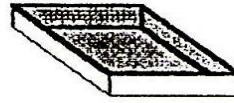
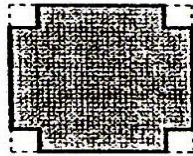
โปรแกรมจีเอสพีประกอบด้วยเครื่องมือสร้างรูปต่างๆ และจัดเตรียมคำสั่งเพื่อให้ผู้ใช้สามารถทำให้รูปดังกล่าวเคลื่อนไหวได้ตามต้องการ



ภาพที่ 2.1 ตัวอย่างรูปศิลปะ จากโปรแกรมจีเอสพี

2. วิชาแคลคูลัส(Calculus)

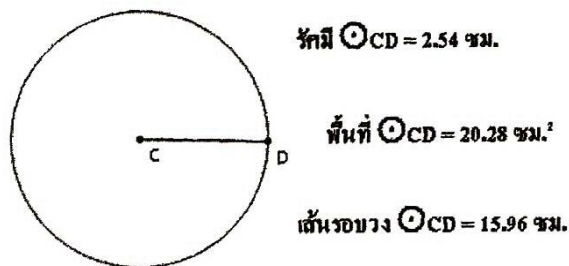
ในวิชาแคลคูลัส เราสามารถใช้โปรแกรมจีเอสพีคำนวณหาปริมาตรของกล่องซึ่งเกิดจากตัดมุมทั้งสี่ของกระดาด เห็นการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกล่องดังกล่าวเมื่อมีการเคลื่อนไหว นอกจากนี้ยังสามารถใช้โปรแกรมจีเอสพีสร้างกราฟจากสมการได้ เช่น $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ หรือรูปสมการอื่นๆที่ต้องการได้



ภาพที่ 2.2 ก่องซึ่งเกิดจากการตัดมุมทั้งสี่ของกระดาด

3. วงกลม(Circles)

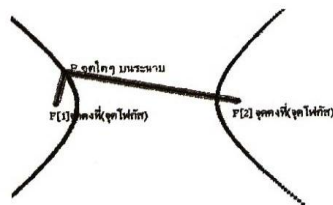
ในโปรแกรมจีเอสพี สามารถใช้เครื่องมือ Compass Tool สร้างวงกลมตามที่ต้องการ และสามารถหาความยาวของรัศมี เส้นรอบวง และคำนวณหาพื้นที่ได้



ภาพที่ 2.3 การสร้างวงกลม และ การหาความยาวของรัศมี เส้นรอบวง และ
คำนวณหาพื้นที่

4. ภาคตัดกรวย (Conic Section)

ในภาคตัดกรวยโปรแกรมจีเอสพีสามารถที่จะสร้างวงกลม (Circle) วงรี (Ellipse) พาราโบลา(Parabola) และไฮเพอร์โบลา(Hyperbola) โดยการเคลื่อนที่จะทำให้เห็นร่องรอย (Trace) ของกราฟซึ่งจะทำให้เห็นรูปต่างๆได้ตามความต้องการ



ภาพที่ 2.4 การสร้างรูปวงรี จากโปรแกรมจีเอสพี

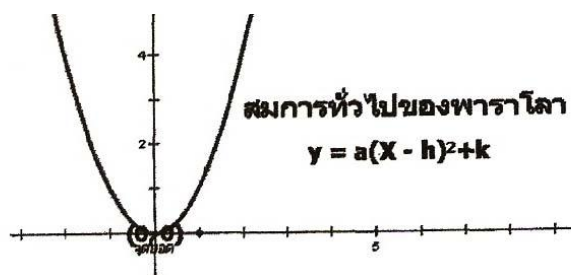
5. การเขียนกราฟและการหาจุดโคออร์ดิเนตในเรขาคณิต (Graphing/ Coordinate Geometry) ในการเขียนกราฟจาการูปสมการต่างๆ เช่น

$$y = a(x + h)^2 + k$$

$$y = a(x - b)(x - c)(x - d)$$

$$y = a + |b(x - c) + d|$$

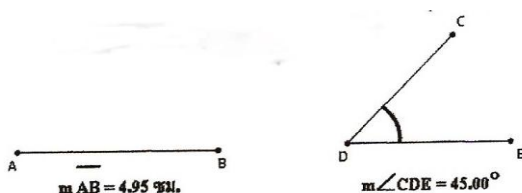
โปรแกรมจีเอสพีสามารถสร้างรูปกราฟและหาจุดโคออร์ดิเนตในสมการต่างๆได้



ภาพที่ 2.5 การสร้างรูปกราฟและหาจุดโคออร์ดิเนตในสมการต่างๆจากโปรแกรมจีเอสพี

6. เส้นตรงและมุม (Liner and Angles)

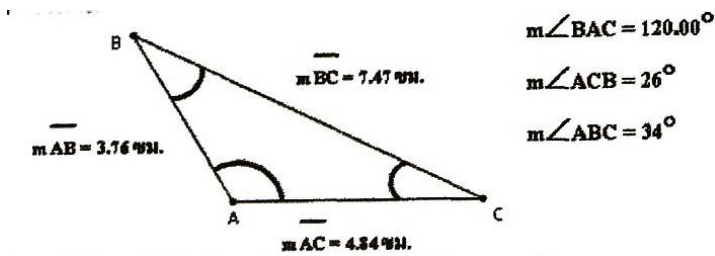
ในการสร้างเส้นตรงและมุมโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี สามารถทำได้ง่ายและเมื่อได้ทำการสร้างเส้นตรงและมุมเสร็จแล้วสามารถที่จะวัดขนาดของเส้นตรงและมุมดังกล่าวได้ ซึ่งด้วยความสามารถและคุณสมบัติดังกล่าวทำให้ผู้เรียนสามารถสรุปเนื้อหา และทฤษฎีเกี่ยวกับเรื่องเส้นตรงและมุมได้รวดเร็วยิ่งขึ้น



ภาพที่ 2.6 การสร้างเส้นตรงและมุมจากโปรแกรมจีเอสพี

7. รูปสามเหลี่ยม (Triangles)

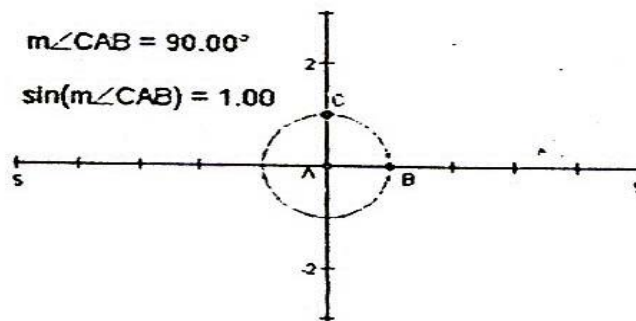
เมื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ โปรแกรมจีเอสพี สามารถที่จะใช้คำสั่งในโปรแกรมเพื่อคำนวณหาความยาวของด้านแต่ละด้าน มุมแต่ละมุม และคำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวได้ ในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ เมื่อความยาวของฐาน และความสูงเท่าเดิม พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมย่อมจะไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้น เมื่อโยกจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมไปอยู่ ณ ตำแหน่งต่างๆ โดยที่ความสูงเท่าเดิม พื้นที่รูปสามเหลี่ยมย่อมคงเดิมเสมอ นอกจากนี้ยังสามารถหาจุดคอทอเซนต์เตอร์ (Orthocenter)



ภาพที่ 2.7 การสร้างรูปสามเหลี่ยมจากโปรแกรมจีเอสพี

8. ตรีโกณมิติ(Trigonometry)

ในการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ โปรแกรมจีเอสพี กระทำได้โดยสร้างวงกลมหน่วย (Unit Circle) เมื่อกำหนดมุม A ก็สามารถหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม A ได้ตามต้องการ ดังรูป



ภาพที่ 2.8 การหาฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี

โปรแกรมจีเอสพี เป็นซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตซึ่งเน้นการสร้างรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับการใช้ไม้บรรทัดและวงเวียน แต่มีลักษณะปฏิสัมพันธ์ ผู้ใช้สามารถสร้างรูปและเคลื่อนย้ายรูปได้ โดยการเคลื่อนย้ายจุดหรือย้ายเส้นนั้นสามารถทำได้โดยง่าย และการเคลื่อนย้ายจะยังคงรักษาสสมบัติที่ร่วมกันของรูปนั้นไว้เสมอ เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะเคลื่อนย้ายจุดมุมในลักษณะใดก็ตามจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเสมอ หรือจุดซึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรง การเคลื่อนย้ายจะยังรักษาสสมบัติของจุดบนส่วนของเส้นตรงนั้นเสมอ ทำให้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเหมาะสำหรับการเรียนรู้เรขาคณิต โดยทดลองสร้างและสำรวจสมบัติหรือค้นหาความจริงในเชิงเรขาคณิตจากรูปหลายๆลักษณะซึ่งสอดคล้องกับลำดับขั้นการเรียนรู้ตามขั้นแรกของ แวน ฮีลี (วรรณวิภา สุทธิเกียรติ, 2542 : 21-22)

โปรแกรมจีโอสพี ใช้ทำอะไรได้บ้าง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548 :2 - 4) กล่าวว่า โปรแกรมจีโอสพี เป็นโปรแกรมอเนกประสงค์ ขอบเขตของการใช้ขึ้นอยู่กับจินตนาการของผู้ใช้

1. การสำรวจและการสอนทฤษฎีบททางเรขาคณิต

ในหนังสือเรขาคณิตมักเต็มไปด้วยทฤษฎีบท ลัทธิบท บทแทรก บทตั้ง (lemma) และบทนิยาม ซึ่งมีหลากหลายอย่างที่ยากต่อการเข้าใจ หรือแม้จะเข้าใจก็ไม่ลึกซึ้ง วิธีที่จะให้เข้าใจทฤษฎีบทที่ยาก ๆ หรือวิธีการสอนเรื่องยากในชั้นเรียน คือ การใช้โปรแกรมจีโอสพีสร้างแบบจำลองต่าง ๆ

2. การนำเสนอในชั้นเรียน

แบบร่างที่นำเสนอเป็นเอกสารของโปรแกรมจีโอสพี ที่ได้ออกแบบไว้สำหรับการนำเสนอไปยังกลุ่มบุคคลต่าง ๆ เช่น นักเรียน เพื่อนร่วมชั้นเรียน หรือครู โดยปกติแบบร่างที่นำเสนอจะมีภาพกราฟิกที่สวยงาม เคลื่อนไหวได้ มีปุ่มแสดงการทำงานต่าง ๆ และมีเนื้อหาได้หลายหน้า ครูสามารถใช้ โปรแกรมจีโอสพี ให้เป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้การสอนมีประสิทธิภาพ ถึงแม้ว่าจะไม่สามารถสอนในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ได้ทุกวัน แต่ก็สามารถนำมาสาธิตในห้องเรียนที่มีคอมพิวเตอร์เพียงเครื่องเดียวพร้อมเครื่องฉาย LCD ได้ นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถนำงานที่สร้างในแบบร่างมาเสนอในชั้นเรียน หรือทำรายงานตลอดจนทำแฟ้มผลงานต่าง ๆ ได้

3. การศึกษารูปต่าง ๆ จากหนังสือเรียน

เมื่อเราชำนาญในการใช้โปรแกรมจีโอสพี แล้ว จะพบว่าในการสร้างรูปต่าง ๆ บนจอคอมพิวเตอร์ จะใช้เวลาน้อยกว่าการสร้างด้วยมือ นอกจากนั้นในการสร้างรูปด้วยโปรแกรมจีโอสพี ยังได้เปรียบตรงที่สามารถทำให้รูปนั้นเคลื่อนไหวได้ และสำรวจการเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้นควรพิจารณาใช้ในการสร้างและศึกษารูปในหนังสือเรียนและการทำที่บ้าน

4. ใช้โปรแกรมจีโอสพี ในรายวิชาต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์

โปรแกรมจีโอสพี เป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างหนึ่งในรายวิชาต่างๆ ของคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นนักเรียนหรือครู เช่นในพีชคณิต สามารถใช้ ตรวจสอบความชันและสมการของเส้นตรง ตรวจสอบสมบัติพาราโบลา และหัวข้ออื่น ๆ ที่สำคัญอีกหลายหัวข้อ ในวิชา Algebra และ Pre - Calculus ทั้งนักเรียนและครูสามารถสำรวจการเคลื่อนไหวฟังก์ชันด้วยการใช้คำสั่งต่าง ๆ จากเมนูกราฟ ใช้กับวิชาตรีโกณมิติ ในวิชาแคลคูลัส ใช้สำรวจอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ด้วยการสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และใช้คำสั่งอนุพันธ์ หรือสำรวจปริพันธ์โดยการสร้างพื้นที่ที่ปิดล้อม

ด้วยเส้นโค้ง นอกจากนี้ โปรแกรมจีเอสพี ยังสามารถใช้ประโยชน์ในวิชาคณิตศาสตร์ ระดับวิทยาลัย เช่นวิชา Non- Euclidean Geometry หรือหัวข้อต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ชั้นสูง

5. การสร้างแฟร็กทัล (Fractal)

แฟร็กทัลเป็นรูปเรขาคณิตที่สวยงามสะดุดตาซึ่งพบเห็นได้ในธรรมชาติ และเป็นรากฐานที่สำคัญของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กราฟิกหลายๆ โปรแกรม แฟร็กทัลเป็นรูปเรขาคณิตที่คล้ายกับตัวเอง มันจะดูเหมือนกันไม่ว่าจะขยายในมุมมองใด การสร้างแฟร็กทัลเริ่มจากการสร้างรูปร่างง่าย ๆ แล้วทำซ้ำรูปเดิมแต่ให้มีขนาดเล็กลง ๆ การใช้คำสั่งทำซ้ำของ โปรแกรมจีเอสพี ช่วยให้สามารถสร้างแฟร็กทัลนี้ หรือ การสร้างแบบอื่น ๆ ที่ใช้กระบวนการทำซ้ำได้

6. การวาดภาพที่ได้สัดส่วนเหมือนจริงและรูปศิลปะทางเรขาคณิตแบบต่าง ๆ

หากต้องการทำบัตรอวยพร หรือต้องการออกแบบพื้นหลังบน webpage ให้ได้ภาพที่สวยงามไม่ซ้ำแบบใคร สามารถใช้เครื่องมือในเมนูการแปลงของโปรแกรมจีเอสพีร่วมกับเครื่องมือจากเมนูแสดงผลจะช่วยให้เราสร้างภาพได้อย่างวิจิตรงดงาม ตื่นตา ตื่นใจ

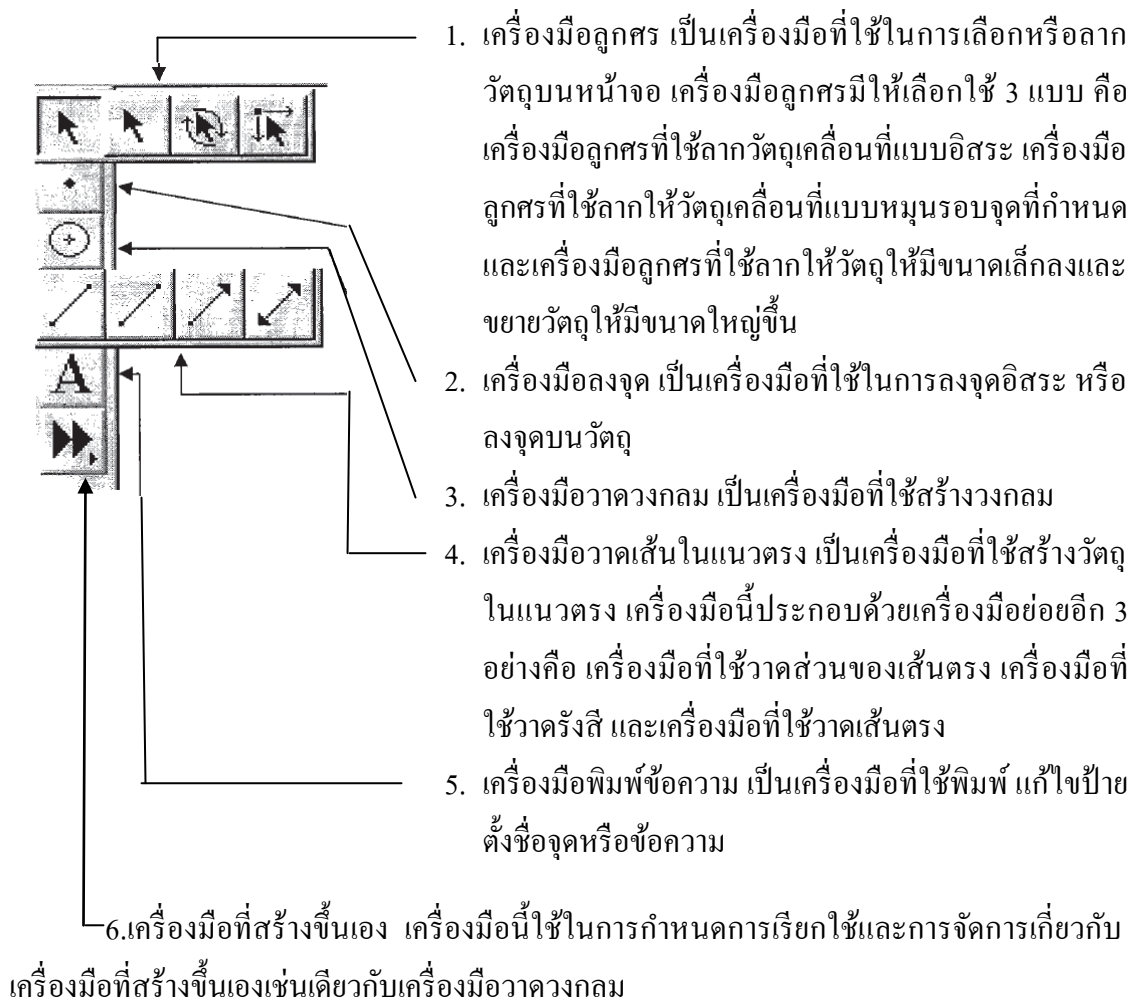
นวนลดา สงวนวงษ์ทอง (2549) กล่าวว่า โปรแกรม Sketchpad สามารถใช้เป็นสื่อภาพในการนำเสนอแนวคิดทางด้านคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น นารี วงศ์สิโรจน์กุล (2549) กล่าวว่า เราสามารถใช้ โปรแกรมจีเอสพี สร้างรูปเรขาคณิตจำนวนมากเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ทั้งยังทบทวนได้ง่ายและบ่อยขึ้น การสอนด้วยโปรแกรมจีเอสพี จะทำให้นักเรียนเรียนได้สนุก เข้าใจได้เร็ว น่าตื่นเต้น นอกจากนั้นการใช้โปรแกรมจีเอสพี สร้างสื่อการสอนและใบงาน ยังทำได้รวดเร็ว สามารถนำเสนอภาพเคลื่อนไหว (animation) มาใช้อธิบายเนื้อหาที่ยาก ๆ เช่นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ ให้เป็นรูปธรรม และโปรแกรมยังเน้นให้นักเรียนฝึกปฏิบัติด้วยตัวเองได้จากความสามารถของโปรแกรมจีเอสพีที่กล่าวมาข้างต้น

ระบบวิธีใช้โปรแกรมจีเอสพี

กิมวัจน์ ธรรมใจ (2548: 3-15) กล่าวถึงระบบวิธีใช้โปรแกรมจีเอสพี 4.06 (Thai Version) ซึ่งประกอบด้วยเครื่องมือต่างๆดังนี้

กล่องเครื่องมือ

เมื่อเปิดโปรแกรมจีเอสพี จะพบกล่องเครื่องมือที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของหน้าจอ เครื่องมือมีทั้งหมด 6 ชนิดด้วยกัน คือ



เมนูแก้ไข(Edit Menu)

เมนูแก้ไขมีคำสั่งเกี่ยวกับการทำย้อนกลับและทำซ้ำคำสั่งล่าสุด คำสั่งเกี่ยวกับการจัดการคลิปบอร์ด สร้างปุ่มแสดงการทำงาน เลือกวัตถุในแบบร่าง คำสั่งเกี่ยวกับการปรับค่าส่วนประกอบและคุณสมบัติของแบบร่างเอง

คำสั่งที่สำคัญและเป็นจุดเด่นในเมนูแก้ไข ได้แก่

ปุ่มแสดงการทำงาน(Action Buttons) เป็นปุ่มที่มีคำสั่งต่อไปนี้ซ่อนอยู่

ซ่อน/แสดง(Hide/Show) เป็นปุ่มคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการซ่อนหรือแสดงวัตถุที่เลือก

การเคลื่อนไหว (Animation) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการให้ภาพที่กำหนดไว้เคลื่อนไหว

การเคลื่อนที่ (Movement) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการเคลื่อนย้ายจุด ก่อนที่จะใช้คำสั่งนี้ต้องเลือกจุดอย่างน้อยสองจุดเสียก่อน จุดแรกที่ถูกเลือกจะย้ายไปจุดที่สอง จุดที่สองจะย้ายไปจุดที่สามไปเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนถึงจุดสุดท้าย

การนำเสนอ (Presentation) การใช้คำสั่งนี้ต้องกำหนดปุ่มที่จะแสดงการทำงานอย่างน้อยหนึ่งปุ่ม แล้วทำการเลือกว่าจะให้นำเสนองานตรงส่วนไหนก่อน – หลังตามลำดับหรือนำเสนอพร้อมๆ กัน

เลือกทั้งหมด (Select All) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการจะเลือกงานทั้งหมด

เลือกพ่อแม่ (Select Parents) คำสั่งนี้ใช้สำหรับเลือกวัตถุที่เป็นต้นกำเนิดของวัตถุอื่นๆ

เลือกตัวลูก (Select Children) คำสั่งนี้ใช้สำหรับเลือกวัตถุที่ถูกสร้างมาจากวัตถุต้นกำเนิด

แยก/รวม (Split/Merge) คำสั่งแยกเป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการแยกจุดออกจากจุดที่เป็นต้นกำเนิด คำสั่งรวมเป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการรวมจุดที่ต้องการกับจุดอื่นๆ เส้นโค้งหรือเส้นตรง

แก้ไขบทนิยาม (Edit Definition) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการแก้ไขหรือเปลี่ยนแปลงสิ่งต่อไปนี้ เช่น ผลการคำนวณโดยใช้เครื่องคิดเลข ฟังก์ชัน ค่าพารามิเตอร์ การลงจุดในระบบพิกัด

สมบัติ (Properties) ใช้เมื่อต้องการเปลี่ยนคุณสมบัติของวัตถุที่เลือก

ค่าพึงใจ (Preferences) เป็นการเปลี่ยนการตั้งค่าของเอกสารนี้หรือทั้งหมดของโปรแกรมจีเอสพี และสามารถกำหนดค่าพึงใจขั้นสูงได้โดยกดแป้น Shift ค้างไว้ก่อนเพื่อกำหนดค่าพึงใจขั้นสูง

เมนูแสดงผล (Display Menu)

เมนูแสดงผลมีคำสั่งเกี่ยวกับการควบคุมภาพที่ปรากฏของวัตถุในแบบร่างและเครื่องมือที่ใช้ด้วยคำสั่งเหล่านี้ สามารถทำให้แบบร่างมีความสวยงามมากยิ่งขึ้นและยังช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการนำเสนอเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องด้วย

คำสั่งที่สำคัญและเป็นจุดเด่นในเมนูแสดงผลนี้ได้แก่

ซ่อนวัตถุ (Hide Objects) เป็นการใช้เมื่อต้องการซ่อนวัตถุที่เลือกเพื่อไม่ให้มองเห็น แต่จริงๆ แล้ววัตถุนั้นยังอยู่

แสดงสิ่งที่ซ่อนไว้ทั้งหมด (Show All Hidden) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการแสดงวัตถุทั้งหมดที่ซ่อนไว้

แสดง / ซ่อนป้าย (Show / Hide Labels) เป็นคำสั่งที่ใช้สำหรับแสดงหรือซ่อนตัว
ป้ายของวัตถุที่เลือกไว้

ร่องรอย (Trace) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการให้เกิดร่องรอยของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่

ลบรอย (Erase Traces) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการลบรอยที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่
ของวัตถุ

เคลื่อนไหว (Animate) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อต้องการให้รูปเรขาคณิตที่สร้างขึ้น
เคลื่อนไหวอัตโนมัติ

หยุดการเคลื่อนไหว (Stop Animate) เป็นคำสั่งที่ใช้เพื่อต้องการให้วัตถุหยุด
การเคลื่อนที่ ถ้าไม่เลือกวัตถุใดเลย วัตถุจะหยุดการเคลื่อนที่ทั้งหมด (กดปุ่ม Esc)

แสดง / ซ่อนแถบรูปแบบอักษร (Show / Hide Text Palette) เป็นคำสั่งที่ใช้เมื่อ
ต้องการแสดงหรือซ่อนแถบรูปแบบอักษร ซึ่งใช้กำหนดตัวอักษร ขนาด รูปแบบ และสีของ
ตัวอักษร

แสดง / ซ่อนคำสั่งที่ควบคุมการเคลื่อนไหว (Show / Hide Motion Controller) เป็น
คำสั่งที่ใช้เพื่อแสดงหรือซ่อน คำสั่งควบคุมการเคลื่อนที่ ของวัตถุให้เริ่มเคลื่อนที่หรือหยุด และ
ควบคุมความเร็วหรือทิศทาง

เมนูสร้าง (Construct Menu)

เมนูนี้มีคำสั่งเกี่ยวกับการสร้างทางเรขาคณิตที่สำคัญๆ หลายประการ ซึ่งจะคล้าย
กับกล่องเครื่องมือ แต่คำสั่งในเมนูสร้างจะใช้ง่ายและสะดวกรวดเร็วกว่า ในการสร้างนั้นจะต้องรู้ว่า
จะสร้างอะไรและต้องเลือกสิ่งกำหนดเบื้องต้นต่างๆ ที่ต้องใช้ให้ครบเสียก่อน

จุดบนวัตถุ (Point On Object) เลือกวัตถุที่ไม่ใช่จุดอย่างน้อยหนึ่งวัตถุ

จุดกึ่งกลาง (Midpoint) เลือกส่วนของเส้นตรงอย่างน้อยหนึ่งเส้น

จุดตัด (Intersection) เลือกเส้นสองเส้น

เส้นขนาน (Parallel Line) เลือกจุดอย่างน้อยหนึ่งจุด และเส้นหนึ่งเส้น

เส้นตั้งฉาก (Perpendicular Line) เลือกจุดอย่างน้อยหนึ่งจุด และเส้นหนึ่งเส้น

เส้นแบ่งครึ่งมุม (Angle Bisector) ใช้เมื่อต้องการแบ่งครึ่งมุมโดยการกำหนดจุด
สามจุด โดยที่จุดที่สองต้องเป็นจุดยอด ซึ่งจุดทั้งสามต้องไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น (Circle By Center + Point)
เป็นการสร้างวงกลม โดยกำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดแรก กับจุดที่สองซึ่งจะเป็นจุดควบคุมรัศมี

วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี (Circle By Center + Radius)
เป็นการสร้างวงกลมจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเลือก ส่วนรัศมีจะถูกกำหนดโดยวัตถุที่เลือก

ส่วนโค้งบนวงกลม (Arc On Circle) เป็นการสร้างส่วนโค้งบนวงกลมหรือจุดศูนย์กลางที่กำหนด ซึ่งส่วนโค้งนั้นจะถูกสร้างขึ้นตามเข็มนาฬิกาจากจุดที่หนึ่งไปยังจุดที่สองบนเส้นรอบวง

ส่วนโค้งผ่านจุดสามจุด (Arc Through 3 Points) เป็นการสร้างส่วนโค้งด้วยจุดที่เลือกสามจุด โดยที่จุดทั้งสามนี้ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ภายใน (Interior) สร้างพื้นที่ภายในโดยคำนวณจากวัตถุที่เลือก

โลคัส (Locus) เป็นคำสั่งที่ใช้สร้างโลคัสของวัตถุที่เลือกเป็นจุดที่เลือกบนเส้นทางการเคลื่อนที่บนเส้นทาง

เมนูการแปลง (Transform Menu)

เมนูการแปลงเป็นการกำหนดการเปลี่ยนแปลงกับวัตถุที่สร้างขึ้น เช่น การเลื่อนขนาน การหมุน การย่อ – ขยาย การพลิก และนอกจากนั้นยังสามารถทำซ้ำวัตถุ (Iterate)

ระบุเส้นสะท้อน (Mark Mirror) คือ การเลือกวัตถุเส้นตรงเป็นเสมือนกระจกสำหรับการสะท้อน

ระบุมุม (Mark Angle) คือ การระบุมุมที่เลือกเป็นมุมสำหรับการหมุน และการเลื่อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ระบุอัตราส่วน (Mark Ratio) คือ การระบุอัตราส่วนซึ่งเป็นอัตราส่วนสำหรับการหมุน

ระบุเวกเตอร์ (Mark Vector) คือ การระบุเวกเตอร์ระหว่างจุดสองจุดที่เลือกเป็นทิศทางสำหรับการเลื่อนขนาน จุดเริ่มต้น คือ จุดแรกที่เลือกและจุดสิ้นสุดคือจุดที่สองที่เลือก

เลื่อนขนาน (Translate) คือ การเลื่อนขนานวัตถุที่เลือกด้วยเวกเตอร์ในระบบต่างๆ ได้แก่ระบบพิกัดเชิงขั้ว และระบบพิกัดฉาก

หมุน (Rotate) คือ การหมุนวัตถุที่เลือกตามจุดศูนย์กลางที่ระบุ

ย่อ – ขยาย (Dilate) คือ การเปลี่ยนขนาดวัตถุที่เลือกไปตามจุดศูนย์กลางที่เลือกหรือออกห่างจากจุดศูนย์กลางที่เลือก

สะท้อน (Reflect) คือ การพลิกวัตถุที่เลือกข้ามเส้นสะท้อน (เส้นหนึ่งเส้น) ที่ระบุ

ทำซ้ำ (Iterate) คือ การสร้างการแปลงรูปต้นแบบหนึ่งหรือหลายขั้นตอน การทำซ้ำสามารถใช้สร้างรูปต้นแบบที่ซับซ้อนได้ เช่น เทสเซลเลชัน (Tessellation) แฟร็กทัล (Fractal)

เมนูการวัด (Measurement Menu)

เมนูการวัดนี้ใช้วัดค่าต่างๆ ที่ต้องการ เช่น ความยาว ระยะทาง พื้นที่ ความยาวรอบรูป มุม นอกจากนั้นยังมีเครื่องคำนวณเพื่อช่วยในการสร้างการคำนวณจากค่าพารามิเตอร์ หรือฟังก์ชันได้

เมนูกราฟ (Graph Menu)

เมนูกราฟช่วยให้ท่านสร้างกราฟ และใช้ระบบพิกัดฉากสร้างพารามิเตอร์และฟังก์ชัน เพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เพื่อลงจุดและฟังก์ชันบนแกนพิกัดฉาก หรือแกนพิกัดเชิงขั้ว และเพื่อบันทึกค่าในรูปแบบตารางได้

สรุปได้ว่า โปรแกรมจีเอสพี เป็นโปรแกรมที่สามารถนำมาใช้อธิบายสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมได้ง่ายขึ้น อีกทั้งยังสามารถนำเสนอเป็นภาพเคลื่อนไหวให้เห็นภาพชัดเจนทั้งในระบบสองมิติและสามมิติ สามารถสร้างรูปกราฟและหาจุดโคออร์ดิเนตในสมการต่างๆ สามารถเลื่อน หมุน ย่อ ยืด พลิกได้ ทำให้ผู้เรียนสามารถสังเกต เปรียบเทียบ ตั้งข้อาคาดเดาต่างๆ จากสิ่งที่พบจนเกิดเป็นความคิดรวบยอด และหากครูผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงองค์ความรู้เดิมกับองค์ความรู้ใหม่ จะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายได้

1.3 การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี

โปรแกรมจีเอสพี เป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้สร้าง ตำรา และวิเคราะห์สิ่งต่างๆ ที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายด้าน เราสามารถใช้เรขาคณิตพลวัตสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีปฏิสัมพันธ์ได้หลากหลายตั้งแต่การค้นหาในระดับพื้นฐานซึ่งเกี่ยวกับรูปร่างและจำนวนไปจนถึงภาพวาดขั้นสูงที่มีความซับซ้อนและเคลื่อนไหวได้ สำหรับนักเรียน โปรแกรมจีเอสพี ไม่เพียงช่วยเสริมความรู้ความเข้าใจเรขาคณิตในชั้นเรียนเท่านั้น แต่ยังช่วยเสริมแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส และเรื่องอื่นๆ อีกด้วย สำหรับครูผู้สอนโปรแกรมจีเอสพี จะเอื้อต่อการอธิบายหลักการคณิตศาสตร์ การตอบปัญหา และกระตุ้นให้นักเรียนสร้างข้อคาดการณ์ โดยครูผู้สอนอาจให้นักเรียนฝึกทำเองบนเครื่องคอมพิวเตอร์ หรืออาจสาธิตให้นักเรียนดูหน้าชั้นเรียน นักวิจัยและผู้สนใจคณิตศาสตร์สามารถใช้โปรแกรมจีเอสพี ในการทดลองหรือทดสอบเพื่อดูว่า “จะเกิดอะไรขึ้น ถ้า...” หรือใช้ตรวจสอบสมบัติของการสร้าง และช่วยในการค้นหาคำตอบใหม่ๆ ตลอดจนใช้ในการสร้างภาพทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนสำหรับใช้ในการทำรายงาน หรือใบงานที่ได้รับมอบหมาย หรืออาจเพียงเพื่อชื่นชมความงดงามที่มีอยู่ในภาพ(สวท. 2548) สอดคล้องกับอุทัย สิงห์ธรรม (2549) กล่าวถึงการใช้งานของโปรแกรมจีเอสพีกับการเรียน

การสอนในโรงเรียนว่า โปรแกรมจีเอสพี เป็นสื่อไอที ที่ช่วยสอนวิชาต่างๆและเป็นนามธรรมอย่างคณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนเข้าใจง่ายขึ้น รวดเร็วขึ้น เกิดจินตนาการ และทำความเข้าใจกับเนื้อหาที่เรียนได้ชัดเจน ทำให้คณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่จำเป็นในชีวิตประจำวันไม่กลายเป็นเรื่องที่น่าเบื่อ น่าเมินหนีสำหรับนักเรียนตั้งแต่เริ่มเปิดตำรา เคล็ดลับของโปรแกรมช่วยสอน คือ เป็นซอฟต์แวร์ที่อธิบายเนื้อหาวิชาต่างๆ เช่น ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์อย่างเรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส โดยใช้ภาพเคลื่อนไหว (animation) เป็นตัวอธิบายเพื่อสร้างความเข้าใจที่กระจ่างชัด เพราะนักเรียนสามารถแลเห็นได้อย่างมีรูปธรรม ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง เพราะเรียนรู้ง่าย นอกจากนี้ยังนำไปบูรณาการให้เข้าใจกับการเรียนการสอนวิชาอื่นๆ เช่น วิทยาศาสตร์ ฟิสิกส์ ศิลปะ สังคม ได้อย่างกลมกลืนด้วย ส่วนคุณครูก็สามารถใช้โปรแกรมจีเอสพีเป็นเครื่องช่วยกระตุ้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทันสมัยแหวกแนวไปจากเดิม เพราะแทนที่จะเรียนโดยพิสูจน์ทฤษฎี หรือสอนให้นักเรียนจำสูตรโดยปราศจากความเข้าใจอย่างลึกซึ้งซึ่งไม่ได้เอื้อให้นักเรียนหาคำตอบด้วยตัวเอง จากการลงมือปฏิบัติจริง เช่น การหาความสัมพันธ์ของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ซึ่งนักเรียนสามารถทดลองได้หลากหลายวิธี ไม่ว่าจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หรือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมต่างกัน อย่างไรก็ตามรูปสามเหลี่ยมทุกรูปย่อมมีมุมภายในรวมกันได้ 180 องศา แทนการใช้กระดาษคำกับชอล์ก คุณครูจึงอาจเลือกโปรแกรมนี้เป็นเครื่องมือสอนเรื่องต่างๆให้นักเรียนเข้าใจง่ายขึ้น หรือนำไปออกแบบเป็นกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนได้ และได้นำเสนอข้อมูลแบบดึงดูดสายตาและความสนใจของนักเรียน จากการไปทดลองใช้ ผลปรากฏว่า เสียงสะท้อนของนักเรียนล้วนออกมาในทิศทางเดียวกันคือ ทำให้มีความเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์ดีขึ้น เรียนรู้ด้วยความสุข

สรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี ประกอบด้วย ครูที่สามารถสร้างสื่อการเรียนรู้ขึ้นเอง หรือสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีที่ผู้อื่นสร้างขึ้น โดยครูสามารถใช้ในการสาธิต หรือสอนให้ผู้เรียนปฏิบัติเอง เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความรู้ความเข้าใจอย่างถาวร สามารถสังเกต คาดเดา ค้นหาความสัมพันธ์ จนเกิดเป็นข้อสรุปหรือความคิดรวบยอด ทั้งนี้ ครูจะต้องเปลี่ยนบทบาทจากผู้อธิบายเพียงอย่างเดียว เป็นผู้กระตุ้นทางความคิด ให้คำแนะนำ และดำเนินกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ให้สำเร็จลุล่วง

1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมจีเอสพี

งานวิจัยในต่างประเทศ

โฟเลตทา (Foletta, 1994 : 2311 -A) ได้ศึกษาเรื่องการใช้เทคโนโลยีและแนวทางการตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับการคิดของนักเรียนเมื่อใช้โปรแกรมจีเอสพีในการเรียนวิชาเรขาคณิต ในชั้นเรียน จุดมุ่งหมายของการศึกษาในครั้งนี้เพื่อวาดรูปเรขาคณิตในธรรมชาติของ

นักเรียนเกรด 9 และเกรด 10 จำนวน 4 คน คำถามที่ใช้เป็นคำถามที่เกี่ยวกับเรขาคณิตในธรรมชาติ สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากการสังเกตวิธีการที่นักเรียนใช้โปรแกรมจีเอสพี และจากการปฏิบัติในกลุ่มย่อย มีวิธีการเก็บข้อมูลโดยการสังเกตการทำงานในกลุ่มย่อย การสังเกตในชั้นเรียน และการสัมภาษณ์นักเรียน การปฏิบัติของนักเรียนจะใช้การลงมือปฏิบัติบนกระดาษ และจากคอมพิวเตอร์ในการทำงาน ผลการวิจัยพบว่า

1. การวาดรูป การวัด หรือการสำรวจของนักเรียนจะเกิดการผลักดันและคำแนะนำจากครู
2. โปรแกรมจีเอสพี เป็นเครื่องมือใหม่ของการเรียนรู้ทางเรขาคณิต นักเรียนใช้โปรแกรมจีเอสพี ในส่วนที่เพิ่มเติมจากกระดาษและปากกา
3. ในการสืบสวนสอบสวนการใช้โปรแกรมจีเอสพี นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำสามารถทำได้ดีแต่จะต้องมีขั้นตอนที่มากกว่า
4. นักเรียนสามารถตั้งข้อความคาดการณ์ ตั้งแต่เริ่มใช้โปรแกรมจีเอสพี ในการสืบสวนสอบสวนนักเรียนจะมองหาจุดสำคัญที่ต้องค้นหาเพื่อสรุปข้อมูลบางส่วนของข้อสรุปนี้ นักเรียนจะมีการอธิบายถึงเครื่องมือ การคิด การมีปฏิสัมพันธ์ในกลุ่มย่อย ปัจจัยที่สนับสนุนการค้นพบของนักเรียนถึงบทบาทของจีเอสพีการออกแบบการสืบสวนสอบสวน และธรรมชาติของการมีปฏิสัมพันธ์อย่างแท้จริง

โรบินสัน (Robinson, 1994: 4309-A) ได้ศึกษาวิจัยความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ และยุทธวิธีการแก้ปัญหาในการเรียนเรื่องการเดินทางของจุดของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รัฐฟลอริดา สหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ.1994 โดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) เป็นเครื่องมือ ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยใช้การสอนแบบปกติ โดยใช้กระดาษและดินสอ ผลการวิจัยพบว่า หลังจากการเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) ทำให้นักเรียนต้องการมีส่วนร่วมในการเรียน และจากการสัมภาษณ์พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองซึ่งเดิมไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์บางข้อได้ แต่หลังเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) แล้วสามารถทำได้โดยสามารถอธิบายประกอบการแก้ปัญหาได้

เฟอร์กิง (Frerking, 1995: 3772-A) ได้ศึกษาวิจัยความสัมพันธ์ระหว่างระดับชั้นของแวน อิลี ผลสัมฤทธิ์ทางการพิสูจน์และการตั้งข้อคาดเดาในการเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา รัฐจอร์เจีย สหรัฐอเมริกา ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) ช่วยในการตั้งข้อคาดเดาสมบัติของรูปเรขาคณิต ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถทางการตั้งข้อคาดเดา และ

ตรวจสอบข้อาคเดานั้นสัมพันธ์กับความสามารถทางการพิสูจน์ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตสัมพันธ์กับระดับชั้นของแวน ฮีลี

เลสเตอร์ (Lester. 1996 : 2343-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้โปรแกรมจีเอสพีที่มีผลสัมฤทธิ์ต่อการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รัฐแคลิฟอร์เนีย ประเทศสหรัฐอเมริกา ค.ศ. 1996 โดยที่ให้กลุ่มทดลองที่ใช้โปรแกรมจีเอสพี ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนปกติ ผลการวิจัย พบว่า

1. ค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังเรียนเกี่ยวกับความรู้ทางเรขาคณิตและการสร้างของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

2. ค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังเรียนเกี่ยวกับการตั้งข้อาคเดทางเรขาคณิตและการสร้างของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

แมคดักัลปี (McDougall. 1996) แห่งมหาวิทยาลัยโตรอนโต แคนาดา ได้ศึกษาเรื่องความต้องการการเรียนรู้ของครูคณิตศาสตร์ในการใช้คอมพิวเตอร์สอนเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี มาให้ครูได้ทดลองใช้ พบว่า ครูต้องการที่จะมีความสามารถในการสำรวจคณิตศาสตร์ได้มีกิจกรรมร่วมกัน การอภิปราย การศึกษารายกรณี การแลกเปลี่ยนข้อาคเดา และการค้นพบโดยใช้ซอฟต์แวร์ที่เคลื่อนไหวได้

ฟลอเรส (Flores. 1997: 56 – 65) ได้ทำการศึกษาในเรื่องของ เส้นโค้งต่างๆ กับโปรแกรมจีเอสพี โดยการให้นักเรียนใช้โปรแกรมจีเอสพี สร้างเส้นโค้งตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ จากนั้นให้นักเรียนสังเกตถึงรูปที่เกิดขึ้นว่ามีลักษณะอย่างไร ซึ่งรูปที่ได้นั้นจะมีลักษณะเป็นวงกลม วงรี พาราโบลาและไฮเพอร์โบลา ทั้งนี้ นักเรียนจะพบว่าโปรแกรมจีเอสพีนี้มีความมหัศจรรย์ในการที่จะสร้างรูปต่อไปอีกจนเกิดเป็นรูปโค้งทางเรขาคณิตที่มีความสวยงามซึ่งเป็นการพัฒนามาจากการสร้างเส้นตรงหรือวงกลมนั่นเอง

โยเซฟ (Yousef. 1997 : 1631-A) ได้ศึกษาผลการใช้โปรแกรมจีเอสพี มีผลต่อเจตคติของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ลงทะเบียนเรียนวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นที่โรงเรียนเซาท์เวสเทิน รัฐโอไฮโอ ประเทศสหรัฐอเมริกา ค.ศ.1996-1997 โดยที่ให้กลุ่มทดลองเรียนด้วยโปรแกรมจีเอสพี ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนด้วยวิธีปกติ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

กาลินโด (Galindo. 1998 : 76-82) กล่าวว่า การใช้โปรแกรมจีเอสพี ช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตสำรวจความสัมพันธ์รูปเหล่านั้น ตั้งข้อาคเดสมบัติต่างๆ และทดสอบข้อาคเดานั้นๆเป็นการเรียนรู้ที่มีเหตุผลและมีความหมาย โดยนักเรียนสามารถสร้างความเชื่อมโยง

ระหว่างการสร้างรูปโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี และการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ทำให้นักเรียนเข้าใจเรขาคณิตได้อย่างลึกซึ้ง ไม่ใช่เชื่อการพิสูจน์แบบดั้งเดิม

ซิงกาลีส (Shingalis. 1998: 162-165) ได้กล่าวถึงการนำโปรแกรมจีเอสพีมาใช้เพิ่มพูนความรู้เพื่อการหาคำตอบ โดยผู้เรียนสามารถที่จะสืบเสาะสรุปผลการคาดเดาได้รวดเร็วกว่าการใช้กระดาษและดินสอ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนมีทักษะและเข้าใจในการแก้ปัญหา

เมสซาร์เรค (Melczarek. 1998: 2611-A) ได้ศึกษาวิจัยความสัมพันธ์ระหว่างเทคโนโลยีและคอมพิวเตอร์ และการเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยมุ่งเน้นประเด็นศึกษาเฉพาะผลของกิจกรรมแก้ปัญหาโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP) ที่มีต่อความพร้อมในการเรียนรู้ด้วยตนเอง และทัศนคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า การใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP) มีความสัมพันธ์ทางบวกกับการเรียนรู้ด้วยตนเอง

บาฮาร์วานด์ (Baharvand. 2002: 552-A) ได้เปรียบเทียบผลการสอนเรขาคณิตระหว่างสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเทียบกับการสอนของครูแบบปกติโดยใช้กระดาษ ดินสอ และครูเป็นผู้บรรยาย โดยกลุ่มควบคุมเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 26 คน ให้ได้รับการสอนของครูแบบปกติ และอีกกลุ่มทดลองซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 24 คน ให้เรียนด้วยเนื้อหาเดียวกันกับกลุ่มควบคุมแต่ไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในการเรียน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนซึ่งเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตมีคะแนนการทำแบบทดสอบหลังการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์/เรขาคณิตในทางบวก ซึ่งแสดงให้เห็นว่าซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ลิง (Ling. 2004 :1466-A) ได้ศึกษาเรื่อง การเสริมการเรียนรู้เรื่องภาคตัดกรวยด้วยเทคโนโลยีจุดมุ่งหมายของการวิจัยในครั้งนี้ มี 2 ข้อ คือ เพื่อหาแนวทางการใช้เทคโนโลยีที่เพิ่มเติมการเรียนรู้ของนักเรียนในการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย และเพื่อศึกษาทัศนคติของนักเรียนหลังใช้เทคโนโลยีในการศึกษาได้แบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 11 คน ในการเรียนการสอนแต่ละกลุ่มมีผู้สอนคนเดียวกันกลุ่มที่ 1 ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ กลุ่มที่ 2 ใช้คอมพิวเตอร์ซอฟต์แวร์ กลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มควบคุมใช้โปรแกรมจีเอสพี ผลการวิจัยพบว่า 2 กลุ่มที่ใช้เทคโนโลยีคะแนนที่ได้ไม่มีความแตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ และทัศนคติของกลุ่มควบคุมสูงกว่าทัศนคติของกลุ่มที่ใช้เทคโนโลยี 2 กลุ่ม อย่างมีระดับนัยสำคัญทางสถิติ

งานวิจัยในประเทศ

วรรณิกา สุทธเกียรติ (2542) ได้พัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้โปรแกรมจีเอสพี ในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิด จินตนาการเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองตามขั้นตอนการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิต ได้แก่ นักเรียนอาสาสมัครจำนวน 42 คน ซึ่งเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2542 ผลการวิจัยพบว่า บทเรียนเรขาคณิตมีคุณภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ดังนั้น บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นสามารถทำให้นักเรียนเรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้และมีลักษณะตามที่กำหนด

สุจิรา มุสิกะเจริญ (2542) ได้เปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเส้นขนานและความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP)และไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP) ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP)มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไม่แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP)ที่ระดับนัยสำคัญ .05
2. นักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP)มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเส้นขนานและความคล้าย ไม่แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP)ที่ระดับนัยสำคัญ .05

อรรถศาสน์ นิमितพันธ์ (2542) ได้ศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) ประกอบกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ 4 ชั้น ซึ่งประกอบด้วย ส้ารวจ ตั้งข้อาคเดา สืบเสาะหาเหตุผล และสรุปผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์(GSP)ประกอบกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ 4 ชั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความเท่ากันทุกประการ ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่กำหนดไว้
2. นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ที่มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่กำหนดไว้ มีร้อยละ 100, 63.64 และ 25 ตามลำดับ

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (GSP) ประกอบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 4 ชั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ หลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

4. นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ หลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียนคิดเป็นร้อยละเฉลี่ย 40.30, 30.00 และ 26.39 ตามลำดับ

อำนาจ เชื้อบ่อคา (2547 :30) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลการใช้โปรแกรมจีเอสพี ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 48 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องพาราโบลาหลังได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี สูงกว่าก่อนได้รับการสอนด้วยโปรแกรมจีเอสพี อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุภัทรา เกิดมงคล (2549) ได้ศึกษากิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง สมบัติวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวชิรธรรมสาธิต กรุงเทพมหานคร 2 ห้องเรียน จำนวน 100 คน โดยผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนกลุ่มทดลองโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และนักเรียนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนจากครูประจำห้องเรียน โดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต เมื่อสิ้นสุดการสอนให้นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมบัติของวงกลม และให้นักเรียนกลุ่มทดลองตอบแบบวัดความพึงพอใจเรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมบัติของวงกลม โดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องสมบัติของวงกลม ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตอยู่ในระดับปานกลาง

เกษม ลิทธิวงศ์ (2550) ได้ศึกษากิจกรรมการเรียนรู้อันเนื่องมาจากการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนผาบังวิทยา จังหวัดลำปาง ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนผาบังวิทยา จังหวัดลำปาง หลังเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เนตรนภา วิญญาสุข (2550) ศึกษากิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนนาหนองทุ่มวิทยา จังหวัดชัยภูมิ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนนาหนองทุ่มวิทยา จังหวัดชัยภูมิ หลังเรียนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นิตยา อุคมผล (2551) ได้ศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้ เรื่องวงรี โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนน้ำพองศึกษา จังหวัดขอนแก่น โดยใช้กรอบทฤษฎีเกี่ยวกับการพัฒนา กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นความรู้ความเข้าใจตามรูปแบบของแวน อิลี ผลการวิจัย พบว่า ผลการศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในการพัฒนาระดับเชิงเรขาคณิตของนักเรียน ตามรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของแวน อิลี โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad พบว่า เป็นกิจกรรมที่มีความท้าทาย สามารถกระตุ้นให้นักเรียนมีการคาดเดาหรือทำนายผล และตรวจสอบการคาดเดาส่งเสริมให้นักเรียนพัฒนาทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์และสร้างความรู้ด้วยตนเอง

จากการศึกษางานวิจัยทั้งต่างประเทศและในประเทศ ผู้วิจัยมีความเห็นว่าควรนำโปรแกรมจีเอสพี มาใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เพราะนักเรียนได้สังเกต สืบเสาะ เปรียบเทียบ ตั้งข้อคาดเดาต่างๆ ตลอดจนเชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ จนเกิดเป็นข้อสรุปและความคิดรวบยอด ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสามารถนำพื้นฐานเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาระดับที่สูงขึ้น

2.เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

นักวิชาการให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

อารีย์ คงสวัสดิ์ (2544 : 23). กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหมายถึง ความสำเร็จ ความสมหวังในด้านการเรียนรู้ ด้านความรู้ ความเข้าใจ ความสามารถ และทักษะด้านวิชาการของแต่ละบุคคลที่จะประเมินได้จากแบบทดสอบหรือการทำงานที่ได้รับมอบหมายและผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้น จะทำให้แยกกลุ่มของนักเรียนที่ถูกประเมินออกเป็นระดับต่าง ๆ เช่น สูง ปานกลาง ต่ำ เป็นต้น อัญญา โพธิ์พลากร (2545 :93) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์

ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการเรียนรู้จากการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบทดสอบนั้นสอดคล้องกับพฤติกรรม ด้านความรู้ความคิด (Cognitive Domain)

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถทางด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิลสัน (Wilson, 1971: 643-696) ได้จำแนกพฤติกรรมทางการเรียนรู้ด้านสติปัญญาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาไว้เป็น 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ ความจำ ด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมระดับนี้ถือเป็นพฤติกรรมระดับต่ำสุด แบ่งออกเป็น 3 ชั้น ดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความหมายที่จะระลึกถึงข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้ว คำถามจะเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นระยะเวลานานแล้วด้วย

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้เป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability of Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณแต่ซับซ้อนมากกว่า แบ่งได้เป็น 6 ชั้น ดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Concept) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำ เกี่ยวกับข้อเท็จจริง เพราะมโนคตินามธรรม ซึ่งประมวลจากข้อเท็จจริงต่าง ๆ ต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความหรือยกตัวอย่างของมโนคตินั้นได้โดยใช้คำพูดของตน หรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนในรูปแบบใหม่ หรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่าง ไปจากที่เคยเรียนในชั้น มิฉะนั้นจะจัดเป็นความจำ

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์และการสรุปอ้างอิงในกรณีทั่วไป (Principles, Rules, and Generalizations) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ กฎ

และความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติไปสัมพันธ์กับการโจทย์ปัญหา จนได้แนวทางในการแก้ปัญหาได้ ถ้าคำถามนี้เป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเห็นเป็นครั้งแรก

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้าง (Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้ เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหาจากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem Elements from One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดไว้ เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นรูปสมการ ซึ่งมีความหมายคงเดิม โดยไม่รวมถึงกระบวนการแก้ปัญหา (Algorithms) หลังจากแปลแล้ว อาจกล่าวได้ว่าเป็นพฤติกรรมท้ายที่สุดของพฤติกรรมกับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการติดตามแนวของเหตุผล (Ability of Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่ว ๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้อาจดัดแปลงมาจากข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นอื่น ๆ โดยให้นักเรียนอ่าน และ ตีความโจทย์ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) ความสามารถในการแก้ปัญหาในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ในระหว่างเรียน หรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนเลือกกระบวนการแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problem) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจ และเลือกกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหาขั้นนี้อาจต้องใช้วิธีการคิดคำนวณ และจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติมมีปัญหานั้นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบที่กำลังประสบอยู่หรืออาจต้องแยก

โจทย์ปัญหาออกพิจารณาเป็นส่วน ๆ มีการตัดสินใจหลายครั้งต่อเนื่อง ตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบรูป ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร(Ability to Recognize Patterns, Isomorphism, and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การระลึกถึงข้อมูลที่กำหนดให้การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และ การระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดให้จากโจทย์ปัญหาที่พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อนซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหาพฤติกรรมระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพทางสมองระดับสูง แบ่งออกเป็น 5 ชั้น คือ

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine) คำถามในขั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อน ไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่าง ไม่เคยเห็นมาก่อนนักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจ มโนคติ นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships)เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่และสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่ เพื่อใช้ในการแก้ปัญห แทนการจำความสัมพันธ์เดิมที่เคยพบมา แล้วใช้กับข้อมูลชุดใหม่เท่านั้น

4.3 ความสามารถในการพิสูจน์ (Ability to Proofs) เป็นความสามารถในการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนจะต้องอาศัยนิยามทฤษฎีต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วช่วยในการแก้ปัญห

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) ความสามารถในการขั้นนี้ เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่ความสามารถในการวิจารณ์เป็นพฤติกรรมที่ยุ่ยากซับซ้อนกว่า ความสามารถในการขั้นนี้ต้องการให้นักเรียนมองเห็นและเข้าใจการพิสูจน์นั้นว่าถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดจากมโนคติ หลักการ กฎ นิยาม หรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตรและทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability to Formulate and Validate Generalization) นักเรียนต้องสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่

โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิมและต้องสมเหตุสมผลด้วย คือการถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์หรืออาจถามให้นักเรียนสร้างกระบวนการคิดคำนวณใหม่ พร้อมทั้งแสดงการใช้กระบวนการนั้น

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ความสามารถในการเรียนรู้ของนักเรียนที่ได้รับจากการสอน การฝึกฝน หรือประสบการณ์ต่างๆ ซึ่งประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น

2.2 องค์ประกอบที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แครร์รอล (Carroll. 1963 : 726-733) ได้เสนอความคิดเกี่ยวกับอิทธิพลขององค์ประกอบต่าง ๆ ที่มีอิทธิพลต่อระดับผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยครู นักเรียน และหลักสูตรมาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญโดยเชื่อว่า เวลาและคุณภาพของการสอนมีผลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนได้รับ วิมล พงษ์ปาลิต (2541 : 49) กล่าวว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้นประกอบด้วยคุณลักษณะของตัวผู้เรียน ซึ่งได้แก่พฤติกรรมด้านความรู้ ความคิดรวมกับลักษณะนิสัยทางจิตพิสัยของนักเรียน คุณภาพการสอนของครูและสภาพแวดล้อมต่าง ๆ ซึ่งคุณลักษณะของตัวผู้เรียนมีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมากที่สุด

อัญชนา โภธิพลากร (2545: 9 5) กล่าวว่า องค์ประกอบหลายประการที่ทำให้เกิดผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คือด้านตัวนักเรียน เช่น สติปัญญา อารมณ์ ความสนใจเจตคติต่อการเรียน ด้านตัวครู เช่น คุณภาพของครู การจัดระบบ การบริหารของผู้บริหาร ด้านสังคมเช่น สภาพเศรษฐกิจและสังคมของครอบครัวของนักเรียน เป็นต้น แต่ปัจจัยที่มีผลโดยตรงต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนของนักเรียนก็คือการสอนของครูนั่นเอง

จากการศึกษาองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีหลายประการ เช่น เจตคติต่อครูผู้สอน สภาพแวดล้อมต่างๆของผู้เรียน เป็นต้น แต่ปัจจัยสำคัญที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คือ คุณภาพการสอนของครู

2.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

สาเหตุของการสอบตกและการออกจากโรงเรียน เรวัตและคุปตะ (Rawat & Cupta. 1970 : 7 – 9) ได้กล่าวว่าอาจมาจากสาเหตุใดสาเหตุหนึ่ง หรือมากกว่านั้นโดยมีด้วยกันหลายประการ ได้แก่

1. นักเรียนขาดความรู้สึกลงในการมีส่วนร่วมกับการเรียน
2. ความไม่เหมาะสมของการจัดเวลาเรียน
3. ผู้ปกครองไม่เอาใจใส่ในการศึกษาของบุตร

4. นักเรียนมีสุขภาพไม่สมบูรณ์
5. ความยากจนของผู้ปกครอง
6. ประเพณีทางสังคม ความเชื่อที่ไม่เหมาะสม
7. โรงเรียนไม่มีการปรับปรุงที่ดี
8. การสอบตกชั้นเพราะการวัดผลไม่ดี
9. อายุน้อยหรือมากเกินไป
10. สาเหตุอื่น ๆ เช่น การคมนาคมไม่สะดวก

วัชร วรรณสิงห์ (2525 : 435) กล่าวว่าไว้นักเรียนที่อ่อนคณิตศาสตร์มีลักษณะดังนี้

1. ระดับสติปัญญา (I.Q) อยู่ระหว่าง 75 – 90 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30
2. อัตราการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่านักเรียนอื่น ๆ
3. มีความสามารถทางการอ่านต่ำ
4. จำหลักหรือมโนคติเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ที่เรียนไปแล้วไม่ได้
5. มีปัญหาในการใช้ถ้อยคำ
6. มีปัญหาในการหาความสัมพันธ์ของสิ่งของต่าง ๆ และการสรุปเป็นหลักเกณฑ์โดยทั่วไป
7. มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศสตร์น้อย สืบเนื่องจากการสอบตกวิชาคณิตศาสตร์บ่อยครั้ง
8. มีเจตคติที่ไม่ดีต่อโรงเรียนและโดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อวิชาคณิตศาสตร์
9. มีความกดดันและรู้สึกกังวลต่อความล้มเหลวทางด้านการเรียนของตนเอง และบางครั้งรู้สึกดุดุดตัวเอง
10. ขาดความเชื่อมั่นในความสามารถของตนเอง
11. อาจมาจากครอบครัวที่มีสภาพแวดล้อมแตกต่างจากนักเรียนอื่น ๆ ซึ่งมีผลทำให้ขาดประสบการณ์ที่จำเป็นต่อความสำเร็จในการเรียน
12. ขาดทักษะในการฟัง และไม่มีความตั้งใจในการเรียน หรือมีความตั้งใจในการเรียนเพียงชั่วระยะเวลาสั้น
13. มีข้อบกพร่องในด้านสุขภาพ เช่น สายตาไม่ปกติ มีปัญหาด้านการฟังและมีข้อบกพร่องทางทักษะการใช้มือ
14. ไม่ประสบความสำเร็จในด้านการเรียนทั่ว ๆ ไป

15. ขาดความสามารถในการแสดงออกทางคำพูด ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้คำถามที่แสดงให้เห็นว่าตนเองก็ยังไม่เข้าใจในการเรียนนั้น ๆ

16. มีวุฒิภาวะค่อนข้างต่ำทั้งทางด้านอารมณ์และสังคม

กล่าวโดยสรุปได้ว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อการเรียนคณิตศาสตร์และมีผลต่อการเรียนของนักเรียน คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ซึ่งครูมีส่วนสำคัญในการเลือกวิธีการสอนให้เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนแต่ละคน ตลอดจนการสร้างเจตคติที่ดี ความรู้สึกลต่อการมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ให้เกิดประสิทธิผลที่ดีขึ้น

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการเชื่อมโยง/ความสามารถในการเชื่อมโยง/ทักษะในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (ศศิธร แก้วรักษา. 2547 : 15-16 ; อ้างอิงจาก The National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]. 1991:102) ได้ให้ความหมายของการเชื่อมโยง คือการผสมผสานแนวคิดที่มีความเกี่ยวข้องกันให้รวมเป็นองค์ประกอบเดียวกัน ซึ่งแบ่งออกเป็น

1. การเชื่อมโยงภายในวิชา เป็นการนำเนื้อหาภายในวิชาเดียวกัน ไปสัมพันธ์กันให้ผู้เรียนได้ประยุกต์ความรู้และทักษะไปใช้ในชีวิตจริง ช่วยให้นักเรียนทำความเข้าใจถึงความแตกต่างของเนื้อหาวิชารวมทั้งพีชคณิต เรขาคณิต และตรีโกณมิติ ซึ่งจะทำให้การเรียนของผู้เรียนมีความหมาย

2. การเชื่อมโยงระหว่างวิชา เป็นการรวมศาสตร์ต่าง ๆ ตั้งแต่ 2 สาขาขึ้นไปภายใต้หัวเรื่องที่เกี่ยวข้องกันให้มาสัมพันธ์กัน เช่นวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคม กีฬา หรือศิลปะ เป็นการเรียนรู้โดยใช้ความรู้ ความเข้าใจ และทักษะในวิชาต่าง ๆ มากกว่า 1 วิชาขึ้นไป จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่ลึกซึ้ง และตรงกับสภาพชีวิตจริง

กรมวิชาการ (2544 : 25) ได้ให้ความหมายของทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในด้านความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ โดยแบ่งตามระดับช่วงชั้นดังนี้

ระดับ ป. 1-3 ความสามารถในการเชื่อมโยง หมายถึง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงในการเรียนรู้เนื้อหาต่างๆในวิชาคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ

ระดับ ป. 4-6 ความสามารถในการเชื่อมโยง หมายถึง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงในการเรียนรู้เนื้อหาต่างๆในวิชาคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆได้ และนำความรู้และทักษะที่ได้จากการเรียนไปประยุกต์ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆและในชีวิตจริงได้

ระดับ ม. 1-3 ความสามารถในการเชื่อมโยง หมายถึง การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆและนำไปประยุกต์ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆและในการดำรงชีวิต

ระดับ ม. 4-6 ความสามารถในการเชื่อมโยง หมายถึง เชื่อมโยงความคิดรวบยอด หลักการและวิธีการคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ เพื่ออธิบายข้อสรุปหรือเรื่องราวต่างๆได้ และนำไปประยุกต์ในการเรียนรู้ในงานและในการดำรงชีวิต

กรมวิชาการ (2544 : 20) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยง คือ การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ต้องการให้ผู้เรียนมีความรู้และมีพื้นฐานในการที่จะนำไปศึกษาต่อนั้นจำเป็นต้องบูรณาการเนื้อหาต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน เช่น การใช้ความรู้เรื่องเซตในการให้คำจำกัดความบทนิยามในเรื่องต่าง ๆ เช่น บทนิยามของฟังก์ชันในรูปของเซต บทนิยามลำดับในรูปของฟังก์ชัน นอกจากการเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ด้วยกันแล้ว ยังมีการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ โดยใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้และใช้ในการแก้ปัญหา เช่น เรื่องการเงิน การคิดดอกเบี้ยทบต้น ก่ออาศัยความรู้ในเรื่องเลขยกกำลังและผลบวกของอนุกรมในงานศิลปะและการออกแบบบางชนิดก็ใช้ความรู้เกี่ยวกับรูปเรขาคณิต

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้เดิมของผู้เรียน มาประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติม จนเกิดเป็นข้อสรุปหรือความคิดรวบยอด ซึ่งผู้สอนสามารถส่งเสริมและสร้างสถานการณ์ให้ผู้เรียนเกิดการเชื่อมโยงทั้งภายในวิชาหรือระหว่างวิชาได้

3.2 การพัฒนาทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา(The National Council of Teachers of mathematics, [NCTM.] 1991: Online) กล่าวถึง การพัฒนาการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ว่า ครูมีบทบาทในการพัฒนาความคิดรวบยอด กระบวนการ และการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

- สาธิตความรู้ในเรื่องความคิดรวบยอดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
- นำเสนอคณิตศาสตร์ในลักษณะเช่นเดียวกับเครือข่ายการเชื่อมโยงความคิด

รวบยอดและกระบวนการร่วมกัน

- เน้นให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นและเป็นการเชื่อมโยงในชีวิตประจำวัน

- ร่วมประดิษฐ์ชิ้นงานกับนักเรียน โดยส่งเสริมความเข้าใจในความคิดรวบยอดกระบวนการ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์

- ร่วมกันอภิปรายคณิตศาสตร์ โดยขยายความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอดกระบวนการ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ของนักเรียน

สิ่งที่มีความสำคัญอันดับแรกในมาตรฐานนี้อยู่ที่การสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ ครูสาธิตความเข้าใจความคิดรวบยอดและหลักการทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง เชื่อมโยงความคิดรวบยอดและกระบวนการทางเชื่อมโยงหัวข้ออื่นในคณิตศาสตร์ (เช่น นำเรขาคณิต มาใช้ในการอธิบายเรื่องความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความน่าจะเป็นหรือตัวประกอบของจำนวนเต็ม) และเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ครูสามารถตอบคำถามของนักเรียนได้อย่างเหมาะสม สามารถออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ รวมไปถึงการนำเสนอคณิตศาสตร์ได้อย่างหลากหลาย และสามารถร่วมอภิปรายคณิตศาสตร์ในห้องเรียนได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งการสาธิตความรู้ รวมไปถึงการปรับตัวทางคณิตศาสตร์ สิ่งตามมา คือความพยายามของมนุษย์ในการใช้คณิตศาสตร์ในชีวิต ในทางตรงกันข้ามมักเกิดความผิดพลาดทางคณิตศาสตร์บ่อยๆ โดยมีการนำเสนออย่างจำกัดหรือไม่เหมาะสม หรือนำเสนอคณิตศาสตร์ในลักษณะวิชาที่ตายตัว มีการนำเสนอโดยใช้สัญลักษณ์อย่างเดียว การเชื่อมโยงที่เกิดขึ้นประจํานี้ส่งผลให้นักเรียนมีความเชื่อมั่นในคุณค่าทางคณิตศาสตร์ในสังคม และมีการส่งเสริมโดยไม่คำนึงถึงว่านักเรียนกำลังเรียนคณิตศาสตร์ถึงตอนใด นักเรียนควรมีโอกาสในการประยุกต์โดยเรียนรู้จากสถานการณ์จริงในโลกนอกเหนือจากสถานการณ์ปัญหาที่เกิดขึ้นในหนังสือเรียนปกติ นักเรียนมองคณิตศาสตร์ว่าเป็นสิ่งที่อยู่ในสังคมและเป็นสิ่งที่จำเป็นต่อชีวิตเขา มาตรฐานนี้บอกเป็นนัยว่า กิจกรรมการเรียนการสอนควรมุ่งมุ่งหมายไปที่การส่งเสริมการตระหนักในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์โดยการนำมาซึ่งประสบการณ์และความสนใจของนักเรียน

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา(The National Council of Teachers of Mathematics , [NCTM.] 2000 : 360) กล่าวว่า นักเรียนควรได้รับโอกาสในการปฏิสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ทั้งในโรงเรียน และในสังคมปัจจุบันมากขึ้น ครูคณิตศาสตร์ต้องค้นคว้าร่วมมือกับครูในวิชาอื่นเพื่อสำรวจแนวคิดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ไปยังปัญหาอื่นซึ่งเกิดขึ้นในห้องเรียนการรวมคณิตศาสตร์เข้าไปในเนื้อหาซึ่งให้สัญลักษณ์และกระบวนการที่มีประโยชน์ เป็นจุดมุ่งหมายที่สำคัญของมาตรฐานทั้งหมด ทำให้นักเรียนมองเห็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่จะช่วยให้เข้าใจมันได้ทักษะการเชื่อมโยงมีประโยชน์ในการแก้ปัญหา การอภิปราย

และแบบจำลองข้อเท็จจริงในโลก และการสื่อสารความคิดและข้อมูลที่ซับซ้อนในลักษณะที่ละเอียดและชัดเจน การนำเสนอปัญหาช่วยให้มองเห็นสิ่งต่างๆ ได้ทั่วและชัดเจนขึ้น ทำให้นักเรียนอธิบายปัญหาและหาคำตอบได้ ตัวอย่างเช่น

- ความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ที่สามารถช่วยให้เข้าใจในการดำเนินการของเศษส่วน การนำเสนอข้อมูล การแก้ปัญหาคัดส่วน การหาตัวประกอบและความน่าจะเป็น
- บทเรียนเรื่องการวัดต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างสูตรและแก้ปัญห โดยใช้แนวคิดทางเรขาคณิต การวัด และพีชคณิต

นักเรียนจะได้แนวคิดใหม่ๆ กระบวนการ และทักษะจากการแก้ปัญหา แล้วสามารถรวบรวมแนวคิดและความคิดรวบยอดเพื่อส่งเสริมความเชื่อมั่นของนักเรียนในความคิดของเขาเอง เนื้อหาส่งเสริมทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อการเชื่อมโยง แต่ครูจะต้องหาโอกาสในการช่วยเหลือนักเรียนให้สร้างการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ปัญหาที่สร้างขึ้นต้องเป็นปัญหาที่เน้นให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เอาใจใส่ต่อการตระหนัก และการสร้างความเชื่อมโยงระหว่างหัวข้อจะค่อย ๆ ซึมซับเข้าไปในตัวนักเรียน ซึ่งคาดหมายว่าแนวคิดที่พวกเขาจะได้เรียนรู้เป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาและค้นคว้าความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ

วราภรณ์ มีหนัก (2545 : 35) ได้นำเสนอเกี่ยวกับองค์ประกอบที่ช่วยพัฒนา/ทักษะกระบวนการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อย่างเด่นชัดในเรื่องนั้น
2. มีความรู้ในเนื้อหาที่จะนำไปเชื่อมโยงกับสถานการณ์หรืองานอื่น ๆ ที่ต้องการเป็นอย่างดี
3. มีทักษะในการมองเห็นความเกี่ยวข้องเชื่อมโยงระหว่างความรู้ และทักษะ/กระบวนการที่มีในเนื้อหานั้นกับงานที่เกี่ยวข้องด้วย
4. มีทักษะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างความสัมพันธ์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ หรือคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่ต้องเกี่ยวข้องด้วย
5. มีความเข้าใจในการแปลความหมายของคำตอบที่หาได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่ามีความเป็นไปได้ หรือสอดคล้องกับสถานการณ์นั้น อย่างสมเหตุสมผล

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การพัฒนาทักษะ / กระบวนการเชื่อมโยงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้นั้นครูผู้สอนอาจจัดกิจกรรมหรือสถานการณ์ปัญหาที่กระตุ้นให้ผู้เรียนได้นำความรู้เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่หรือได้ความรู้ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้สอนกำหนดขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์อื่นๆ ได้

3.3 ลักษณะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์รูปแบบต่างๆ

นัทเซาลัส (เทอดเกียรติ วงศ์สมบุรณ์. 2547: 38; อ้างอิงจาก Natsaulas. 1993.) ได้กล่าวถึงการเชื่อมโยงระหว่างกลุ่มสมมาตร (Symmetry Groups) ในคณิตศาสตร์ กับศิลปะและประวัติศาสตร์ว่า ที่ผ่านมามีการนำเอาวัฒนธรรมจากที่ต่างๆ มาเป็นต้นแบบในการผลิตและออกแบบสิ่งประดับและแตกต่างต่างๆ หรือเป็นภาพสัญลักษณ์ของพิธีการหรือสัญลักษณ์ทางศาสนาซึ่งหลายอย่างก็กล่าวมาว่าเป็นคณิตศาสตร์โดยธรรมชาติ มีภาพที่สร้างมาจากการสะท้อนและการหมุนภาพบนระนาบ ดังนั้นประวัติศาสตร์และการผสมผสานทางศิลปะ ทำให้นักเรียนได้ศึกษาการสะท้อนและการหมุนภาพบนระนาบได้ เช่นเดียวกับมโนคติของกลุ่มสมมาตร การศึกษากรุปสมมาตรเพื่อให้เชื่อมโยงกับศิลปะและประวัติศาสตร์ ส่งเสริมความเข้าใจในการสร้างภาพบนระนาบ และแสดงโครงสร้างพื้นฐานของพีชคณิตและเรขาคณิต

ดวงเดือน อ่อนน่วม และคณะ (2547: 50) กล่าวถึงลักษณะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นไปได้หลายลักษณะดังนี้

1. การเชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ เช่น การเรียนรู้เกี่ยวกับการสร้างสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ต้องเชื่อมโยงกับความรู้เดิมเรื่องพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใน 2 ประเด็นคือ รูปสามเหลี่ยมเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ ความกว้างคูณความยาว ดังนั้น สูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคือ $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

2. การเชื่อมโยงระหว่างเรื่องต่างๆ ของคณิตศาสตร์ เช่น การลบเป็นการดำเนินการตรงข้ามของการบวก การคูณเป็นการบวกซ้ำๆ การคูณและการหารเป็นการดำเนินการตรงกันข้ามร้อยละสัมพันธ์กับเศษส่วน การวัดสัมพันธ์กับเรขาคณิต

3. การเชื่อมโยงแบบจำลองหลาย ๆ แบบสู่ความคิดรวบยอดเดียวกัน เช่น การให้นักเรียนสร้างหน่วยการวัดที่ไม่เป็นมาตรฐานตามความต้องการของตนเอง ก็จะได้หน่วยที่ไม่เป็นมาตรฐานหลายๆลักษณะ แต่ทุกหน่วยนำไปสู่ความคิดรวบยอดเดียวกันว่าเป็นหน่วยการวัดที่ไม่เป็นมาตรฐาน

4. การเชื่อมโยงความคิดรวบยอดไปสู่วิธีคิดคำนวณ เช่น ในการเรียนรู้เรื่องหน่วยการวัด เด็กต้องเกิดความคิดรวบยอดว่าจำนวนต่าง ๆ จะมาบวกกลับกันได้ต้องมีหน่วยการวัดเดียวกัน ดังนั้น ถ้าหากจำนวนเหล่านี้มีหน่วยต่างกันจึงต้องมีการเปลี่ยนหน่วยให้เหมือนกันก่อน

5. การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน และคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ การเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยการกำหนดเป็นหน่วยการเรียนรู้เป็นวิธิต่างหนึ่งที่สนับสนุนส่งเสริมการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน การกำหนดหน่วยการเรียนรู้เปิดโอกาสให้เด็กได้ศึกษาสำรวจ สืบค้น เกี่ยวกับเรื่องต่างๆ ที่ตนสนใจ ได้มีโอกาสแสดงความคิดริเริ่มได้สร้างสรรค์

สิ่งต่าง ๆ ในขณะเดียวกัน ยังคงเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วย หน่วยการเรียนรู้อาจเป็นหน่วยการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์เอง หรือเป็นหน่วยการเรียนรู้กลางที่คณิตศาสตร์เรียนรู้ร่วมกับวิชาอื่นๆ ก็ได้

วาเชอร์ และ มิลรอย (Vacher & Mylroie. 2001 : 640 – 641). ได้กล่าวถึงการเชื่อมโยงในลักษณะต่างๆ ดังนี้

1. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับธรณีวิทยา ในการสำรวจถ้ำ ว่าถ้ำนั้นแตกต่างจากภูเขา ทะเลสาบหรือแม่น้ำตรงที่เราไม่สามารถเห็นปากถ้ำได้ในระยะไกล ไม่สามารถทำแผนที่จากภาพถ่ายทางอากาศ หรือภาพถ่ายดาวเทียม ไม่สามารถบอกลักษณะภายในถ้ำได้จนกว่าเราจะเดินเข้าไปสำรวจภายใน ภายในถ้ำนั้นยังทอดยาวออกไปหลายทาง จนไม่อาจทำนายส่วนปลายของถ้ำได้ จึงต้องมีวิธีการในการสำรวจ โดยหาความยาวของระยะทางในถ้ำเป็นส่วนๆ และทิศทางแล้วเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ การเขียนแผนที่ของถ้ำ จึงเป็นการแปลงข้อมูลของระยะทาง และมุมออกมาเป็นเวกเตอร์ในระบบสามมิติ

2. การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความจริงคณิตศาสตร์กับโลกปัจจุบันเชื่อมโยงกันในหลาย ๆ ด้าน จากบทความในหนังสือพิมพ์หรือนิตยสาร ไม่ว่าจะเป็นทางด้านธุรกิจ แนวโน้มทางเศรษฐกิจ สภาพอากาศ และข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ การรายงานพิเศษทั้งในรูปแบบความและภาพข่าว แผนผังการเดินทางที่ท่าเรือ สถานีรถไฟ และสนามบิน ล้วนให้ข้อมูลที่เป็นคณิตศาสตร์เพื่ออำนวยความสะดวกแก่ผู้คนทั้งสิ้น ปัญหาทางเศรษฐกิจ ปัญหาการจัดการขยะและมลพิษที่เกิดจากรถยนต์ ของเสียจากโรงงาน ได้ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับการดำรงชีวิตปัจจุบัน ครูจึงควรสอนโดยการบูรณาการคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือกับปัญหาในชีวิตจริงที่เกิดขึ้นในแต่ละวัน ดังนั้นนักเรียนต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงเนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์เพื่อจะได้บูรณาการเนื้อหาทั้งหมด ครูจะประสบความสำเร็จเมื่อทำหน้าที่ให้นักเรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงมโนคติเนื้อหาต่าง ๆ เข้าด้วยกัน เช่น เศษส่วนและทศนิยมกับเรื่องของร้อยละ การคูณกับการบวกการหารกับการลบ และ การนำการวัดไปใช้ในเรขาคณิต นักเรียนต้องรู้จักการเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงได้ คาร์โรล (Carole.1999: 8 -11) กล่าวว่า การเรียนนอกสถานที่นับว่าเป็นการจัดกิจกรรมการสอนอย่างหนึ่ง เป็นการจัดประสบการณ์ให้นักเรียนเป็นส่วนหนึ่งในการเรียนรู้ ในขณะที่เขาเก็บรวบรวมข้อมูล ความสัมพันธ์ด้านต่างๆ ที่อยู่รอบตัว ต้องมีการจดบันทึกและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตั้งคำถามตัวเองบ่อย ๆ จะทำให้เข้าใจได้ลึกซึ้งขึ้น

3. การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ที่บ้านแบบแผน โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ หลังจากทีสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (สมบัติ แสงทองคำสุก. 2545 : 40-44 ; อ้างอิงจาก The National Council of Teachers of Mathematics.1991) ให้คำแนะนำถึงความแตกต่างที่ชัดเจนถึง

ประเภทของผู้ปกครองทั้งหมดของนักเรียนในการกำหนดประสบการณ์ NCTM. รับรู้ถึงผู้ปกครองคนใดที่คิดว่านักเรียนจะทำการบ้านวิชาคณิตศาสตร์ที่ไต่มาจากการเก็บรวบรวมข้อมูลจริงในการแก้ปัญหาซึ่งจะดูเป็นเรื่องประหลาด มันเป็นการคัดค้านจากครูที่เคยประสบความสำเร็จ ความช่วยเหลือของผู้ปกครองในการกำหนดรายการใหม่และเชื่อมโยงกับชีวิตจริง ในการประชุมผู้ปกครองเพื่อเตรียมการจัดตั้งแวดล้อมที่เป็นประโยชน์ที่สามารถชี้แจงและแสดงให้เห็นว่าผู้ปกครองที่เสริมกิจกรรมในชั้นเรียนจะได้เห็นถึงประโยชน์โดยตรง ส่วนกิจกรรมที่บ้านจะถูกเลือกอย่างละเอียดและถูกนำเสนอในวิถีทางที่สร้างความรู้สึกที่ดีกับผู้ปกครองจะทำให้คุ้นเคยกับจุดมุ่งหมายของการกำหนดการบ้าน ชูลทซ์ (Schultz.1999 : Online) กล่าวว่า สิ่งที่รอบตัวเรานั้นคือคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้ของนักเรียน ในชีวิตประจำวันของเราพบว่าเป็นคณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทในการดำเนินชีวิตตั้งแต่ทักษะคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ไม่ซับซ้อนไปจนถึงซับซ้อนและคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เช่น การวางแผนราคาการก่อสร้างโดยประมาณ

ตัวอย่างการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

การขายอาคารบ้านเรือน

- การคำนวณราคาค่าแรงและวัสดุ เมื่อต้องการคำนวณค่าประมาณทั้งหมด
- รูปทรงที่ใช้ในการคำนวณมุมและพื้นที่การซ่อมแซมส่วนที่ชำรุดเสียหาย
- การประมาณค่าซ่อม
- การคำนวณราคาโดยเฉลี่ย

คอสเซย์ และคนอื่น ๆ (Dossey, et al. 2002 : 81-83) กล่าวถึง การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ เป็นความเข้าใจในคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นได้ในขณะที่มีการเรียนรู้ เป็นการสร้างความเชื่อมโยงระหว่างความรู้ใหม่และความรู้เก่าในส่วนหนึ่งเราได้เรียนมาแล้ว นักเรียนสามารถจะเชื่อมโยงมโนคติทางคณิตศาสตร์ได้หลากหลาย จะพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์ได้มากยิ่งขึ้น การเชื่อมโยงจะทำให้นักเรียนได้แก้ปัญหา และสามารถทำการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้อย่างคล่องแคล่วขึ้น

โทมัส และ ซานเตียโก (Thomas & Santiago.2002 : 484) กล่าวว่า การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ เป็นการปฏิบัติในทางสร้างสรรค์ สร้างความตื่นเต้นในชั้นเรียน พัฒนาไปสู่ความรักในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน และสนับสนุนธรรมชาติของนักเรียน นักเรียนมีความรู้ที่ชัดเจนและเข้าใจคณิตศาสตร์มากขึ้น เมื่อพวกเขาสามารถเชื่อมโยงความคิดทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ถ้าครูมีวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เชื่อมโยงภายในวิชาคณิตศาสตร์

เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน นักเรียนจะสามารถเกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจนและเข้าใจอย่างแท้จริง รวมทั้งครูจะประสบความสำเร็จเมื่อทำหน้าที่กระตุ้นและส่งเสริมให้นักเรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงเนื้อหาต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์เข้ากับวิชาอื่นๆ ได้

3.4 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 354-358) กล่าวว่า นักเรียนเกรด 9 -12 ควรได้รับการพัฒนาในเรื่องของการโยงความคิดไปยังแง่มุมต่างๆ ทำให้เกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งขึ้น ดีกว่าคิดถึงวิธีการเดียวในการแก้ปัญหาที่นำไปสู่ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน นักเรียนจะได้การหยั่งรู้ที่สามารถบอกได้ว่าปัญหาใดต้องพิสูจน์ ปัญหาใดใช้เพียงการคาดคะเนไม่ต้องพิสูจน์ การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน ทำให้เกิดความเข้าใจปัญหานั้นมากยิ่งขึ้น

กรมวิชาการ (2544 : 200-202) กล่าวว่าในการจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้น ผู้สอนอาจจัดกิจกรรมหรือสถานการณ์ปัญหาสอดแทรกในการเรียนรู้อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่หรือนำความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้สอนกำหนดขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือเห็นการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน

ทรงชัย อักษรคิด (2547-2548 :33-40) กล่าวว่า ในการจัดการเรียนการสอนครูผู้สอนควรบูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกันเท่าที่จะเป็นไปได้โดยการเชื่อมโยงเนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ โดยใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้และใช้ในการแก้ปัญหา รวมถึงการนำคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ครูผู้สอนควรจัดกิจกรรมหรือกำหนดสถานการณ์ปัญหาสอดแทรกในการเรียนรู้อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่หรือนำความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ครูผู้สอนกำหนดขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือ เห็นการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน การส่งเสริมความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ นั้น มีองค์ประกอบที่สำคัญ ดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อย่างเด่นชัดในเรื่องนั้น

2. มีความรู้ในเนื้อหาที่จะนำไปเชื่อมโยงกับสถานการณ์หรืองานอื่นๆ ที่ต้องการเป็นอย่างดี

3. มีทักษะในการมองเห็นความเกี่ยวข้องเชื่อมโยงระหว่างความรู้และทักษะ/กระบวนการที่มีในเนื้อหานั้นกับงานที่เกี่ยวข้อง

4. มีทักษะในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างความสัมพันธ์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ หรือคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องด้วย

5. มีความเข้าใจในการแปลความหมายของคำตอบที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ว่ามีความเป็นไปได้หรือสอดคล้องกับสถานการณ์นั้นอย่างสมเหตุสมผล

การสร้างการเชื่อมโยงอย่างชัดเจน เริ่มพิจารณาจากนักเรียนใช้หลอดเพื่อต่อมุมทั้งสามให้เป็นรูปสามเหลี่ยมชานเทียโก กล่าวว่า จุดมุ่งหมายเพื่อทดสอบพวกเขาจากภาพ 2 มิติเชื่อมโยงไปสู่การประยุกต์จากรูปสามเหลี่ยมในแนวนอน จากความรู้เดิมเพื่อเรียนรู้โน้มนำใหม่ในวิชาเรขาคณิต ไปสู่เรื่องการวัด พีชคณิต และวิยุตคณิต

3.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยในต่างประเทศ

Knuth (Knuth, 2000:48-53) กล่าวว่า การที่นักเรียนจะเข้าใจความหมายของฟังก์ชันที่ไม่เพียงแค่ว่า ครูต้องกระตุ้นให้นักเรียนมีการนำเสนอวิธีที่ต่างกันในการหาคำตอบให้มีการแสดงสมการในรูปแบบต่างๆ เช่น ให้มีการนำเสนอสมการเชิงเส้น ทั้งในรูป Point-slope และรูปมาตรฐาน วิธีที่จะเน้นการนำเสนอด้วยกราฟ ทำให้งานที่แปลงเป็นกราฟไปเป็นสมการ และควรให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนความรู้ และ อภิปรายถึงวิธีการได้มาซึ่งคำตอบในแบบต่าง ๆ

ลอว์สัน และ ชินแนพเพน (Lawson & Chinnappan, 2000 : 26-43) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการทำงานแก้ปัญหากับการสร้างองค์ความรู้ของนักเรียน และศึกษาต่อไปถึงตัวชี้วัดความสามารถด้านเนื้อหา และการเชื่อมโยงความรู้ในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ระหว่างนักเรียน 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกับกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงมีความสามารถในการสร้างองค์ความรู้ขึ้นเองได้มากกว่าและสามารถโยงความรู้ที่จัดตามแผนการสอนมาสัมพันธ์กับความรู้เดิมที่มีอยู่ และตัวชี้วัดความสามารถในการเชื่อมโยงมีผลต่อความสำเร็จในการแก้ปัญหาสูงกว่าตัวชี้วัดความสามารถด้านเนื้อหา จุดมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้เพื่อให้ข้อมูลกับครูในการหาวิธีการสอนเพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ที่มีคุณภาพได้

พุกาลี (Pugalee, 2001:236-243) ได้ศึกษาการเขียนของนักเรียนในกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่แสดงรูปแบบของการรู้คิดที่ชัดเจน กับนักเรียนเกรด 9 จำนวน 20 คน ที่เรียนวิชาพีชคณิตโดยการทำโจทย์ปัญหา ให้เขียนอธิบายตามกระบวนการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนแสดงรูปแบบการรู้คิดของตนเองออกมาในการเขียนอธิบายแสดงถึงการมีพฤติกรรมความรู้คิดที่หลากหลาย ทั้งการกำหนดทิศทาง การวางแผนจัดการ การดำเนินการ และรูปแบบการพิสูจน์ในการแก้ปัญหา ซึ่งพฤติกรรมความรู้คิดมีอิทธิพลอย่างมากในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นี้ เน้นที่การเขียนเพื่อเป็นแนวทางในการบูรณาการหลักสูตรคณิตศาสตร์และสนับสนุนความต้องการในการวิจัยเรื่องการเขียนในคณิตศาสตร์ให้มากขึ้น

แพนดิสซิโอ (Pandiscio, 2002 : 216 - 221) ได้สำรวจการโยงมิติการพิสูจน์กับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เรขาคณิตของนักศึกษาฝึกสอน โดยให้นักศึกษาฝึกสอน 4 คน(ชาย 2 คนหญิง 2 คน) แก้ปัญหาเรขาคณิตที่ไม่คุ้นเคยโดยใช้พื้นฐานมโนคติของยูคลิดจำนวน 2 ข้อ ให้สร้างการพิสูจน์ตามรูปแบบที่ให้ผลออกมาเป็นรูปแบบกรณีทั่วไป และให้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิต ผลปรากฏว่านักศึกษาฝึกสอนทั้ง 4 คน ยอมรับว่าแม้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตจะไม่ได้ช่วยพิสูจน์ แต่ก็เป็เครื่องมือช่วยสร้างความรู้สึกรู้สึก (Sense)ให้เกิดความเข้าใจความสัมพันธ์ในปัญหาหรือทฤษฎีบท เพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์

นิโคล และ เครสโป (Nicol & Crespo, 2005: 240-251) ได้ศึกษาการค้นหาคณิตศาสตร์จากสถานที่ทางจินตนาการ โดยการทบทวนหาแนวทางที่เป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์การศึกษาดังกล่าวมีความมุ่งหมายที่จะแลกเปลี่ยนความคิด เพื่อที่จะหาหนทางในการทำให้คณิตศาสตร์มีความน่าสนใจมากยิ่งขึ้น เพื่อเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนไม่เพียงแค่ว่าเข้าใจในเรื่องทักษะวิธีการ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เท่านั้น ยังเป็นการทำให้นักเรียนมีความเฉลียวฉลาดในการคิดมากยิ่งขึ้น มีการใช้คณิตศาสตร์มาประยุกต์กับชีวิตประจำวัน และมีความเห็นเรื่องการเรียนคณิตศาสตร์ภายในโรงเรียนที่ต้องเชื่อมโยงกับงานต่างๆ ที่ใช้ในชีวิตประจำวันตามความหลากหลายของอาชีพ เช่น ช่างไม้ ชาวประมง อาชีพค้าขาย ซึ่งแต่ละอาชีพสามารถนำความรู้มาใช้ในการคำนวณและแก้ไขปัญหาในชีวิต งานชิ้นนี้ได้อ้างถึงสิ่งที่เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนนำเอาหลักการทางคณิตศาสตร์มาเชื่อมโยงกับประสบการณ์ในชีวิตจริง ผลการศึกษาเป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่าแบบทดสอบทางจินตนาการเป็นตัวแทนถึงโอกาสในการใช้สติปัญญาและอารมณ์ความรู้สึกที่เกิดขึ้นบ่อยครั้งจากการเรียนคณิตศาสตร์ นี่คือรูปแบบของการรวมกลุ่มกันที่จะให้คุณค่ากับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ การทำให้คณิตศาสตร์เป็นที่น่าสนใจต่อนักเรียนเป็นสิ่งที่มีความสำคัญต่อนักเรียน การศึกษาทำให้มีการสำรวจคำถามว่าอะไรที่ทำให้คณิตศาสตร์มีความหมายต่อนักเรียน และหาแนวทางที่ทำให้มีการพัฒนาต่อไป และทำให้อยู่ในรูปแบบที่สละสลวยที่จะช่วยให้การสอบ

เข้าถึงความท้าทายและคุณภาพของการทำงานร่วมกันของนักเรียนด้วยความแตกต่างของชนิดของบทเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้เห็นถึงความตั้งใจของรูปแบบของการรวมตัวในการศึกษาทางสติปัญญาและอารมณ์

งานวิจัยในประเทศ

สมบัติ แสงทองคำสุก (2545) ได้พัฒนารูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหาเพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนศึกษานารี วิทยาจำนวน 45 คน พบว่ารูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 โดยมีค่าประสิทธิภาพ 89.84/82.32 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้รูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลังได้รับการสอนสูงกว่าก่อนได้รับการสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ศศิธร แก้วรักษา (2547) ศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบซิปปาที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน เรื่องสถิติเบื้องต้นชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนละหานทรายรัชดาภิเษก จังหวัดบุรีรัมย์ จำนวน 45 คน ดำเนินการทดลองสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนแบบซิปปาใช้เวลาในการสอน 15 ชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่ากิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบซิปปาที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน เรื่องสถิติเบื้องต้น มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 โดยมีประสิทธิภาพ 82.11/83.59 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนแบบซิปปา ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน เรื่อง สถิติเบื้องต้นสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นงลักษณ์ แก้วมาลา (2547) ศึกษาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่องการแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนหนองแค” สรรกิจพิทย “ อำเภอหนองแค จังหวัดสระบุรี ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 ที่ได้จากการสุ่มอย่างง่าย จำนวน 39 คน ดำเนินการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่องการแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ ดำเนินการสอนด้วยตนเอง ใช้เวลาในการสอน 12 ชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ปีที่ 2 ภายหลังได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงเรื่อง การแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทาง สถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษางานวิจัยทั้งต่างประเทศและในประเทศ จะเห็นได้ว่าการจัดกิจกรรม การเรียนรู้ที่ส่งเสริมการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นสิ่งแวดล้อม หรือประสบการณ์ที่ผู้เรียนเคยพบมาก่อน มีผลต่อความเข้าใจของผู้เรียนที่จะเรียนรู้ได้อย่างชัดเจน ลึกซึ้ง จนเกิดการเรียนรู้ที่มีความหมาย สามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ได้จริง

กรอบความคิดในการวิจัย

