ISSN 3027-6357 (Print)
ISSN 3027-6365 (Online)

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 31 ฉบับที่ 6 (พฤศจิกายน-ธันวาคม 2566) หน้า [1-12]

สูตรสำหรับโคไซน์และไซน์ของเมทริกซ์ของพีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์ $SO(1, 3)$

Formulas for the Matrix Cosine and Sine of the Lie Algebra of Lorentz Matrix Lie Group $SO(1, 3)$

ปุณชญา พัฒนางกูร*, กรนันท์ แก้วคำไสย์, ณัฐวดี เจริญทอง, สิริพัฒนา ทิคำมา
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Poonchayar Patthanangkoor*, Koranan Kaewkumsai, Nattawadee Charoenthong, Siripatana Tikamma
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120
Received 18 January 2023; Received in revised 3 July 2023; Accepted 4 August 2023

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้เป็นการศึกษาสูตรโคไซน์ของเมทริกซ์ B และสูตรไซน์ของเมทริกซ์ B เมื่อ $B \in so(1, 3)$ โดยที่ $so(1, 3)$ คือพีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์

คำสำคัญ: โคไซน์ของเมทริกซ์; ไซน์ของเมทริกซ์; สูตรของซิลเวสเตอร์; พีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์

Abstract

In this paper the formulas of the matrix cosine of B and the matrix sine of B, where B is an element of $so(1, 3)$ which is the Lie algebra of Lorentz matrix Lie group, are derived.

Keywords: Matrix cosine; Matrix sine; Sylvester's formula; Lie algebra of Lorentz matrix Lie group

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

1. บทนำ (Introduction)

การคำนวณฟังก์ชันตรีโกณมิติของเมทริกซ์เป็นหนึ่งในปัญหาที่มีความท้าทายมากที่สุดในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข ฟังก์ชันตรีโกณมิติของเมทริกซ์ที่น่าสนใจคือ ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) และฟังก์ชันไซน์ (sine function)

สำหรับเมทริกซ์ A ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ (หรือเรียกว่าเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n) โคไซน์ของเมทริกซ์ A (the matrix cosine of A) และไซน์ของเมทริกซ์ A (the matrix sine of A) นิยามโดย

$$\cos(A) = I_n - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

และ

$$\sin(A) = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n

เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง $x''(t) + A^2 x(t) = 0$ เมื่อ $x(t)$ และ x_0 เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ และ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน เป็นที่ทราบกันดีว่า $\cos(At)$ และ $\sin(At)$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ ดังนั้นจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะต้องมีวิธีการเชิงตัวเลขที่แม่นยำในการคำนวณฟังก์ชันโคไซน์ของเมทริกซ์และฟังก์ชันไซน์ของเมทริกซ์

เนื่องจาก $\cos(A) = \dfrac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}$ และ $\sin(A) = \dfrac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n จึงเห็นได้ว่าเราสามารถศึกษาสูตรของ $\cos(A)$ และ $\sin(A)$ ได้โดยการศึกษาสูตรของ e^{iA} และ e^{-iA} นั่นเอง สำหรับการศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A (the exponential of A) ซึ่งนิยามโดย

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n และ $A^0 = I_n$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n นั้นมีมาอย่างต่อเนื่อง โดยในปี ค.ศ. 2001 T. Politi ได้ศึกษาเกี่ยวกับสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 และในปี ค.ศ. 2005 L. Kula, M. Karancan และ Y. Yayh ได้ศึกษาเกี่ยวกับสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4

ในการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลังนั้น สูตรของโรดรีก (Rodrigues formula) เป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณ e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือน (นั่นคือ $A^T = -A$) อันดับ 3 ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ -u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $u_1,u_2,u_3 \in \mathbb{R}$ แล้วสูตรของโรดรีก คือ $e^A = I_3 + \frac{\sin\alpha}{\alpha}A + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}A^2$ เมื่อ $\alpha = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^3}$ และ I_3 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 3

ต่อมาในปี ค.ศ. 2021 ได้มีการศึกษาการวางนัยทั่วไปของสูตรของโรดรีก โดย A. Chaiworn และ S. Promjan ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^B สำหรับ $B \in so(1,3)$ เมื่อ $so(1,3)$เป็นพีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์ (The Lie algebra of Lorentz matrix Lie group) กล่าวคือ

$$so(1,3) = \left\{B \in M_4(\mathbb{R}) \mid JBJ = -B^T\right\}$$

เมื่อ

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงทำการศึกษาสูตรโคไซน์ของเมทริกซ์ B และสูตรไซน์ของเมทริกซ์ B เมื่อ $B \in so(1,3)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้า $B \in so(1,3)$ แล้ว B จะอยู่ในรูป

$$B = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_4 & u_5 \\ u_2 & -u_4 & 0 & u_6 \\ u_3 & -u_5 & -u_6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{.....................(1.1)}$$

เมื่อ $u_i \in \mathbb{R}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., 6$ ดังนั้นตลอดบทความวิจัยนี้ จึงกำหนดให้ $B \in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1)

2. สูตรโคไซน์ของเมทริกซ์ B และสูตรไซน์ของเมทริกซ์ B เมื่อ $B \in so(1,3)$
(Formulas of the matrix cosine of B and the matrix sine of B, where $B \in so(1,3)$)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาสูตรโคไซน์ของเมทริกซ์ B และสูตรไซน์ของเมทริกซ์ B เมื่อ $B \in so(1,3)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้า $B\in so(1,3)$ แล้ว $JBJ = -B^T$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) ดังนั้น $J(iB)J = i(JBJ) = i(-B^T) = -(iB^T) = -(iB)^T$ และ $J(-iB)J = -i(JBJ) = -i(-B^T) = -(-iB^T) = -((-i)B)^T) = -((-i)B)^T = -(-iB)^T$

กำหนดให้ $q_1(\lambda)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ iB และ $q_2(\lambda)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $-iB$ กล่าวคือ

$$q_1(\lambda) = \det(iB - \lambda I_4) \text{ และ } q_2(\lambda) = \det(-iB - \lambda I_4)$$

เมื่อ $B \in so(1,3)$ และ I_4 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4
โดยจากการคำนวณจึงทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

<u>บทตั้ง 2.1</u> ถ้า $B \in so(1, 3)$ แล้ว $q_1(\lambda) = q_2(\lambda)$ นอกจากนี้ยังได้อีกว่า $q_1(\lambda) = q_1(-\lambda)$ และ $q_2(\lambda) = q_2(-\lambda)$
จากบทตั้ง 2.1 จะเห็นว่า พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ นั้นเหมือนกัน ดังบทตั้งต่อไปนี้

<u>บทตั้ง 2.2</u> ถ้า $B \in so(1, 3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ คือ

$$q(\lambda) = \lambda^4 + m_2\lambda^2 + m_0$$

เมื่อ $m_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2$ และ $m_0 = -(u_1u_6 - u_2u_5 + u_3u_4)^2$

จากบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า ถ้า $q(\lambda) = \lambda^4 + m_2\lambda^2 + m_0 = 0$ แล้ว λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าเฉพาะทั้ง 4 ค่าของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ นั้นจะอยู่ในรูปของ m_2 และ m_0 ดังนั้นตลอดบทความวิจัยฉบับนี้ จึงกำหนดค่าของ m_2 และ m_0 ดังต่อไปนี้

$$m_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2$$

และ

$$m_0 = -(u_1u_6 - u_2u_5 + u_3u_4)^2$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $m_2^2 - 4m_0 \geq 0$ และโดยอาศัยบทตั้ง 2.2 จึงทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

<u>บทตั้ง 2.3</u> กำหนดให้ $B \in so(1, 3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) จะได้ว่าค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 ของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ คือ $\lambda_1 = \beta,\ \lambda_2 = -\beta,\ \lambda_3 = i\gamma$ และ $\lambda_4 = -i\gamma$

เมื่อ $\beta = \sqrt{\dfrac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$ และ $\gamma = \sqrt{\dfrac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$

ต่อไปจะศึกษาสูตรของ e^{iB} และ e^{-iB} เมื่อ $B \in so(1, 3)$ โดยที่ iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด กล่าวคือ จะศึกษาในกรณีที่ $m_0 \neq 0$ นั่นเอง โดยการหาสูตรของ e^{iB} และ e^{-iB} นั้น เราสามารถใช้สูตรของซิลเวสเตอร์ (Sylvester’s formula) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (diagonalizable matrix) โดยมี $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันของ A แล้ว $f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i)A_i$ เมื่อ $f(A)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของเมทริกซ์ A และ A_i คือโฟรเบนิอุสโคแวเรียนต์ (Frobenius covariant) ของ A ที่กำหนดโดย

$$A_i = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}(A - \lambda_j I) \text{ สำหรับทุก } i = 1, \ldots, k$$

เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ ในที่นี้ $f(A) = e^A$ และถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 แตกต่างกันทั้งหมด (นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้) โดยสูตรของซิลเวสเตอร์ จึงได้ว่า

$$e^A = \sum_{i=1}^{4} e^{\lambda_i} A_i$$

เมื่อ A_i คือ โฟรเบนิอุสโคแวเรียนต์ของ A ที่กำหนดโดย $A_i = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{4} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}(A-\lambda_j I_4)$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ เมื่อ I_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

ดังนั้น
$$e^A = e^{\lambda_1}A_1 + e^{\lambda_2}A_2 + e^{\lambda_3}A_3 + e^{\lambda_4}A_4$$
$$= e^{\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}(A-\lambda_3 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_4}(A-\lambda_4 I_4)\right)$$
$$+ e^{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}(A-\lambda_3 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_4}(A-\lambda_4 I_4)\right)$$
$$+ e^{\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}(A-\lambda_1 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}(A-\lambda_2 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_4}(A-\lambda_4 I_4)\right)$$
$$+ e^{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}(A-\lambda_1 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_2}(A-\lambda_2 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_3}(A-\lambda_3 I_4)\right)$$

จะเห็นได้ว่า A_i อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ A สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ ซึ่งจะทำให้ e^A อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ A เช่นกัน ดังนั้นจึงสมมติให้ $e^A = aA^3 + bA^2 + cA + dI_4$ และถ้า x_i เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_i สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ (นั่นคือ $Ax_i = \lambda_i x_i$) สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ แล้วจะได้ว่า

$$e^A x_i = \left(aA^3 + bA^2 + cA + dI_4\right)x_i \quad = (a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d)x_i \qquad \text{สำหรับทุก } i = 1,2,3,4$$

เนื่องจาก $e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = I_4 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$ ดังนั้น สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ จะได้ว่า

$$e^A x_i = \left(I_4 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \cdots\right)x_i = \left(1 + \lambda_i + \frac{1}{2!}\lambda_i^2 + \frac{1}{3!}\lambda_i^3 + \cdots\right)x_i = e^{\lambda_i}x_i$$

จึงได้ว่า $e^{\lambda_i}x_i = e^A x_i = \left(a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d\right)x_i$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$

เพราะฉะนั้น $e^{\lambda_i} = a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ .... (*)

จากข้างต้นจะเห็นว่าในกรณีที่เมทริกซ์ iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะทั้ง 4 ค่าแตกต่างกันทั้งหมดนั้นโดยการใช้สูตรของซิลเวสเตอร์จะได้ว่า e^{iB} และ e^{-iB} อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ iB และ $-iB$ ตามลำดับ ดังนั้นจึงสมมติให้

$$e^{iB} = a_1(iB)^3 + b_1(iB)^2 + c_1(iB) + d_1I_4 = -ia_1B^3 - b_1B^2 + ic_1B + d_1I_4$$

และ
$$e^{-iB} = a_2(-iB)^3 + b_2(-iB)^2 + c_2(-iB) + d_2I_4 = ia_2B^3 - b_2B^2 - ic_2B + d_2I_4$$

เมื่อ I_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4 โดยสมการ (*) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_i} = a_1\lambda_i^3 + b_1\lambda_i^2 + c_1\lambda_i + d_1 \qquad \text{สำหรับทุก } i = 1,2,3,4$$

เมื่อ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ และ λ_4 เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันของเมทริกซ์ iB และโดยบทตั้ง 2.3 จะได้ว่า $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ และ λ_4 เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันของเมทริกซ์ $-iB$ เช่นกัน ดังนั้น

$$e^{\lambda_i}=a_2\lambda_i^3+b_2\lambda_i^2+c_2\lambda_i+d_2 \qquad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4$$

จึงทำให้ได้ว่า $a_1\lambda_i^3+b_1\lambda_i^2+c_1\lambda_i+d_1=a_2\lambda_i^3+b_2\lambda_i^2+c_2\lambda_i+d_2$

หรือ $(a_1-a_2)\lambda_i^3+(b_1-b_2)\lambda_i^2+(c_1-c_2)\lambda_i+(d_1-d_2)=0$ สำหรับทุก $i=1,2,3,4$

เนื่องจาก $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ และ λ_4 เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ โดยอาศัยบทตั้ง 2.3 จึงได้ว่า $\lambda_i\neq 0$ สำหรับทุก $i=1,2,3,4$ นอกจากนี้ยังได้อีกว่า $-\lambda_1=\lambda_2$ และ $-\lambda_3=\lambda_4$ ดังนั้น

$$(a_1-a_2)\lambda_1^3+(b_1-b_2)\lambda_1^2+(c_1-c_2)\lambda_1+(d_1-d_2)=-(a_1-a_2)\lambda_1^3+(b_1-b_2)\lambda_1^2\ -(c_1-c_2)\lambda_1+(d_1-d_2)$$

จึงได้ว่า $2(a_1-a_2)\lambda_1^3+2(c_1-c_2)\lambda_1=0$

นั่นคือ $(a_1-a_2)\lambda_1^2+(c_1-c_2)=0$ (เนื่องจาก $2\lambda_1\neq 0$)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $(a_1-a_2)\lambda_3^2+(c_1-c_2)=0$

ดังนั้น $(a_1-a_2)\lambda_1^2+(c_1-c_2)=(a_1-a_2)\lambda_3^2+(c_1-c_2)$

นั่นคือ $(a_1-a_2)\lambda_1^2=(a_1-a_2)\lambda_3^2$

เนื่องจาก $\lambda_1\neq\pm\lambda_3$ จึงได้ว่า $a_1-a_2=0$ นั่นคือ $a_1=a_2$

จากสมการ $(a_1-a_2)\lambda_1^2+(c_1-c_2)=0$ จะได้ว่า $c_1-c_2=0$ หรือ $c_1=c_2$

เนื่องจาก $(a_1-a_2)\lambda_1^3+(b_1-b_2)\lambda_1^2+(c_1-c_2)\lambda_1+(d_1-d_2)=0$

และ $(a_1-a_2)\lambda_3^3+(b_1-b_2)\lambda_3^2+(c_1-c_2)\lambda_3+(d_1-d_2)=0$

จึงได้ว่า $(b_1-b_2)\lambda_1^2+(d_1-d_2)=0$ และ $(b_1-b_2)\lambda_3^2+(d_1-d_2)=0$

ดังนั้น $(b_1-b_2)\lambda_1^2+(d_1-d_2)=(b_1-b_2)\lambda_3^2+(d_1-d_2)$ นั่นคือ $(b_1-b_2)\lambda_1^2=(b_1-b_2)\lambda_3^2$

เนื่องจาก $\lambda_1\neq\pm\lambda_3$ จึงได้ว่า $b_1-b_2=0$ นั่นคือ $b_1=b_2$

จากสมการ $(b_1-b_2)\lambda_1^2+(d_1-d_2)=0$ จะได้ว่า $d_1-d_2=0$ หรือ $d_1=d_2$

เพราะฉะนั้น e^{iB} และ e^{-iB} สามารถเขียนอยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ iB และ $-iB$ ตามลำดับ โดยที่สัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 3 ของ iB และ $-iB$ ดังกล่าวนั้นเท่ากัน จึงกำหนดให้ e^{iB} และ e^{-iB} สามารถเขียนได้ในรูป

$$e^{iB}=a(iB)^3+b(iB)^2+c(iB)+dI_4=-iaB^3-bB^2+icB+dI_4$$

และ
$$e^{-iB}=a(-iB)^3+b(-iB)^2+c(-iB)+dI_4=iaB^3-bB^2-icB+dI_4$$

นอกจากนี้ โดยสมการ (*) ยังได้อีกว่า

$$e^{\lambda_i}=a\lambda_i^3+b\lambda_i^2+c\lambda_i+d \qquad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4 \qquad \text{.....................} \ (2.1)$$

เมื่อ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของเมทริกซ์ iB และ $-iB$ ซึ่งจะนำไปสู่การพิสูจน์สูตรของ $\cos(B)$ และ $\sin(B)$ โดยที่

$$\cos(B) = \frac{e^{iB} + e^{-iB}}{2} = \frac{(-iaB^3 - bB^2 + icB + dI_4) + (iaB^3 - bB^2 - icB + dI_4)}{2} = -bB^2 + dI_4$$

และ

$$\sin(B) = \frac{e^{iB} - e^{-iB}}{2i} = \frac{(-iaB^3 - bB^2 + icB + dI_4) - (iaB^3 - bB^2 - icB + dI_4)}{2i} = -aB^3 + cB$$

เมื่อ $B \in so(1,3)$ โดยที่ iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด ทำให้ได้สูตรของ $\cos(B)$ และ $\sin(B)$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 2.4</u> กำหนดให้ $B \in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่ $m_0 \neq 0$ จะได้ว่า

$$\cos(B) = -bB^2 + dI_4 \quad \text{และ} \quad \sin(B) = -aB^3 + cB$$

เมื่อ

$$a = \frac{\gamma \sinh\beta - \beta \sin\gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}, \qquad b = \frac{\cosh\beta - \cos\gamma}{\beta^2 + \gamma^2},$$

$$c = \frac{\gamma^3 \sinh\beta + \beta^3 \sin\gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)} \quad \text{และ} \quad d = \frac{\gamma^2 \cosh\beta + \beta^2 \cos\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$$

โดยที่ I_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4, $\beta = \sqrt{\dfrac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$ และ $\gamma = \sqrt{\dfrac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $B \in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่ $m_0 \neq 0$
โดยบทตั้ง 2.3 จะได้ว่าค่าเฉพาะของ iB และ $-iB$ นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้

$$\lambda_1 = \beta,\ \lambda_2 = -\beta,\ \lambda_3 = i\gamma \quad \text{และ} \quad \lambda_4 = -i\gamma$$

เมื่อ $\beta = \sqrt{\dfrac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$ และ $\sqrt{\dfrac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$

เมื่อแทนค่า λ_i สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ ลงในสมการ (2.1) จะได้ว่า

$e^{\lambda_1} = e^{\beta} = a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d$ ....(1)

$e^{\lambda_2} = e^{-\beta} = a(-\beta)^3 + b(-\beta)^2 + c(-\beta) + d = -a\beta^3 + b\beta^2 - c\beta + d$ ....*(2)*

$e^{\lambda_3} = e^{i\gamma} = a(i\gamma)^3 + b(i\gamma)^2 + c(i\gamma) + d = -ia\gamma^3 - b\gamma^2 + ic\gamma + d$ ....*(3)*

$e^{\lambda_4} = e^{-i\gamma} = a(-i\gamma)^3 + b(-i\gamma)^2 + c(-i\gamma) + d = ia\gamma^3 - b\gamma^2 - ic\gamma + d$ ....*(4)*

โดยสูตรของออยเลอร์ที่ว่า $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ และ $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

จะได้ว่า $\cos\gamma + i\sin\gamma = -ia\gamma^3 - b\gamma^2 + ic\gamma + d$ ....(5)

และ $\cos\gamma - i\sin\gamma = ia\gamma^3 - b\gamma^2 - ic\gamma + d$ ....(6)

นำสมการ (1)+(2) จะได้ $e^{\beta} + e^{-\beta} = 2b\beta^2 + 2d$ นั่นคือ $\cosh\beta = \dfrac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = b\beta^2 + d$ ....(7)

นำสมการ (5)+(6) จะได้ $2\cos\gamma = -2b\gamma^2 + 2d$ นั่นคือ $\cos\gamma = -b\gamma^2 + d$ ....(8)

นำ γ^2 คูณสมการ (7) และนำ β^2 คูณสมการ (8) จะได้

$\gamma^2\cosh\beta = b\beta^2\gamma^2 + d\gamma^2$ ....(9)

และ $\beta^2\cos\gamma = -b\beta^2\gamma^2 + d\beta^2$ ....(10)

นำสมการ (9)+(10) จะได้ $\gamma^2\cosh\beta + \beta^2\cos\gamma = d(\beta^2 + \gamma^2)$ ดังนั้น $d = \dfrac{\gamma^2\cosh\beta + \beta^2\cos\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$

นำสมการ (7)-(8) จะได้ $\cosh\beta - \cos\gamma = b(\beta^2 + \gamma^2)$ ดังนั้น $b = \dfrac{\cosh\beta - \cos\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$

นำสมการ (1)-(2) จะได้ $e^{\beta} - e^{-\beta} = 2a\beta^3 + 2c\beta$ นั่นคือ $\sinh\beta = \dfrac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} = a\beta^3 + c\beta$ ....(11)

นำสมการ (5)-(6) จะได้ $2i\sin\gamma = -2ia\gamma^3 + 2ic\gamma$ นั่นคือ $i\sin\gamma = -ia\gamma^3 + ic\gamma$

นำ $(-i)$ คูณตลอดสมการ $i\sin\gamma = -ia\gamma^3 + ic\gamma$ จะได้สมการ $\sin\gamma = -a\gamma^3 + c\gamma$ ....(12)

นำ γ^3 คูณสมการ (11) และนำ β^3 คูณสมการ (12) จะได้

$\gamma^3\sin\beta = a\beta^3\gamma^3 + c\beta\gamma^3$ ....(13)

และ $\beta^3\sin\gamma = -a\beta^3\gamma^3 + c\beta^3\gamma$ ....(14)

นำสมการ (13)+(14) จะได้ $\gamma^3\sinh\beta + \beta^3\sin\gamma = c(\beta\gamma^3 + \beta^3\gamma)$ ดังนั้น $c = \dfrac{\gamma^3\sinh\beta + \beta^3\sin\gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}$

นำ γ คูณสมการ (11) และนำ β คูณสมการ (12) จะได้

$\gamma\sinh\beta = a\beta^3\gamma + c\beta\gamma$ ....(15)

และ $\beta\sin\gamma = -a\beta\gamma^3 + c\beta\gamma$ ....(16)

นำสมการ (15)-(16) จะได้ $\gamma\sinh\beta - \beta\sin\gamma = a(\beta^3\gamma + \beta\gamma^3)$ ดังนั้น $a = \dfrac{\gamma\sinh\beta - \beta\sin\gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}$

จึงสรุปได้ว่า $a = \dfrac{\gamma\sinh\beta - \beta\sin\gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}$, $b = \dfrac{\cosh\beta - \cos\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$,

$c = \dfrac{\gamma^3\sinh\beta + \beta^3\sin\gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}$ และ $d = \dfrac{\gamma^2\cosh\beta + \beta^2\cos\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$ $\square$

หมายเหตุ (1) เนื่องจาก $\beta=\sqrt{\dfrac{-m_2+\sqrt{m_2^2-4m_0}}{2}}$ และ $\gamma=\sqrt{\dfrac{m_2+\sqrt{m_2^2-4m_0}}{2}}$ โดยที่ $m_0\neq 0$ ดังนั้น $\beta>0,\gamma>0$ และ $\beta^2+\gamma^2=\left(\dfrac{-m_2+\sqrt{m_2^2-4m_0}}{2}\right)+\left(\dfrac{m_2+\sqrt{m_2^2-4m_0}}{2}\right)=\sqrt{m_2^2-4m_0}>0$

(2) จากทฤษฎีบท 2.4 ถ้า $m_2=0$ แล้วจะได้ว่า $\cos(B)=-bB^2+dI_4$ และ $\sin(B)=-aB^3+cB$ เมื่อ $a=\dfrac{\sinh\beta-\sin\beta}{2\beta^3}$, $b=\dfrac{\cosh\beta-\cos\beta}{2\beta^2}$, $c=\dfrac{\sinh\beta+\sin\beta}{2\beta}$ และ $d=\dfrac{\cosh\beta+\cos\beta}{2}$

โดยที่ $\beta=\sqrt{\dfrac{\sqrt{-4m_0}}{2}}$

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ $B\in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่ $m_2=0$ และ $m_0=0$ จะได้ว่า

$$\cos(B)=I_4-\frac{B^2}{2!} \quad \text{และ} \quad \sin(B)=B-\frac{B^3}{3!}$$

เมื่อ I_4 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

พิสูจน์ กำหนดให้ $B\in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่ $m_2=0$ และ $m_0=0$ จะได้ว่า พหุนามลักษณะเฉพาะของ iB และ $-iB$ คือ $q(\lambda)=\lambda^4$ ดังนั้น iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะเหมือนกันทั้งค่า 4 คือ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ โดยทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน (Cayley-Hamilton) จะได้ว่า iB และ $-iB$ สอดคล้องกับสมการลักษณะเฉพาะของ iB และ $-iB$ นั่นคือ $q(iB)=(iB-\lambda_1I_4)^4=(iB)^4=\overline{0}$ และ $q(-iB)=(-iB-\lambda_1I_4)^4=(-iB)^4=\overline{0}$ เมื่อ $\overline{0}$ คือเมทริกซ์ศูนย์อันดับ 4 ดังนั้น $(iB)^k=(-iB)^k=\overline{0}$ สำหรับทุก $k\geq 4$ นั่นคือ $B^4=\overline{0}$ จึงทำให้ได้ว่า $B^k=\overline{0}$ สำหรับทุก $k\geq 4$ ดังนั้น โดยบทนิยามของ $\cos(B)$ และ $\sin(B)$ จึงได้ว่า

$$\cos(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}B^{2n}=I_4-\frac{B^2}{2!}+\frac{B^4}{4!}-\frac{B^6}{6!}+\cdots=I_4-\frac{B^2}{2!}$$

และ

$$\sin(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}B^{2n+1}=B-\frac{B^3}{3!}+\frac{B^5}{5!}-\frac{B^7}{7!}+\cdots=B-\frac{B^3}{3!}$$

เมื่อ I_4 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4 □

ต่อไปจะพิจารณาหาสูตรของ $\cos(B)$ และ $\sin(B)$ เมื่อ B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และ iB กับ $-iB$ มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 2.6</u> กำหนดให้ $B \in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่ B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และ $m_2 \neq 0,\ m_0 = 0$ จะได้ว่า

$$\cos(B) = -bB^2 + I_4 \quad \text{และ} \quad \sin(B) = cB$$

โดยที่ (1) ถ้า $m_2 > 0$ แล้ว $b = \dfrac{1-\cos\gamma}{\gamma^2}$ และ $c = \dfrac{\sin\gamma}{\gamma}$ เมื่อ $\gamma = \sqrt{m_2}$

และ (2) ถ้า $m_2 < 0$ แล้ว $b = \dfrac{\cosh\beta - 1}{\beta^2}$ และ $c = \dfrac{\sinh\beta}{\beta}$ เมื่อ $\beta = \sqrt{-m_2}$

เมื่อ I_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $B \in so(1,3)$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่ B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และ $m_2 \neq 0,\ m_0 = 0$ จากบทตั้ง 2.3 จะเห็นได้ว่า

ในกรณีที่ $m_2 > 0$ จะได้ว่า iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า คือ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = i\gamma$ และ $\lambda_4 = -i\gamma$ เมื่อ $\gamma = \sqrt{m_2} > 0$ โดยสูตรของซิลเวสเตอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e^{iB} = {} & e^{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}(iB-\lambda_3 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_4}(iB-\lambda_4 I_4)\right) + e^{\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}(iB-\lambda_2 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_4}(iB-\lambda_4 I_4)\right) \\ & + e^{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_2}(iB-\lambda_2 I_4)\right)\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_3}(iB-\lambda_3 I_4)\right) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า e^{iB} อยู่ในรูปของพหุนามดีกรี 2 ของ iB ดังนั้นจึงจะคำนวณหา e^{iB} โดยสมมติให้ $e^{iB} = b(iB)^2 + c(iB) + dI_4$ และถ้า x_i เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_i สำหรับทุก $i = 2,3,4$ (นั่นคือ $(iB)x_i = \lambda_i x_i$ สำหรับทุก $i = 2,3,4$) แล้วจะได้ว่า

$$e^{iB}x_i = (b(iB)^2 + c(iB) + dI_4)x_i = b\lambda_i^2 x_i + c\,\lambda_i x_i + dx_i \qquad \text{สำหรับทุก } i = 2,3,4$$

นอกจากนี้ยังได้อีกว่า $e^{iB}x_i = e^{\lambda_i}x_i$ สำหรับทุก $i = 2,3,4$ จึงได้ว่า

$$e^{\lambda_i}x_i = e^{iB}x_i = b\lambda_i^2 x_i + c\lambda_i x_i + dx_i = (b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d)x_i \qquad \text{สำหรับทุก } i = 2,3,4$$

นั่นคือ
$$e^{\lambda_i} = b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d \qquad \text{สำหรับทุก } i = 2,3,4$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า e^{-iB} จะอยู่ในรูปของพหุนามดีกรี 2 ของ $-iB$ และเนื่องจาก iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะเหมือนกัน ดังนั้น $e^{-iB} = b(-iB)^2 + c(-iB) + dI_4$ และ $e^{\lambda_i} = b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$ สำหรับทุก $i = 2,3,4$ เช่นกัน

เนื่องจาก $e^{iB} = b(iB)^2 + c(iB) + dI_4 = -bB^2 + icB + dI_4$

และ $e^{-iB} = b(-iB)^2 + c(-iB) + dI_4 = -bB^2 - icB + dI_4$

ดังนั้น $\cos(B)=\dfrac{e^{iB}+e^{-iB}}{2}=-bB^2+dI_4$ และ $\sin(B)=\dfrac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i}=cB$

เมื่อแทนค่า λ_i ลงในสมการ $e^{\lambda_i}=b\lambda_i^2+c\lambda_i+d$ สำหรับทุก $i=2,3,4$ จะได้ว่า

$e^{\lambda_2}=e^0=b(0)^2+c(0)+d=d$ ....(17)

$e^{\lambda_3}=e^{i\gamma}=b(i\gamma)^2+c(i\gamma)+d=-b\gamma^2+ic\gamma+d$ ....(18)

$e^{\lambda_4}=e^{-i\gamma}=b(-i\gamma)^2+c(-i\gamma)+d=-b\gamma^2-ic\gamma+d$ ....(19)

โดยสูตรของออยเลอร์ที่ว่า $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ และ $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

จะได้ว่า $\cos\gamma+i\sin\gamma=-b\gamma^2+ic\gamma+d$ ....(20)

และ $\cos\gamma-i\sin\gamma=-b\gamma^2-ic\gamma+d$ ....(21)

จากสมการ (17) จะได้ว่า $d=1$

นำสมการ (20)+(21) จะได้ว่า $2\cos\gamma=-2b\gamma^2+2d$ นั่นคือ $\cos\gamma=-b\gamma^2+d=-b\gamma^2+1$ ดังนั้น $b=\dfrac{1-\cos\gamma}{\gamma^2}$

นำสมการ (20)-(21) จะได้ว่า $2i\sin\gamma=2ic\gamma$

จะได้สมการ $\sin\gamma=c\gamma$ ดังนั้น $c=\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}$

จึงสรุปได้ว่า $\cos(B)=-bB^2+I_4$ และ $\sin(B)=cB$ เมื่อ $b=\dfrac{1-\cos\gamma}{\gamma^2},\ c=\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}$

สำหรับกรณีที่ $m_2<0$ จะได้ว่า iB และ $-iB$ มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า คือ $\lambda_1=\beta,\ \lambda_2=-\beta$ และ $\lambda_3=\lambda_4=0$ เมื่อ $\beta=\sqrt{-m_2}>0$ ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์กรณีที่ $m_2>0$ จะได้ว่า e^{iB} และ e^{-iB} จะอยู่ในรูปพหุนามดีกรี 2 ของ iB และ $-iB$ ตามลำดับ ดังนั้นจึงสมมติให้ $e^{iB}=b(iB)^2+c(iB)+dI_4$ และ $e^{-iB}=b(-iB)^2+c(-iB)+dI_4$ ซึ่งได้ว่า $\cos(B)=\dfrac{e^{iB}+e^{-iB}}{2}=-bB^2+dI_4$ และ $\sin(B)=\dfrac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i}=cB$ เช่นกัน นอกจากนี้ยังได้อีกว่า $e^{\lambda_i}=b\lambda_i^2+c\lambda_i+d$ สำหรับทุก $i=1,2,3$

เมื่อแทนค่า λ_i สำหรับทุก $i=1,2,3$ ลงในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$e^{\lambda_1}=e^{\beta}=b(\beta)^2+c(\beta)+d=b\beta^2+c\beta+d$ ....(22)

$e^{\lambda_2}=e^{-\beta}=b(-\beta)^2+c(-\beta)+d=b\beta^2-c\beta+d$ ....(23)

$e^{\lambda_3}=e^0=b(0)^2+c(0)+d=d$ ....(24)

จากสมการ (24) จะได้ว่า $d=1$

นำสมการ (22)+(23) จะได้ $e^{\beta}+e^{-\beta}=2b\beta^2+2d$ นั่นคือ $\cosh\beta=\dfrac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}=b\beta^2+d=b\beta^2+1$

ดังนั้น $b=\dfrac{\cosh\beta-1}{\beta^2}$

นำสมการ (22)-(23) จะได้ $e^{\beta}-e^{-\beta}=2c\beta$ นั่นคือ $\sinh\beta=\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}=c\beta$ ดังนั้น $c=\frac{\sinh\beta}{\beta}$

จึงสรุปได้ว่า $\cos(B)=-bB^2+I_4$ และ $\sin(B)=cB$ เมื่อ $b=\frac{\cosh\beta-1}{\beta^2}$ และ $c=\frac{\sinh\beta}{\beta}$ □

3. References

[1] Chaiworn,A. and Promjan, S., 2021, Formulas for the Exponential Matrix of so(1,3), International Journal of Mathematics and Computer Science. 16(1): 423-427.

[2] Horn, R. A. and Johnson, C. R., 1986, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, England.

[3] Kula, L., Karancan, M. and Yayh, Y., 2005, Formulas for the Exponential of a Semi Skew-Symmetric Matrix of Order 4, Mathematical and Computational Applications. 10(1): 99-104.

[4] Politi, T., 2001, A Formula for the Exponential of a Real Skew-Symmetric Matrix of Order 4, BIT, Numeric Analysis. 41: 842-845.