UTK
ราชมงคล
กรุงเทพ

แคลคูลัส Calculus 1

ดร.วิกานดา สุภาสนันท์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ
อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำนำ

ตำราแคลคูลัส 1 (Calculus 1) เล่มนี้ ผู้เรียบเรียงจัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการสอน ซึ่งเนื้อหาเป็นส่วนหนึ่งของวิชาแคลคูลัส 1 รหัสวิชา 2-212-103 หมวดวิชาเฉพาะ กลุ่มพื้นฐานวิชาชีพ หลักสูตรระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ สำหรับนักศึกษาสาขาวิชาเคมี วิทยาการคอมพิวเตอร์ และวิทยาศาสตร์การอาหาร โดยให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา สำหรับเนื้อหาของตำราเล่มนี้ประกอบด้วย 6 บทเรียน ได้แก่ 1) ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง 2) อนุพันธ์ 3) การประยุกต์ของอนุพันธ์ 4) การปริพันธ์ 5) เทคนิคการหาปริพันธ์ และ 6) การประยุกต์ของปริพันธ์ ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษา และผู้ที่สนใจสามารถนำความรู้ไปใช้ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องและสามารถประยุกต์ใช้ในงานต่าง ๆ ได้

คุณูปการใด ๆ ที่ผู้ศึกษาจะได้รับจากตำราเล่มนี้ ผู้เขียนขอยกความดีทั้งหมดให้แก่ครูอาจารย์ที่ได้ให้การศึกษาประสิทธิ์ประสาทความรู้ ส่งเสริม รวมทั้งผู้ที่ให้การสนับสนุน เป็นกำลังใจในการทำงานตลอดมา หากพบข้อบกพร่องประการใด ผู้เรียบเรียงขอน้อมรับข้อบกพร่องและโปรดเสนอแนะมายังผู้เรียบเรียง จักขอบพระคุณอย่างยิ่ง

ดร.วิกานดา สุภาสนันท์

ธันวาคม 2564

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1 ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง บทที่
Function, Limit and Continuity 1

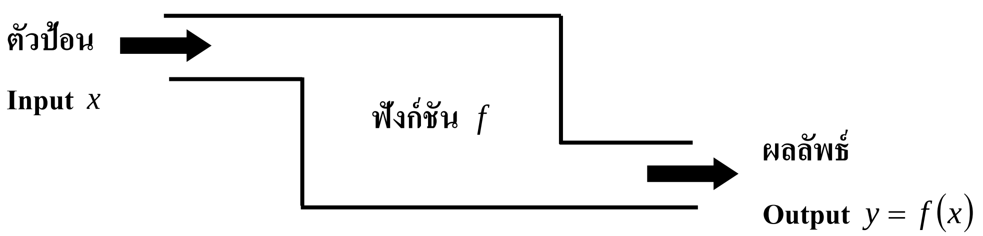
ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง เป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญของการศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การปริพันธ์ รวมทั้งการประยุกต์อื่น ๆ เพื่อให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. สามารถอธิบายความหมายของฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่องได้
2. สามารถหาค่าฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่องได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

1.1 ฟังก์ชัน (Function)

ฟังก์ชันเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรต้น (Independent variable) กับตัวแปรตาม (Dependent variable) กำหนดให้ f แทนฟังก์ชัน เมื่อ x เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับที่อยู่ในฟังก์ชัน f เขียนได้เป็น $f(x)$ อ่านว่า "ฟังก์ชัน f ของ x" หรือ "ฟังก์ชัน f ณ ที่ x" โดยเขียนในรูป $y=f(x)$ กล่าว คือ y แยกออกจาก x ได้อย่างชัดเจน จะมีตัวแปรแต่ละตัวที่อยู่ในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (Explicit function) โดยที่ตัวแปร x จะเป็นตัวแปรต้นในฟังก์ชัน $f(x)$ และ y จะเป็นตัวแปรตาม ดังรูปที่ 1.1 ถ้าป้อนตัวป้อน x (Input) 1 ค่า จะได้ผลลัพธ์ y (Output) 1 ค่า



รูปที่ 1.1 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.1.1 การหาค่าของฟังก์ชัน

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f ของ x แล้วสามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อกำหนด $y = f(x)$ ค่าของตัวแปร x จะเป็นตัวแปรป้อนเข้า ดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น x และตัวแปรตาม y โดยกำหนดให้ $y = f(x) = 2x - 1$

ตัวแปรต้น x	ตัวแปรตาม $y = f(x)$
x	$y = f(x) = 2x - 1$
$x = -2$	$y = f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$
$x = -1$	$y = f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$
$x = 0$	$y = f(0) = 2(0) - 1 = -1$
$x = 1$	$y = f(1) = 2(1) - 1 = 1$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(0)$
2) $f(-1)$
3) $f(a)$
4) $f(b^2)$

<u>วิธีทำ</u> 1) $f(0)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(0)$ โดยการแทนค่า $x = 0$

ดังนั้น $f(0) = 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

2) $f(-1)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ โดยการแทนค่า $x = -1$

ดังนั้น $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

3) $f(a)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(a)$ โดยการแทนค่า $x = a$

ดังนั้น $f(a) = a^2 + 3$

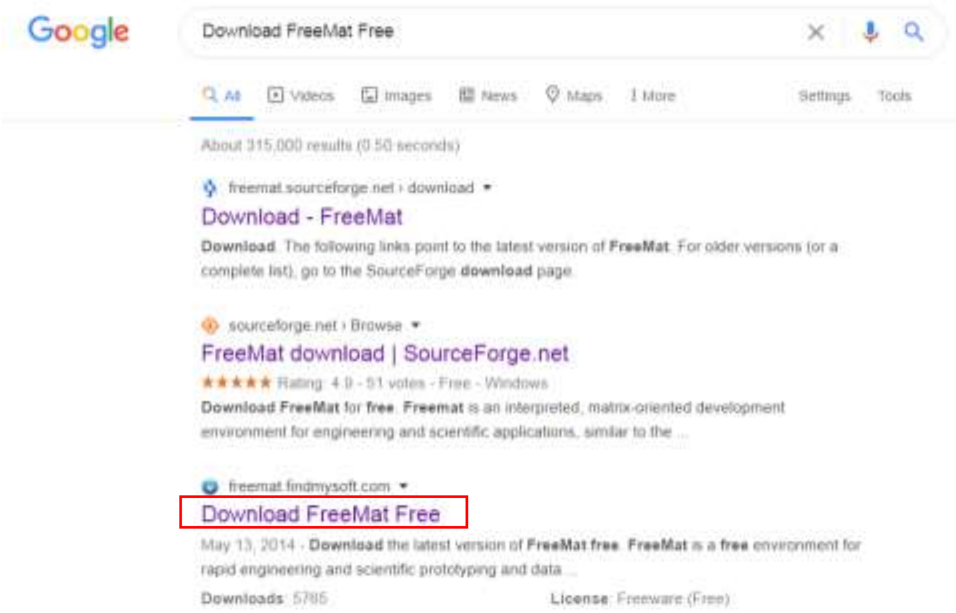
4) $f(b^2)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(b^2)$ โดยการแทนค่า $x = b^2$

ดังนั้น $f(b^2) = (b^2)^2 + 3 = b^4 + 3$

การคำนวณสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางด้านคณิตศาสตร์ (Programming Package for Mathematics) ซึ่งจะแนะนำให้เลือกโปรแกรมที่ไม่มีค่าใช้จ่ายในการติดตั้ง (Free Software Download) คือ โปรแกรม FreeMat เป็นโปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ในลักษณะของ Open-source และไม่มีค่าใช้จ่ายใด ๆ จึงเหมาะแก่การใช้งานสำหรับการศึกษาให้แก่นักศึกษาควบคู่กับการเรียนทางทฤษฎี สำหรับการแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมมีส่วนในการช่วยตรวจคำตอบได้อีกทางหนึ่ง โดยมีความสามารถที่โดดเด่นกว่าเครื่องคำนวณทางคณิตศาสตร์ธรรมดาหรือ Graphing Calculator โปรแกรมนี้ยังสามารถสร้างกราฟจากสมการทางคณิตศาสตร์ได้ในรูปแบบต่าง ๆ และกำหนดสีที่แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของเส้นกราฟได้อย่างชัดเจน ทั้ง 2 มิติ หรือ 3 มิติ โดยมีหลักการหรือโครงสร้างคล้ายกับโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาโดยมีลิขสิทธิ์หรือค่าใช้จ่ายจากการลงโปรแกรมอย่างถูกต้อง

ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรม FreeMat

1. เปิดหน้าต่างเข้าการค้นหากูเกิลเว็บไซต์ (Google website)
2. พิมพ์ Download FreeMat Free >> เลือก Download FreeMat Free ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 การค้นหาโปรแกรม FreeMat

ที่มา: https://www.google.com (2564)

3. เลือก Download ดังรูปที่ 1.3

รูปที่ 1.3 การดาวน์โหลด (Download) โปรแกรม FreeMat

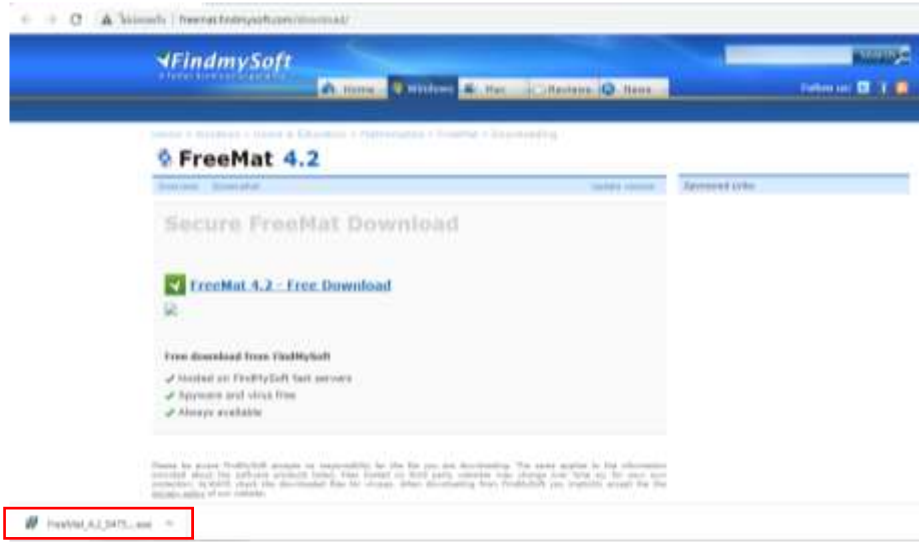
ที่มา: https://www.freemat.findmysoft.com (2564)

4. คลิก FreeMat 4.2 - Free Download ดังรูปที่ 1.4

รูปที่ 1.4 ขั้นตอนที่ 1 ของการดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat

ที่มา: https://www.freemat.findmysoft.com/download

5. รอดาวน์โหลดไฟล์สมบูรณ์ >> คลิก FreeMat_4.2_0475….exe เพื่อประมวลผลโปรแกรมในการติดตั้ง ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 ขั้นตอนที่ 2 ของการดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat

ที่มา: https://www.freemat.findmysoft.com/download

6. คลิก Run ดังรูปที่ 1.6

รูปที่ 1.6 ขั้นตอนการประมวลผลโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

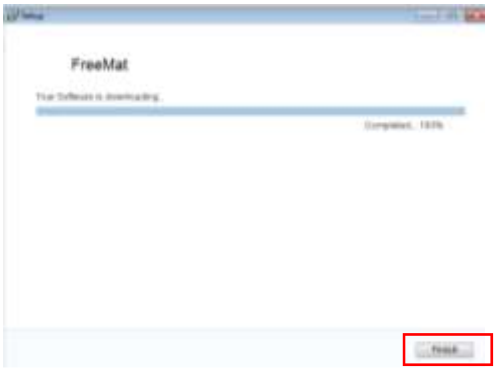
7. คลิก Next >>

รูปที่ 1.6 (ก)

รอประมวลผล

รูปที่ 1.6 (ข)

รอประมวลผล



รูปที่ 1.6 (ค)

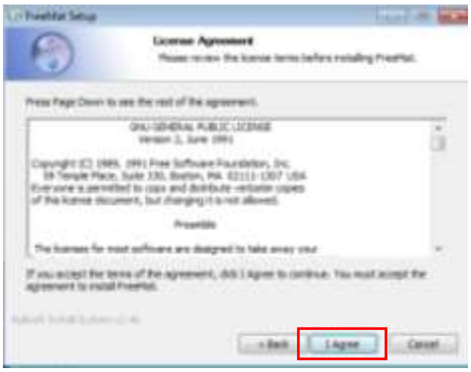
Install Now >>

รูปที่ 1.6 (ง)

คลิก Next >>

รูปที่ 1.6 (จ)

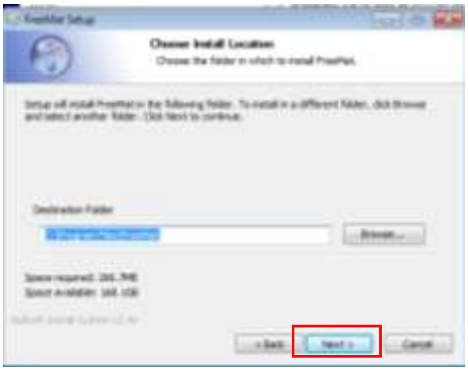
คลิก I Agree >>



รูปที่ 1.6 (ฉ)

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

คลิก Next >>

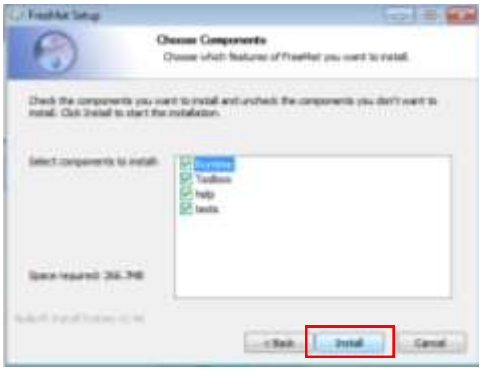


รูปที่ 1.6 (ช)

คลิก Next >>

รูปที่ 1.6 (ซ)

คลิก Install >>



รูปที่ 1.6 (ญ)

รอประมวลผล

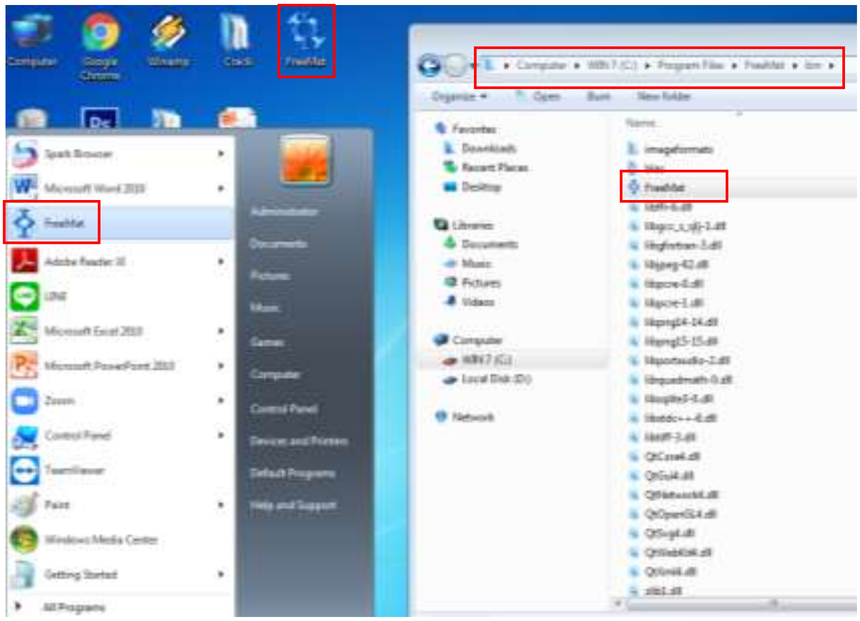
รูปที่ 1.6 (ฎ)

คลิก Finish

รูปที่ 1.6 (ฏ)

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

8. เมื่อทำการติดตั้งเสร็จสมบูรณ์ สามารถเปิดการใช้งานของ FreeMat ได้ ดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 การเปิดใช้งานของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

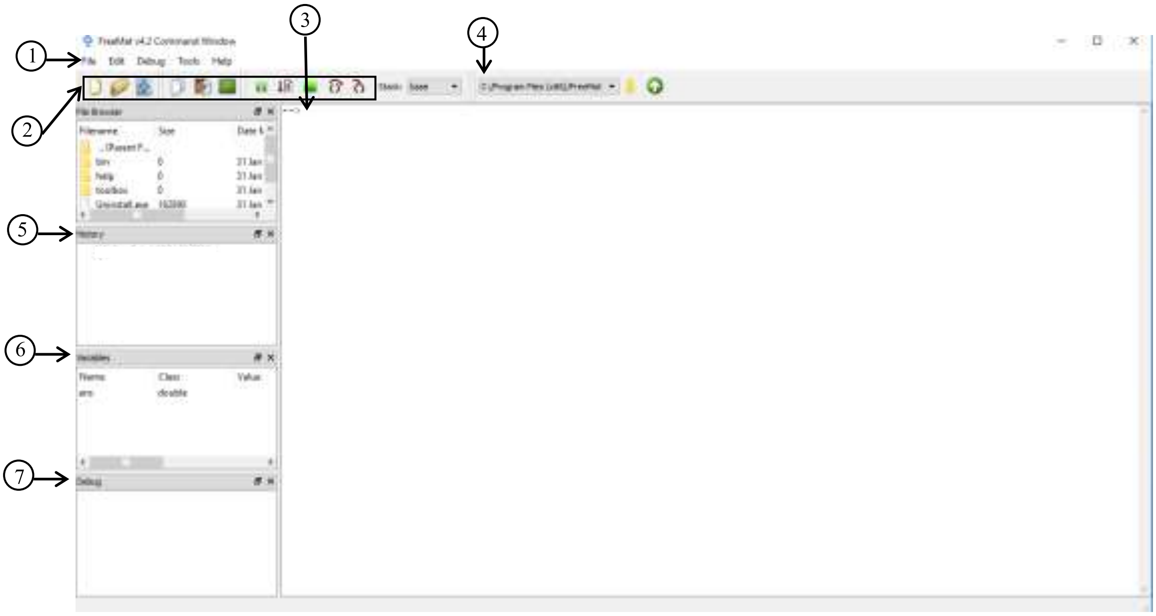
หรือสามารถพิมพ์ค้นหา FreeMat ได้ดังรูปที่ 1.7 (ก)

รูปที่ 1.7 (ก) พิมพ์ค้นหา FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ขั้นตอนการใช้โปรแกรม FreeMat

เมื่อเปิดเข้าสู่การทำงานของโปรแกรม หน้าต่างจอภาพแรกที่พบจะเป็นดังรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 การทำงานของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1. แสดงการเปิดเข้าใช้งานของโปรแกรม FreeMat
2. แถบเครื่องมือต่าง ๆ
3. แสดงสถานะใช้งาน และความพร้อมที่จะเตรียมรับคำสั่งต่าง ๆ เพื่อทำการคำนวณและประมวลผลของโปรแกรม
4. แสดงที่เก็บการทำงานของโปรแกรมปัจจุบัน
5. แสดงคำสั่งต่าง ๆ ที่สั่งให้โปรแกรมดำเนินการ
6. แสดงจำนวนของหน่วยความจำหรือขนาดของตัวแปรต่าง ๆ ของโปรแกรมปัจจุบัน
7. แสดงการประมวลผลของการเปิดโปรแกรมร่วมในการเปิดไฟล์ใหม่

จากตัวอย่าง 1.1 จงหาค่า $f(0)$ และ $f(-1)$ ของ $f(x)=x^2+3$ โดยใช้โปรแกรม FreeMat

ในการประยุกต์โจทย์ฟังก์ชันมาเขียนอยู่ในรูปแบบการใช้โปรแกรม สามารถกำหนดฟังก์ชันและค่าให้กับตัวแปรได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เปิดเข้าสู่การทำงานของโปรแกรม FreeMat

ขั้นตอนที่ 2 พิมพ์กำหนดประกาศตัวแปรต่าง ๆ

พิมพ์กำหนด x = [ ] กด Enter

พิมพ์กำหนด $y = x$^2+3 กด Enter

ขั้นตอนที่ 3 หาค่า $f(0)$ โดย

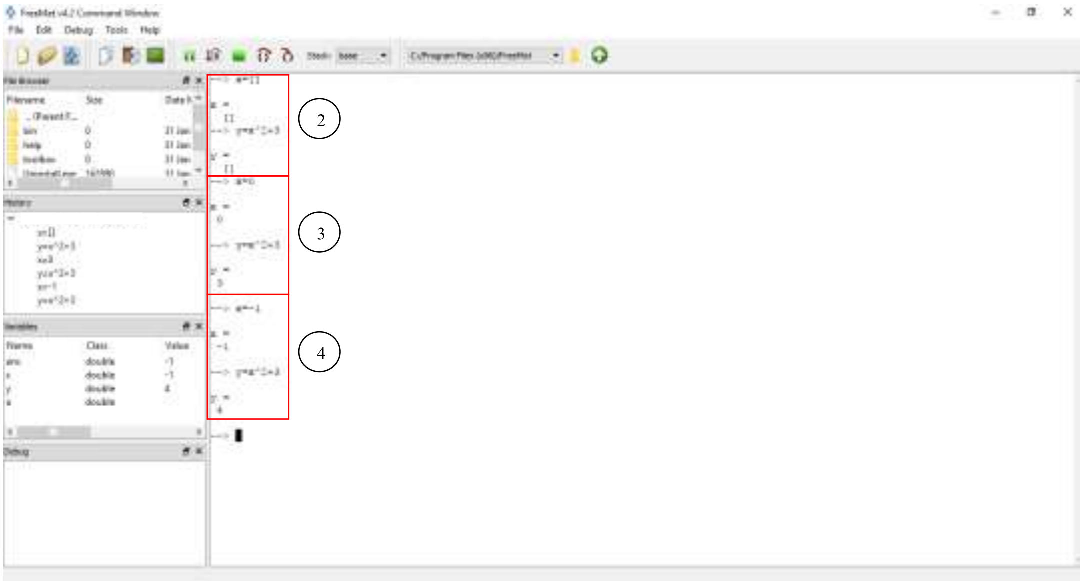
พิมพ์กำหนด $x = 0$ กด Enter

พิมพ์กำหนด $y = x$^2+3 กด Enter จะได้ค่า $y = 3$

ขั้นตอนที่ 4 หาค่า $f(-1)$ โดย

พิมพ์กำหนด x = -1 กด Enter

พิมพ์กำหนด $y = x$^2+3 กด Enter จะได้ค่า $y = 4$



รูปที่ 1.9 การพิมพ์กำหนดฟังก์ชันและค่าตัวแปรต่าง ๆ ของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.2 นักศึกษาสาขาวิชาเคมีคนหนึ่งต้องการแปลงหน่วยอุณหภูมิเคลวินเป็นองศาเซลเซียส

1) จงเขียนฟังก์ชันของอุณหภูมิองศาเซลเซียส

2) จงแปลงอุณหภูมิ 299 เคลวิน เป็นหน่วยองศาเซลเซียส

3) จงแปลงอุณหภูมิ 299 เคลวิน เป็นหน่วยองศาเซลเซียส โดยใช้โปรแกรม FreeMat

<u>วิธีทำ</u> 1) ให้ x แทนหน่วยอุณหภูมิเคลวิน

$f(x)$ แทนหน่วยอุณหภูมิองศาเซลเซียส

ดังนั้น ฟังก์ชันของอุณหภูมิองศาเซลเซียส คือ $f(x) = x - 273.15$

2) ถ้าอุณหภูมิ 299 เคลวิน แปลงเป็นหน่วยองศาเซลเซียส คือ

$f(299) = 299 - 273.15$

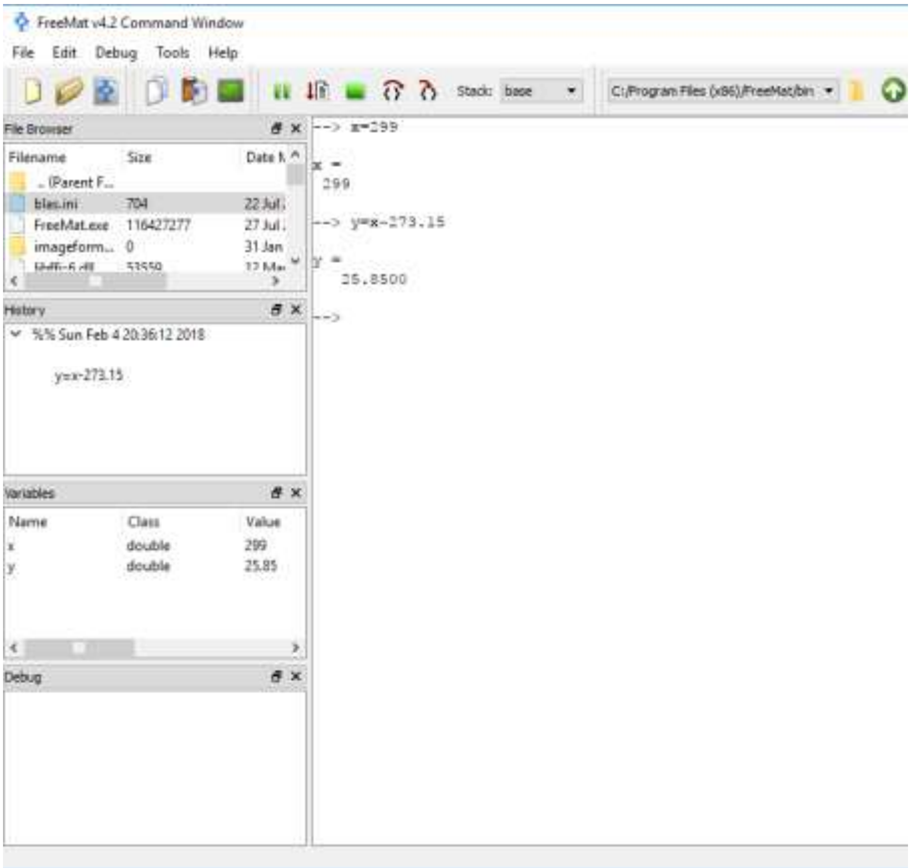
$= 25.85$ องศาเซลเซียส

ดังนั้น อุณหภูมิ 299 เคลวิน มีค่าเท่ากับ 25.85 องศาเซลเซียส

3) การแปลงอุณหภูมิ 299 เคลวิน เป็นหน่วยองศาเซลเซียส โดยใช้โปรแกรม FreeMat

พิมพ์กำหนด $x = 299$ กด Enter

พิมพ์กำหนด $y = x - 273.15$ กด Enter จะได้ค่า $y = 25.85$



รูปที่ 1.10 ค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ได้จากการประมวลผลของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.3 นักศึกษาสาขาวิชาคอมพิวเตอร์คนหนึ่ง เมื่อจบการศึกษาแล้วไปสมัครเข้าทำงานบริษัทแห่งหนึ่งเป็นพนักงานในบริษัทแห่งนี้ จะได้รับเงินค่าตอบแทนเดือนละ 20,000 บาท และได้รับส่วนแบ่งจากรายได้ในการเขียนโปรแกรมในแต่ละเดือน 12% ของรายได้ที่ทำให้แก่บริษัทในงานพิเศษ

1) จงเขียนฟังก์ชันแสดงรายได้ในแต่ละเดือน
2) ถ้าเดือนหนึ่งสามารถทำรายได้จากการเขียนโปรแกรมให้บริษัทเป็นจำนวน 100,000 บาท จะมีรายได้ทั้งหมดเท่าไร
3) ใช้โปรแกรม FreeMat คำนวณในข้อ 2)

<u>แนวคิด</u> $12\% = \dfrac{12}{100}$
$= 0.12$

<u>วิธีทำ</u>

1) ให้ x แทนรายได้จากการเขียนโปรแกรมของบริษัท
$f(x)$ แทนรายได้ทั้งหมดที่ได้รับจากบริษัท

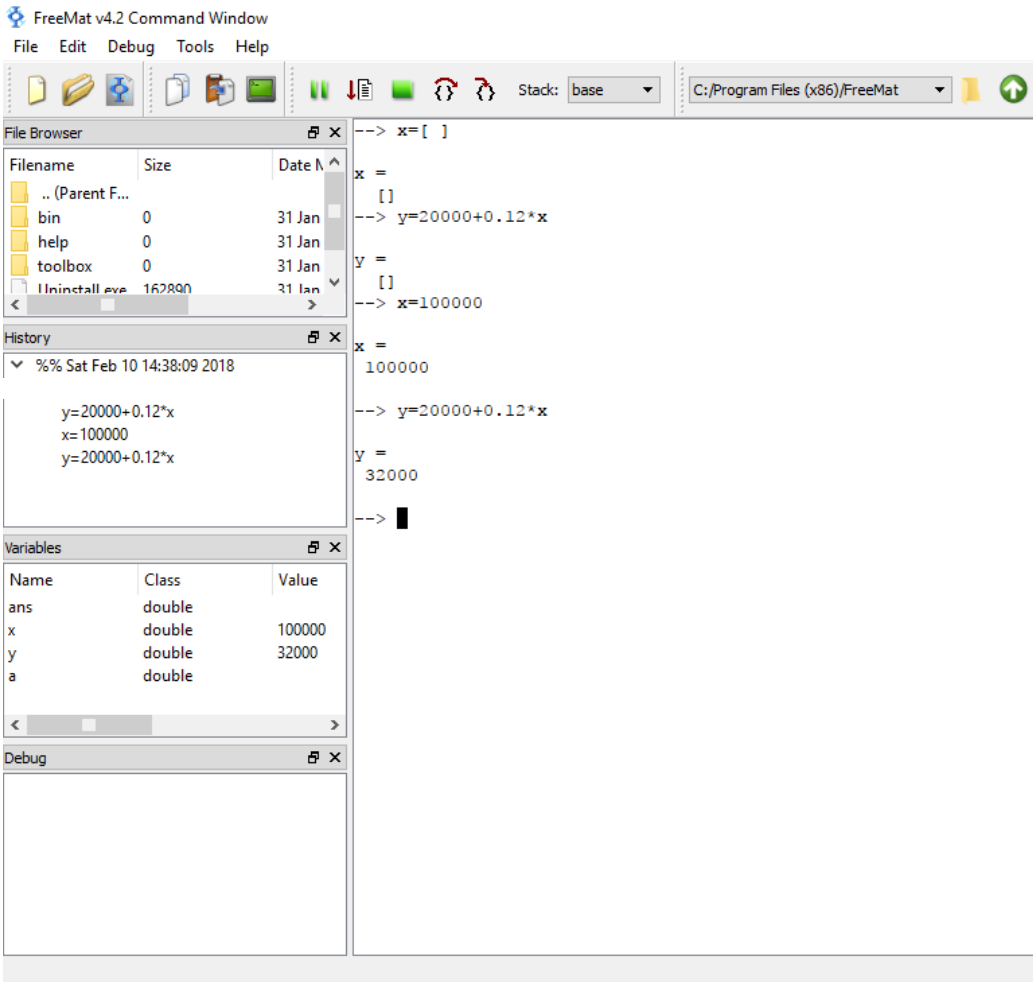
ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงรายได้ในแต่ละเดือน คือ $f(x) = 20,000 + 0.12x$

2) รายได้จากการเขียนโปรแกรมให้บริษัทในงานพิเศษเป็นจำนวน 100,000 บาท จะมีรายได้ทั้งหมด $f(100,000)$ ดังนี้

$$f(100,000) = 20,000 + 0.12(100,000)$$
$$= 20,000 + 12,000$$
$$= 32,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น จะมีรายได้ทั้งหมด 32,000 บาท

3) ใช้โปรแกรม FreeMat คำนวณในข้อ 2)
พิมพ์กำหนดประกาศตัวแปรต้น x = [ ] กด Enter
พิมพ์กำหนด y = 20,000 + 0.12 x กด Enter
พิมพ์ค่า x = 100,000 กด Enter จะได้ค่า y = 32,000



รูปที่ 1.11 โปรแกรม FreeMat ในการคำนวณ $f(x)=20{,}000+0.12x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.1.2 ชนิดของฟังก์ชัน (Type of function)

1) ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในพจน์ของตัวแปรอิสระ อาจมีพจน์เดียวหรือหลายพจน์ บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง และกรณฑ์ ฟังก์ชันพีชคณิตมีดังนี้

1.1) ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) เป็นฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n$ โดยที่ $C_1,C_2\ldots,C_{n-2},C_{n-1},C_n$ เป็นจำนวนจริง และ $n\in I^+$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า "ฟังก์ชันพหุนามกำลัง n" ได้แก่ฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1.1) ฟังก์ชันคงตัว (Constant function) คือ ฟังก์ชันพหุนามกำลัง 0 มีรูปฟังก์ชันเป็น $f(x)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เช่น $f(x)=-2$, $f(x)=3$ เป็นต้น

1.1.2) ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) คือ ฟังก์ชันพหุนามกำลัง 1 มีรูปฟังก์ชันเป็น $f(x)=ax+b$ เมื่อ a,b เป็นค่าคงตัว เช่น $f(x)=6x-5$, $f(x)=5-2x$ เป็นต้น

1.1.3) ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) คือ ฟังก์ชันพหุนามกำลัง 2 มีรูปฟังก์ชันเป็น $f(x)=ax^2+bx+c$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว เช่น $f(x)=4x^2+8x-9$

1.2) ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เช่น $\frac{3x+2}{x^2-2x-3}$ และ $\frac{x-1}{-5x+3}$ เป็นต้น

2) ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental function) คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น

2.1) ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=a^x$ เมื่อ $x\in R, a\in R^+$ และ $a\neq 1$ เช่น $f(x)=3^{2x}$, $h(x)=e^{4x-3}$ เป็นต้น

2.2) ฟังก์ชันลอกการิทึม (Logarithm function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=\log_a x$ เมื่อ $x\in R, a\in R^+$ และ $a\neq 1$ เช่น $f(x)=\log_2 5,\ g(x)=\log 8$ เป็นต้น

1.2 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of function)

เป็นการนำฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป สามารถนำมาบวก ลบ คูณ หรือหารกันได้ โดยทำให้ได้ฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

3) $(f\,g)(x)=f(x)g(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x)\neq 0$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $f(x)=x+2$ และ $g(x)=3x-1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f+g)(x)$

2) $(f-g)(x)$

3) $(f\,g)(x)$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

<u>วิธีทำ</u>

1)
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &=(x+2)+(3x-1)\\ &=x+2+3x-1\\ &=4x+1\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ &=(x+2)-(3x-1)\\ &=x+2-3x+1\\ &=-2x+3\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}(f\,g)(x) &= f(x)g(x)\\ &=(x+2)(3x-1)\\ &=3x^2-x+6x-2\\ &=3x^2+5x-2\end{aligned}$$

คูณกระจาย

$(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2$

4)
$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad g(x)\neq 0\\ &=\frac{x+2}{3x-1} \quad ; \quad 3x-1\neq 0\end{aligned}$$

โดยตัวส่วนต้องมีค่าไม่เท่ากับศูนย์

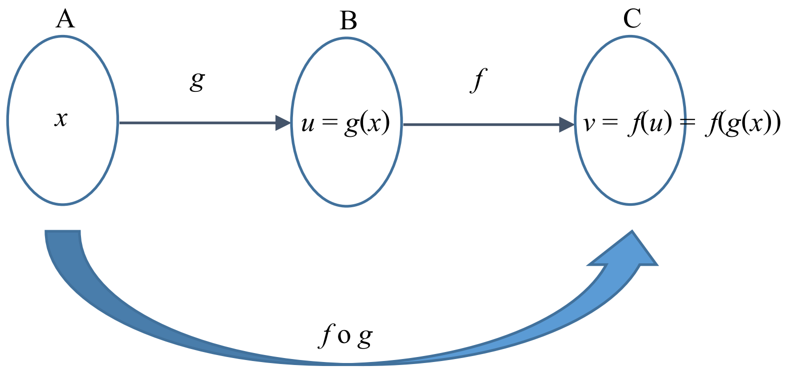
$3x-1\neq 0$

$3x\neq 1$

$x\neq \dfrac{1}{3}$

1.3 ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $v = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบของ $f(u)$ และ $g(x)$ เขียนแทนด้วย $(f \circ g)(x)$ กำหนดให้เป็น $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



รูปที่ 1.12 รูปแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ถ้า $g : A \rightarrow B$ หมายถึง ให้ g เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไป B โดยที่ $u = g(x)$

ถ้า $f : B \rightarrow C$ หมายถึง ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต B ไป C โดยที่ $v = f(u)$

จะได้ $f \circ g : A \rightarrow C$ โดยที่ $v = f(g(x))$ ดังนั้น $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ และ $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $f(x) = 4x^2 - 3$ และ $g(x) = x + 1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(x)$
2) $(g \circ f)(x)$
3) $(f \circ f)(x)$
4) $(g \circ g)(x)$

<u>วิธีทำ</u> 1) $(f \circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= f(g(x)) \\
&= f(x+1) \\
&= 4(x+1)^2 - 3 \\
&= 4(x^2 + 2x + 1) - 3 \\
&= 4x^2 + 8x + 4 - 3 \\
&= 4x^2 + 8x + 1
\end{aligned}
$$

แทน $g(x) = x + 1$

$\boxed{\text{จาก } f(x) = 4x^2 - 3}$

แทน $x = x + 1$

$$\boxed{\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x+1)(x+1) \\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}}$$

1) $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ แทน $f(x)=4x^2-3$

$= g(4x^2-3)$ $\boxed{\text{จาก } g(x) = x+1}$

$= (4x^2-3)+1$ แทน $x = 4x^2-3$

$= 4x^2-3+1$

$= 4x^2-2$

2) $(f\circ f)(x) = f(f(x))$ แทน $f(x) = 4x^2-3$

$= f(4x^2-3)$ $\boxed{\text{จาก } f(x) = 4x^2-3}$

$= 4(4x^2-3)^2-3$ แทน $x = 4x^2-3$

$= 4(16x^4-24x^2+9)-3$

$= 64x^4-96x^2+36-3$

$= 64x^4-96x^2+33$

$$\boxed{\begin{aligned}(4x^2-3)^2 &= (4x^2-3)(4x^2-3)\\ &= 16x^4-12x^2-12x^2+9\\ &= 16x^4-24x^2+9\end{aligned}}$$

3) $(g\circ g)(x) = g(g(x))$ แทน $g(x)=x+1$

$= g(x+1)$ จาก $g(x) = x+1$

$= (x+1)+1$ แทน $x = x+1$

$= x+1+1$

$= x+2$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $f(x)=e^x$ และ $g(x)=x-1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f\circ g)(x)$

2) $(g\circ f)(x)$

3) $(f\circ g)(1)$

4) $(g\circ f)(0)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(x-1)$

$= e^{x-1}$

2) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(e^x)$

$= e^x - 1$

3) $(f \circ g)(1) = f(g(1))$

$= f(1-1)$

$= f(0)$

$= e^0$

$= 1$

4) $(g \circ f)(0) = g(f(0))$

$= g(e^0)$

$= g(1)$

$= 1-1$

$= 0$

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \\ 1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ และ $g(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(-2)$

2) $(g \circ f)(0)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f \circ g)(-2) = f(g(-2))$

$= f\left(\dfrac{(-2)^2}{2-(-2)}\right)$

$= f\left(\dfrac{4}{2+2}\right)$

$= f\left(\dfrac{4}{4}\right)$

$= f(1)$

$= 1$

2) $(g \circ f)(0) = g(f(0))$

$= g(1)$

$= \dfrac{1^2}{2-1}$

$= \dfrac{1}{1}$

$= 1$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $f(x) = 2\sin x$ และ $g(x) = \ln x$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(x)$
2) $(f \circ g)(1)$
3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(\ln x)$

$= 2\sin(\ln x)$

2) $(f \circ g)(1) = 2\sin(\ln 1)$

$= 2(\sin 0)$

$= 2(0)$

$= 0$

3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$= 1$

1.4 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limits of function)

ค่าลิมิตของฟังก์ชันจะมีความแตกต่างค่าของฟังก์ชัน เนื่องจากค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x=a$ จะหมายถึงว่า $f(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด แต่ค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น ต้องการที่พิจารณาหาค่าของฟังก์ชัน f ว่ามีค่าเท่าใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a

1.4.1 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ *x* เข้าใกล้ *a* $(x \to a)$

การพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=x^2+1$ สำหรับค่า x ต่าง ๆ ที่มีค่าเข้าใกล้ $a=3$ แบ่งเป็นได้ 2 กรณี ดังตารางต่อไปนี้

1. ถ้า x เข้าใกล้ $a=3$ ทางซ้าย สามารถเขียนแทนด้วย $x \to 3^-$ (ค่า x ที่ใช้ มีค่าน้อยกว่า 3)

ตารางที่ 1.2 ตารางแสดง x เข้าใกล้ $a=3$ ทางซ้าย

$x<3$	2	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\Rightarrow$ 3
$f(x)=x^2+1$	5	7.25	9.41	9.9401	9.994001	9.99940001	$\Rightarrow$ 10

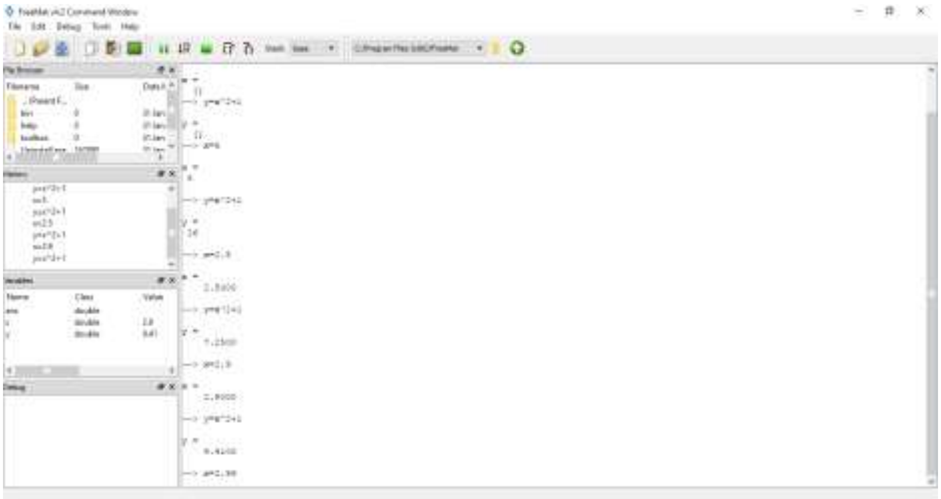
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้าย ($x<3$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า 10 คือ

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(x^2+1\right) = 10$$

$\lim_{x\to 3^-}\left(x^2+1\right)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน x^2+1 โดยที่ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย

<u>ข้อสังเกต</u> เครื่องหมาย - ที่อยู่ด้านบนของ 3 บ่งบอกถึงการเข้าใกล้จากทางด้านซ้ายด้านเดียว และสามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.13 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim\limits_{x \to 3^-} \left(x^2 + 1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. ถ้า x เข้าใกล้ $a = 3$ ทางขวา สามารถเขียนแทนด้วย $x \to 3^+$ (ค่า x ที่ใช้ มีค่ามากกว่า 3)

ตารางที่ 1.3 ตารางแสดง x เข้าใกล้ $a = 3$ ทางขวา

$x > 3$	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3.0001	$\Rightarrow$ 3
$f(x) = x^2 + 1$	17	13.25	10.61	10.0601	10.006	10.0006	$\Rightarrow$ 10

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

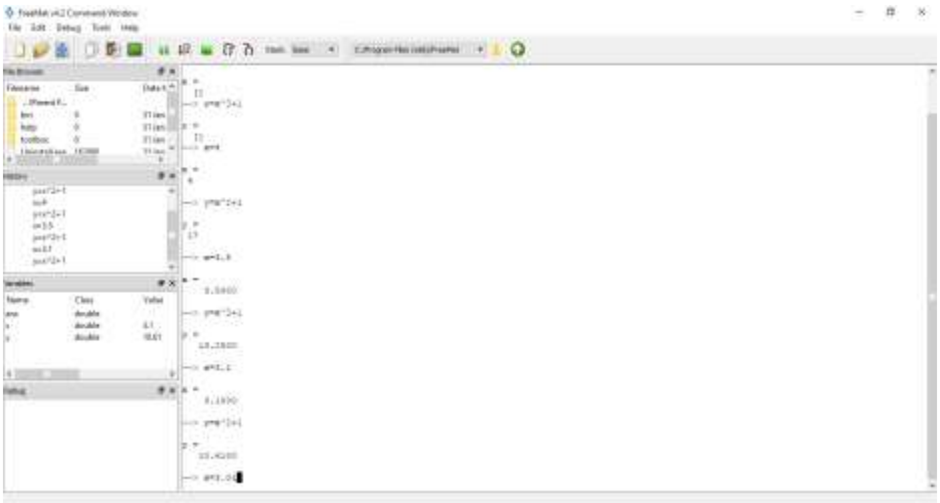
จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวา ($x > 3$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า 10 คือ

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(x^2 + 1\right) = 10$$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \left(x^2 + 1\right)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน x^2+1 โดยที่ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา

<u>ข้อสังเกต</u> เครื่องหมาย + ที่อยู่ด้านบนของ 3 บ่งบอกถึงการเข้าใกล้จากทางด้านขวาด้านเดียว

และสามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.14 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 3^+}\left(x^2+1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

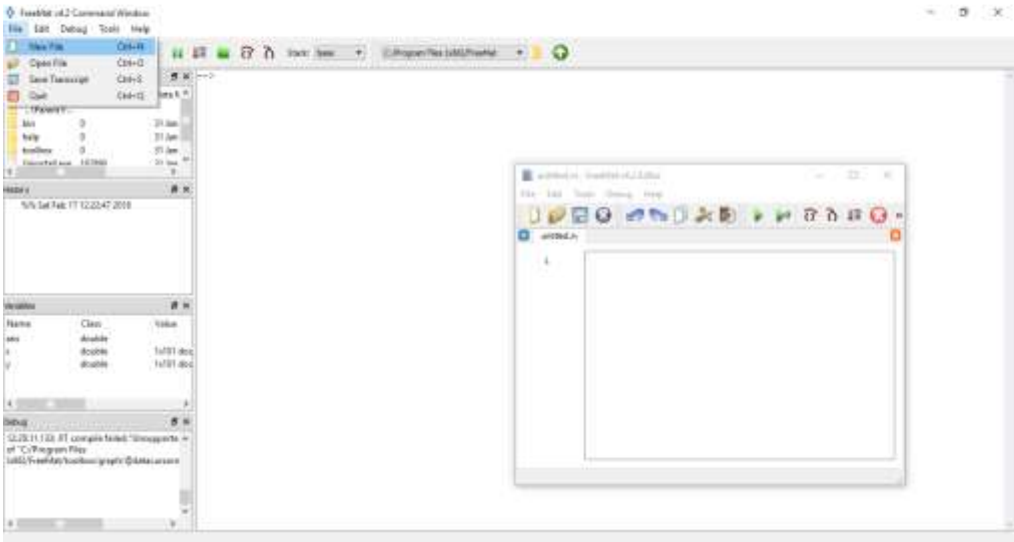
จากภาพทั้งสอง จะเห็นได้ว่า เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 3 (จากสองด้าน ทั้งซ้ายหรือขวา) ค่าของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ มีค่าเข้าใกล้ 10 ดังนั้นจะได้ว่า

ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ มีค่าเท่ากับ 10 เมื่อ x เข้าใกล้ 3 สามารถเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+1\right)=10$$

หรือสามารถพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ได้จากการสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat ตามขั้นตอนดังนี้

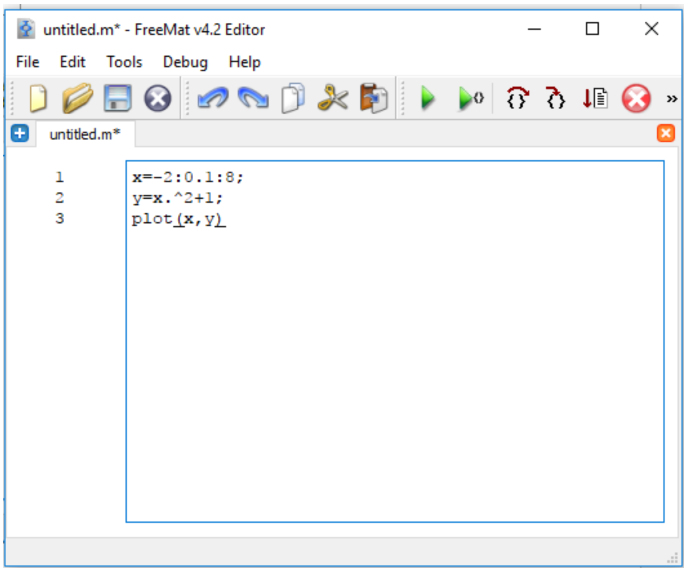
คลิกเลือก File >> New File >> จะปรากฏจอหน้าต่างใหม่ ดังรูปที่ 1.15



รูปที่ 1.15 การสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

และพิมพ์รายละเอียดการสร้างกราฟลงในหน้าต่างใหม่ของโปรแกรม ดังรูป



รูปที่ 1.16 การพิมพ์กำหนดเพื่อสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat

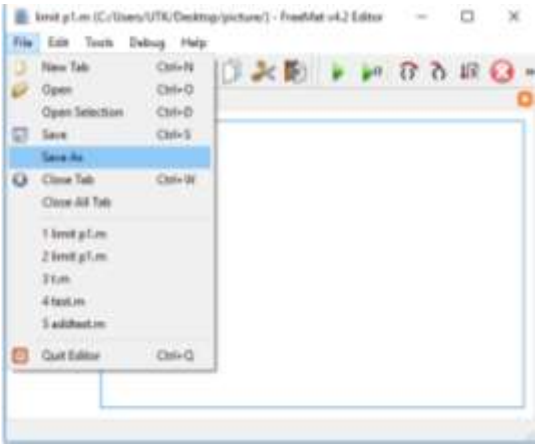
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>บรรทัดที่ 1</u> หมายถึง ให้สร้างกราฟในแนวแกน x ที่มีค่าตั้งแต่ -2 ถึง 8

<u>บรรทัดที่ 2</u> หมายถึง ฟังก์ชันที่ต้องการสร้างกราฟ

<u>บรรทัดที่ 3</u> หมายถึง คำสั่งสร้างกราฟในแนวแกน x และ y ในรูปของ 2 มิติ

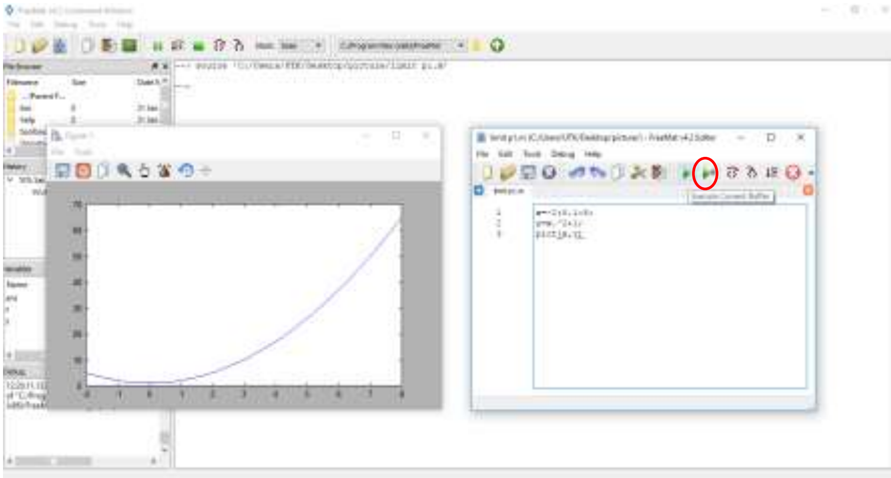
หลังจากนั้นบันทึกไฟล์และตั้งชื่อพร้อมทั้งจัดเก็บในแหล่งที่เราต้องการ ดังรูป



รูปที่ 1.17 การบันทึกไฟล์กราฟของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

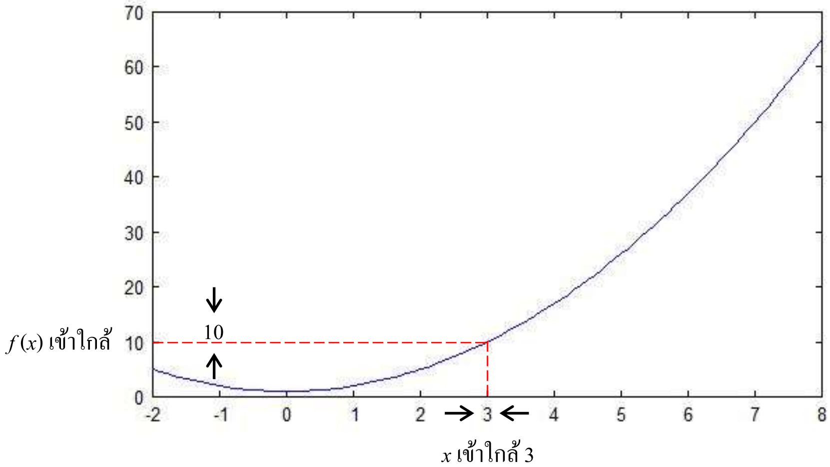
เมื่อทำการบันทึกไฟล์แล้วเลือกใช้คำสั่ง Execute Current Buffer ในการสร้างกราฟดังรูป



รูปที่ 1.18 การประมวลผลกราฟของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

การพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 จากรูป



รูปที่ 1.19 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 3}(x^2+1)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป $\lim_{x\to 3^-} f(x)=10$ และ $\lim_{x\to 3^+} f(x)=10$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3} f(x)=10$ หรือ $\lim_{x\to 3}(x^2+1)=10$

และโดยทั่วไปจะนิยามลิมิตของฟังก์ชัน ดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเท่ากับจำนวนจริง L โดยที่ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ แล้วจะเรียก L ว่าเป็นลิมิตของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ โดย x เข้าใกล้ a จากทั้ง 2 ด้าน (ซ้ายและขวา) โดยที่ $x \neq a$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L}$$

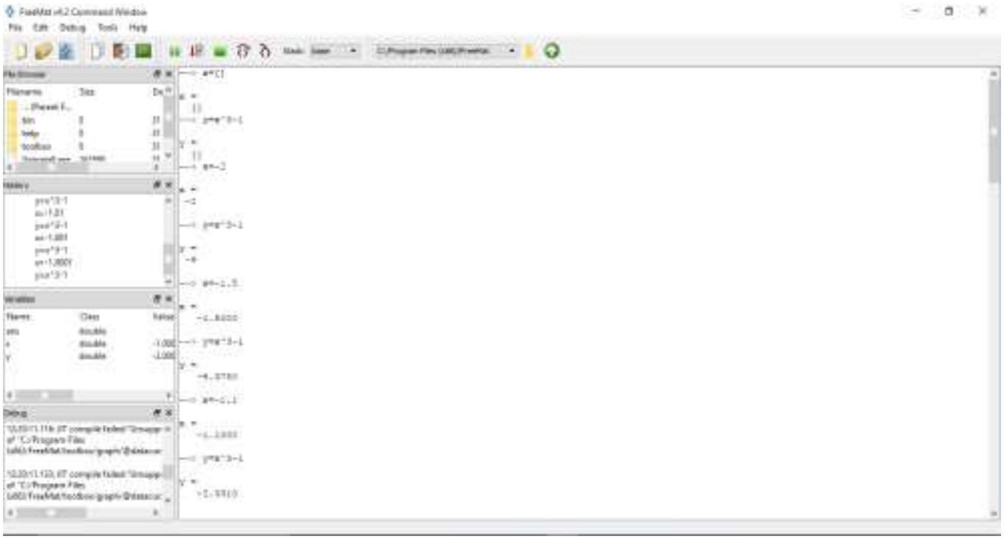
ถ้าลิมิตทางด้านซ้ายหรือด้านขวาหาค่าได้ แต่มีค่าไม่เท่ากัน หรือหาค่าไม่ได้ จะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีค่าลิมิต หรือหาค่าไม่ได้ เมื่อ x เข้าใกล้ a

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -1}(x^3-1)$ พร้อมทั้งสร้างกราฟจากโปรแกรม FreeMat

<u>วิธีทำ</u> 1. ถ้า x เข้าใกล้ $a = -1$ ทางซ้าย สามารถเขียนแทนด้วย $x \to -1^-$ (ค่า x ที่ใช้มีค่าน้อยกว่า -1)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(x^3-1) = -2$$

$\lim_{x\to -1^-}(x^3-1)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน (x^3-1) โดยที่ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย สามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.20 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to -1^-}(x^3-1)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ได้ค่าจากการคำนวณโปรแกรม FreeMat ดังตาราง

ตารางที่ 1.4 ตารางแสดง x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย

$x < -1$	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	$\Rightarrow$ -1
$f(x) = x^3 - 1$	-9	-4.375	-2.331	-2.0303	-2.003	-2.0003	$\Rightarrow$ -2

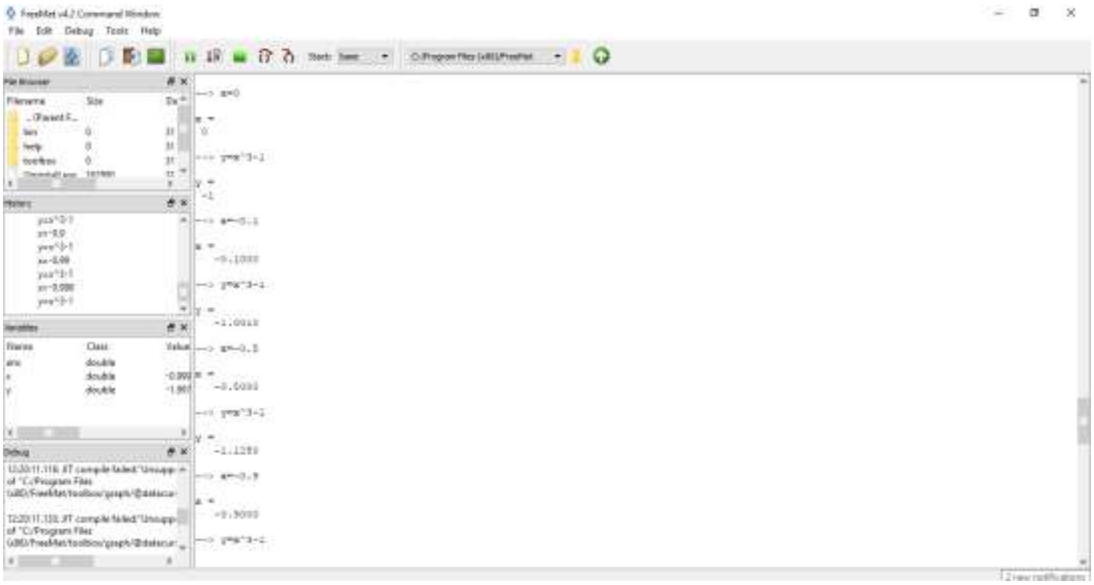
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ -1 ทางซ้าย ($x < -1$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า -2

2. ถ้า x เข้าใกล้ a = -1 ทางขวา สามารถเขียนแทนด้วย $x \to -1^{+}$ (ค่า x ที่ใช้มีค่ามากกว่า -1)

$$\lim_{x\to -1^{+}} f(x) = \lim_{x\to -1^{+}} (x^3-1) = -2$$

$\lim_{x\to -1^{+}} (x^3-1)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน (x^3-1) โดยที่ x เข้าใกล้ -1 ทางขวา สามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.21 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to -1^{+}} (x^3-1)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

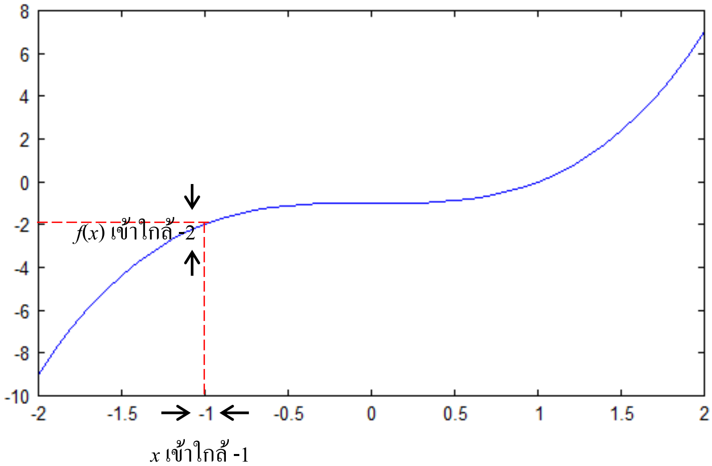
ได้ค่าจากการคำนวณโปรแกรม FreeMat ดังตาราง

ตารางที่ 1.5 ตารางแสดง x เข้าใกล้ -1 ทางขวา

$x > -1$	0	-0.1	-0.5	-0.9	-0.99	-0.999	$\Rightarrow$ -1
$f(x) = x^3 - 1$	-1	-1.001	-1.125	-1.729	-1.9703	-1.997	$\Rightarrow$ -2

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ -1 ทางขวา (x > -1) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า -2



รูปที่ 1.22 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to -1} f\left(x^3-1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2$ และ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -2$

ดังนั้น $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$ หรือ $\lim_{x\to -1} f\left(x^3-1\right) = -2$

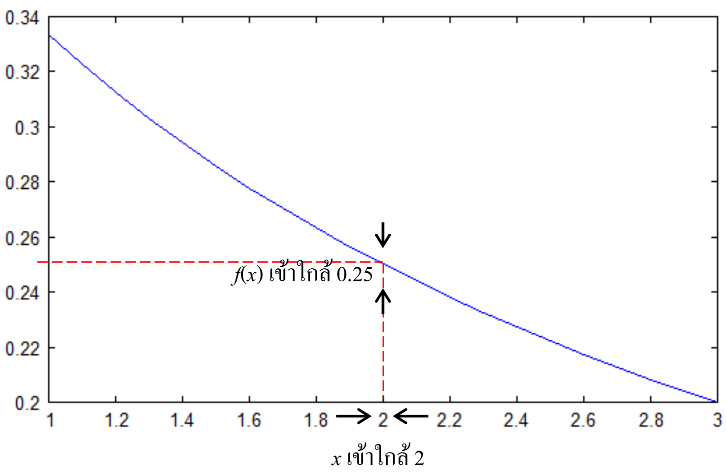
ตัวอย่าง 1.10 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$ พร้อมทั้งสร้างกราฟจากโปรแกรม FreeMat

<u>วิธีทำ</u> $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate Forms)

ดังนั้นจะหาลิมิตของฟังก์ชันนี้โดยการแยกตัวประกอบ

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} \\
&= \frac{1}{2+2} \\
&= \frac{1}{4} \\
&= 0.25
\end{aligned}
$$

สร้างกราฟจากโปรแกรม FreeMat



รูปที่ 1.23 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0.25$ และ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0.25$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)=0.25$ หรือ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=0.25$

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & ; x<1 \\ \ln x & ; x\ge 1\end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=\sqrt{1-1}=0$

และ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(\ln x)=\ln 1=0$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{|2-x|}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $|2-x| = \begin{cases} +(2-x) & ;\ 2-x \ge 0,\ x \le 2 \\ -(2-x) & ;\ 2-x < 0,\ x > 2 \end{cases}$

กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{2-x}{|2-x|} = \begin{cases} \dfrac{2-x}{+(2-x)} = 1 & ;\ x \le 2 \\ \dfrac{2-x}{-(2-x)} = -1 & ;\ x > 2 \end{cases}$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$

ซึ่ง $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{|2-x|}$ ไม่มีลิมิตหรือหาค่าไม่ได้ (เนื่องจากค่าลิมิตด้านซ้ายไม่เท่ากับด้านขวา)

1.4.2 ทฤษฎีเบื้องต้นของลิมิต

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันต่าง ๆ ถ้ากำหนดให้ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่าลิมิตได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ช่วยในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ง่ายและรวดเร็วกว่าการใช้บทนิยาม

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ถ้า $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ สำหรับทุก ๆ ค่า x

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ ถ้า $f(x) = x$ และ

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sqrt{a}$ ถ้า $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $a > 0$

3. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L}{M}$ โดยที่ $M\neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ ถ้า $L>0,\ n$ เป็นจำนวนคู่บวก หรือ ถ้า $L\le 0$, n เป็นจำนวนคี่บวก

8. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n=L^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.13 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x-1)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(2x^2+x-1)&=\lim_{x\to 1}2x^2+\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1\\&=2\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x-1\\&=2(1)^2+1-1\\&=2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -2}(x-2)(x^2+5)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}(x-2)(x^2+5)&=\lim_{x\to -2}(x-2)\lim_{x\to -2}(x^2+5)\\&=(-2-2)((-2)^2+5)\\&=(-4)(4+5)\\&=(-4)\cdot(9)=-36\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3}{2x^2-3x-5}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3}{2x^2-3x-5}&=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-3x-5)}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^3-\lim\limits_{x\to 3}3}{\lim\limits_{x\to 3}2x^2-\lim\limits_{x\to 3}3x-\lim\limits_{x\to 3}5}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^3-\lim\limits_{x\to 3}3}{2\lim\limits_{x\to 3}x^2-3\lim\limits_{x\to 3}x-5}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3}{2x^2-3x-5}=\frac{3^3-3}{2(3)^2-3(3)-5}$$

$$=\frac{27-3}{2(9)-9-5}$$

$$=\frac{24}{18-9-5}$$

$$=\frac{24}{18-14}$$

$$=\frac{24}{4}\quad =6$$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^2+8}{x^2+4x+7}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{x^2+8}{x^2+4x+7}}=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+8)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4x+7)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}8}{\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}4x+\lim\limits_{x\to -1}7}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -1}x^2+8}{\lim\limits_{x\to -1}x^2+4\lim\limits_{x\to -1}x+7}}$$

$$=\sqrt{\frac{(-1)^2+8}{(-1)^2+4(-1)+7}}$$

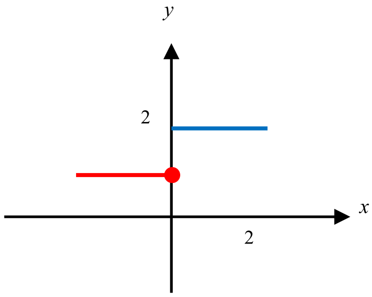
$$=\sqrt{\frac{1+8}{1+4(-1)+7}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{1-4+7}}\;=\sqrt{\frac{9}{4}}\;=\frac{3}{2}$$

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} 1 \ ; \ x \le 0 \\ 2 \ ; \ x > 0 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x \to 0^-$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ และ
- ลิมิตเข้าใกล้ด้านขวา คือ เมื่อ $x \to 0^+$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$



รูปที่ 1.24 กราฟของ $f(x)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ที่ $x = 0$ ดังรูป

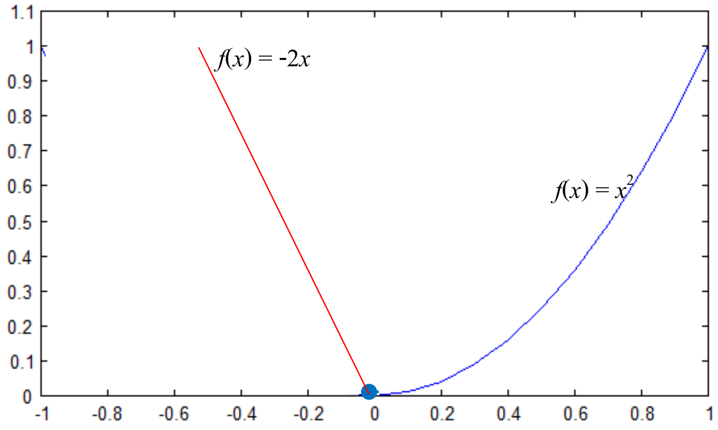
ตัวอย่าง 1.18 จงหาค่าลิมิตของ $f(x)=\begin{cases} -2x \ ; \ x < 0 \\ x^2 \ ; \ x \ge 0 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x \to 0^-$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-2x) = -2(0) = 0$ และ
- ลิมิตเข้าใกล้ด้านขวา คือ เมื่อ $x \to 0^+$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ดังรูปที่ 1.25



รูปที่ 1.25 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ลิมิตของฟังก์ชัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}1-x & ;\ x<2\\ x^2-3 & ;\ x\geq 2\end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2

วิธีทำ การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ 2 ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to 2^-$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1$ และ

- ลิมิตเข้าใกล้ 2 ด้านขวา คือ เมื่อ $x\to 2^+$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=2^2-3=4-3=1$

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ที่ $x=2$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในบางโจทย์ ดังตัวอย่างต่อไป เมื่อแทนค่า x ด้วย a แล้วจะทำให้ค่าลิมิตของฟังก์ชันอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นรูปแบบไม่กำหนด ดังนั้นต้องจัดรูปของฟังก์ชันใหม่ เพื่อตัดพจน์ที่ทำให้ส่วนเป็น 0 ออกไป โดยใช้วิธีต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 1.20 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=3$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=3$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $x-3=0$

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{3^2-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\boxed{x^2-3^2}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)$$

$$=3+3=6$$

น^2 − ล^2 = (น-ล)(น+ล)

$x^2-3^2=(x-3)(x+3)$

น คือ x และ ล คือ 3

ข้อสังเกต ตัวประกอบ $x-3$ สามารถถูกกำจัดออกไปได้ เนื่องจากการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันไม่ได้พิจารณาที่ $x=3$ และ $x-3\neq 0$ ที่ทุก ๆ x ซึ่ง $x\neq 3$

ตัวอย่าง 1.21 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x-4}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=4$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=4$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $x-4=0$

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x-4}=\dfrac{4^3-64}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\boxed{x^3-4^3}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+4^2)}{\cancel{x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+4^2)=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+16)$$

$$=4^2+4(4)+16=16+16+16=48$$

น^3 − ล^3 = (น-ล)(น^2+นล+ล^2)

$x^3-4^3=(x-4)(x^2+x(4)+4^2)$

น คือ x และ ล คือ 4

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=1$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=1$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $x-1=0$

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\dfrac{(1)^2+2(1)-3}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+3)$$

$$=1+3=4$$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=-5$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=-5$ แล้วทำให้ส่วนเป็น 0

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5}=\dfrac{(-5)^2+3(-5)-10}{(-5)^2+6(-5)+5}=\dfrac{25-15-10}{25-30+5}=\dfrac{0}{0}$

เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)(x+5)}{(x+1)(x+5)}$$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)\cancel{(x+5)}}{(x+1)\cancel{(x+5)}}$$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)}{(x+1)}$$

$$=\frac{-5-2}{-5+1}$$

$$=\frac{-7}{-4}=\frac{7}{4}$$

ตัวอย่าง 1.24 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=9$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=9$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $9-x=0$ ซึ่งทำให้ $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\frac{3-\sqrt{9}}{9-9}=\frac{3-3}{0}=\frac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{3^2-(\sqrt{x})^2}\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{3-\sqrt{x}}}{\cancel{(3-\sqrt{x})}(3+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{1}{3+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{3+\sqrt{9}}\\ &= \frac{1}{3+3}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{น}^2-\text{ล}^2=(\text{น}-\text{ล})(\text{น}+\text{ล})\\ &3^2-(\sqrt{x})^2=(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})\end{aligned}}$$

หรือสามารถแก้ปัญหาโจทย์โดยวิธีการคูณสังยุคทั้งเศษและส่วน

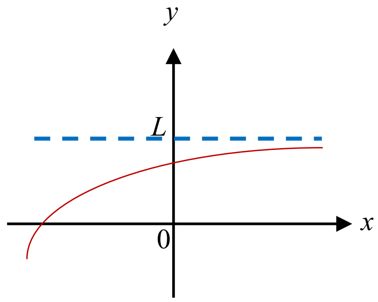
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\cdot\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{3^2-(\sqrt{x})^2}{(9-x)(3+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{9-x}}{\cancel{(9-x)}(3+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{1}{(3+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{3+\sqrt{9}}\\ &= \frac{1}{3+3}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(\text{น}-\text{ล})(\text{น}+\text{ล})=\text{น}^2-\text{ล}^2\\ &(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})=3^2-(\sqrt{x})^2\end{aligned}}$$

1.4.3 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ($x \to \pm\infty$) และลิมิตค่าอนันต์

พิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x ซึ่งมีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต หรือ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต

<u>กรณีที่ 1</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



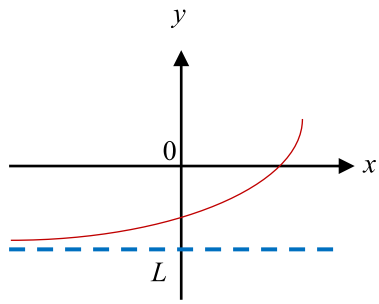
รูปที่ 1.26 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to +\infty$ มีค่าเท่ากับ L

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์บวกมีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

<u>กรณีที่ 2</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



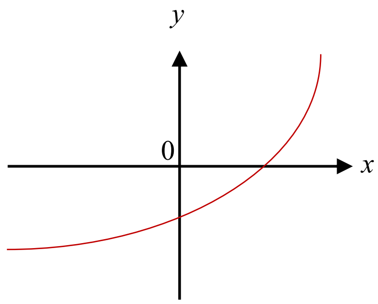
รูปที่ 1.27 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to -\infty$ มีค่าเท่ากับ L

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ลบมีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

<u>กรณีที่ 3</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



รูปที่ 1.28 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to \infty$ มีค่าเท่ากับบวกอนันต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

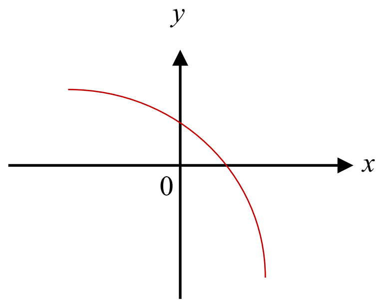
จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่ามากขึ้น ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์บวกมีค่าเท่ากับบวกอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

และเมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าน้อยลง ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ลบมีค่าเท่ากับลบอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

<u>กรณีที่ 4</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



รูปที่ 1.29 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to \infty$ มีค่าเท่ากับลบอนันต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าน้อยลง ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์บวกมีค่าเท่ากับลบอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

และเมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่ามากขึ้น ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ลบมีค่าเท่ากับบวกอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

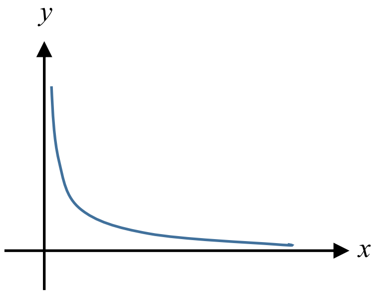
<u>กรณีที่ 5</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ เมื่อ x มีค่ามากขึ้น ๆ ($x \to \infty$) จากตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.6 ตารางแสดง x เข้าใกล้ค่าอนันต์

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	$\Rightarrow \infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	$\Rightarrow 0$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง 0 เมื่อ x มีค่ามากขึ้นๆ ($x \to \infty$)ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0



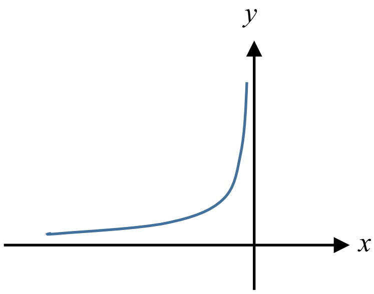
รูปที่ 1.30 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่ามากขึ้น

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

และในทำนองเดียวกัน เมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$



รูปที่ 1.31 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่าน้อยลง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.4.4 ทฤษฎีเบื้องต้นของลิมิตเข้าใกล้อนันต์ และลิมิตค่าอนันต์

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ เมื่อ $n > 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ เมื่อ $n>0$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

6. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^n}=\infty$ เมื่อ $n>0$

7. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก

8. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=-\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\\&=0-0\\&=0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.26 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}\\&=5\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}\\&=5(0)+4(0)-2(0)\\&=0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.27 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{4}{x^3}\right)$

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตสามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to0^-$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to0^-}\left(2-\dfrac{4}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^-}2-\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^3}$$
$$=2-4\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}$$
$$=2-4(-\infty)$$
$$=2+\infty$$
$$=\infty$$

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านขวา คือ เมื่อ $x\to 0^+$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^+}2-\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^3}$$
$$=2-4\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}$$
$$=2-4(\infty)$$
$$=2-\infty$$
$$=-\infty$$

จะเห็นได้ว่า $\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)\neq\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$ ไม่มีค่าลิมิต

ตัวอย่าง 1.28 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตสามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to 0^-$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^4}-\lim_{x\to 0^-}2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)=4\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}-2$$

$$=4(-\infty)-2$$

$$=-\infty-2=-\infty$$

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x \to 0^+$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}-2\right) = \lim_{x \to 0^+}\frac{4}{x^4} - \lim_{x \to 0^+} 2$$

$$= 4\lim_{x \to 0^+}\frac{1}{x^4} - 2$$

$$= 4(\infty) - 2$$

$$= \infty - 2$$

$$= \infty$$

จะเห็นได้ว่า $\lim_{x \to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right) \neq \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$ ดังนั้น $\lim_{x \to 0}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$ ไม่มีค่าลิมิต

ตัวอย่าง 1.29 จงหาค่าของ $\lim_{x \to \infty}\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x \to \infty}\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to \infty} 2x^3 + \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x \to \infty} x^3 + \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}$$

$$= \infty + 0$$

$$= \infty$$

ตัวอย่าง 1.30 จงหาค่าของ $\lim_{x \to -\infty}\left(3x^3 + 5x^5\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x \to -\infty}\left(3x^3 + 5x^5\right) = \lim_{x \to -\infty} 3x^3 + \lim_{x \to -\infty} 5x^5$$

$$= 3\lim_{x \to -\infty} x^3 + 5\lim_{x \to -\infty} x^5$$

$$= 3\lim_{x \to -\infty} x^3 + 5\lim_{x \to -\infty} x^5$$

$$= 3(-\infty) + 5(-\infty)$$

$$= -\infty$$

ถ้าการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะซึ่งมีผลลัพธ์อยู่ในรูป $\pm\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ $x \to \pm\infty$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด จึงต้องกำจัดรูป $\pm\frac{\infty}{\infty}$ โดยการแปลงฟังก์ชันจากโจทย์ โดยนำพจน์ (ตัวแปร) ที่มีกำลังสูงสุดหารทั้งเศษและส่วน เพื่อให้ได้ฟังก์ชันใหม่จากการแปลงโดยวิธีดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.31 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x^4-3x^2+1}{2x^4+x-5}\right)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x^4-3x^2+1}{2x^4+x-5}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ แปลงโจทย์โดยหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^4 ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^4-3x^2+1}{2x^4+x-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{8x^4-3x^2+1}{x^4}}{\dfrac{2x^4+x-5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{8x^4}{x^4}-\dfrac{3x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{2x^4}{x^4}+\dfrac{x}{x^4}-\dfrac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}8-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^4}}$$

$$=\frac{8-0+0}{2+0-0}$$

$$=\frac{8}{2}$$

$$=4$$

ตัวอย่าง 1.32 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x+4}{9x^6+6x-7}\right)$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x+4}{9x^6+6x-7}\right)=-\dfrac{\infty}{\infty}$ แปลงโจทย์โดยหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^6 ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-3x+4}{9x^6+6x-7}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{2x^3-3x+4}{x^6}}{\dfrac{9x^6+6x-7}{x^6}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{2x^3}{x^6}-\dfrac{3x}{x^6}+\dfrac{4}{x^6}}{\dfrac{9x^6}{x^6}+\dfrac{6x}{x^6}-\dfrac{7}{x^6}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^5}+\dfrac{4}{x^6}}{9+\dfrac{6}{x^5}-\dfrac{7}{x^6}}\right)$$

$$=\frac{0-0+0}{9+0-0}$$

$$=\frac{0}{9}$$

$$=0$$

ตัวอย่าง 1.33 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ เนื่องจาก $\sqrt{x^2}=-x$ เมื่อ $x<0$ แปลงโจทย์โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วย $-x$ ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{-x}}{\dfrac{6x-5}{-x}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{-x}}{\frac{6x-5}{-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{-6+\frac{5}{x}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{9+0}}{-6+0}$$

$$=\frac{\sqrt{9}}{-6}$$

$$=\frac{3}{-6}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 1.34 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^5}{7x^6-3x^4+5}$

<u>วิธีทำ</u> $\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^5}{7x^6-3x^4+5}=\frac{\infty}{\infty}$ แปลงโจทย์โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^{10} ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^5}{7x^6-3x^4+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x^2+1)^5}{x^{10}}}{\frac{7x^6-3x^4+5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x^2+1)^5}{(x^2)^5}}{\frac{7x^6}{x^{10}}-\frac{3x^4}{x^{10}}+\frac{5}{x^{10}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^5}{7x^6-3x^4+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^5}{\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^5}{\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)^5}{\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^5}{\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{5}{x^{10}}}$$

$$=\frac{(1+0)^5}{0-0+0}$$

$$=\frac{1}{0}=\infty$$

1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuous functions)

ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน พบว่า บางครั้งค่าของลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a จะเท่ากับค่าของฟังก์ชัน ที่จุด $x=a$ ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า มีความต่อเนื่องที่จุด $x=a$

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=a$ สามารถพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีและต้องเป็นจริงทั้ง 3 กรณีดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ คือ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ หรือค่าของฟังก์ชันในข้อ 1 เท่ากับค่าของลิมิตในข้อ 2 (ข้อ 1 = ข้อ 2)

หมายเหตุ - ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=a$ สามารถพิจารณาได้จากกราฟของฟังก์ชันอีกวิธีหนึ่งได้ โดยที่กราฟของฟังก์ชันจะต้องไม่ขาดตอน ณ จุดนั้น และ ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดบนเส้นจำนวนจริง จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

- ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่เป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งของนิยามจะได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

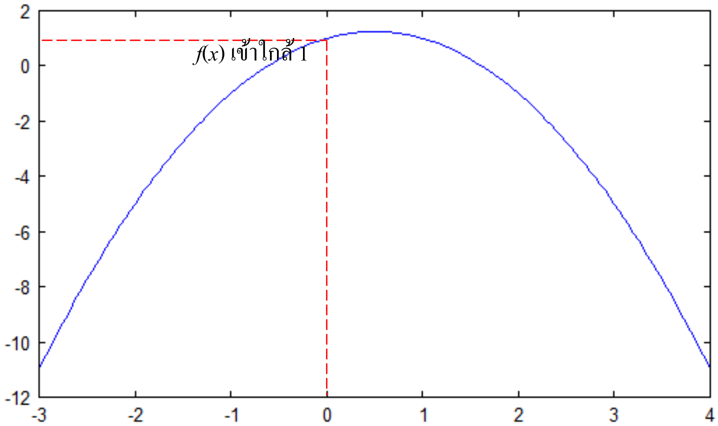
ตัวอย่าง 1.35 จงพิจารณาว่า $f(x)=-x^2+x+1$ ต่อเนื่องที่ $x=0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1. $f(0)=1$ หาค่าได้

2. $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ หาค่าได้ และ

3. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(-x^2+x+1)=1$

ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=0$ ดังรูป



รูปที่ 1.32 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)=-x^2+x+1$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.36 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 3-x \ ; \ x<2 \\ x^2-3 \ ; \ x\geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

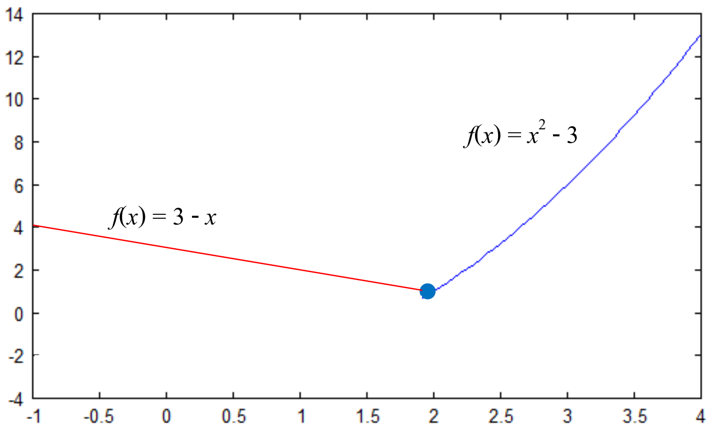
<u>วิธีทำ</u> 1. $f(2)=2^2-3=1$ หาค่าได้

2. ลิมิตซ้าย $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3-x)$ ลิมิตขวา $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)$

$=3-2=1$ $=2^2-3=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ หาค่าได้ และ

3. $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ ดังรูป



รูปที่ 1.33 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.37 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} -1 \ ; \ x<-1 \\ x^2 \ ; \ x\geq -1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=-1$ หรือไม่

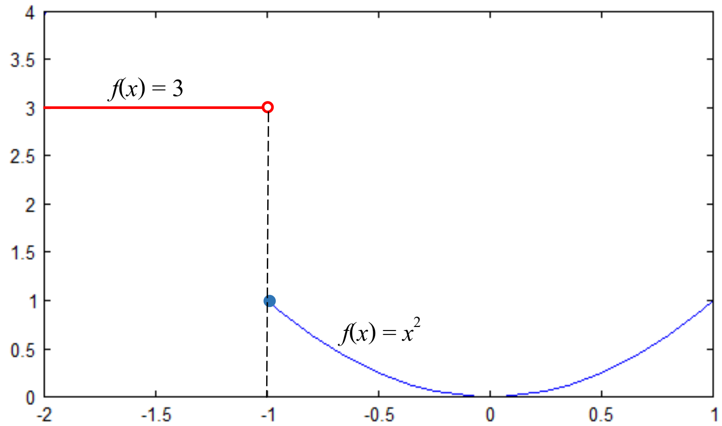
<u>วิธีทำ</u> 1. $f(-1)=(-1)^2=1$ หาค่าได้

2. ลิมิตซ้าย $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1$ ลิมิตขวา $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2$

$=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ไม่มีค่าลิมิต

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=-1$ ดังรูป



รูปที่ 1.34 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=-1$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.38 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-8}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ x ค่าใด

<u>วิธีทำ</u> $f(x)$ หาค่าไม่ได้ในกรณีที่ส่วนเป็นศูนย์ คือ $x-8=0$

$$x-8=0$$

$$x=8$$

จาก $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-8}$

$$f(8)=\frac{8^2+1}{8-8}$$

$$=\frac{64+1}{0}$$

$$=\frac{65}{0}$$

(มีส่วนเป็น 0 หาค่าไม่ได้)

ดังนั้น $f(-8)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=8$

ตัวอย่าง 1.39 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & ; \; x<5 \\ \dfrac{x^2}{5-x} & ; \; x\geq 5 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ x ค่าใด

<u>วิธีทำ</u> $f(x)$ หาค่าไม่ได้ในกรณีที่ส่วนเป็นศูนย์ คือ $5-x=0$

$$5=x$$

$$x=5$$

จาก $f(x)=\dfrac{x^2}{5-x}$

$$f(5)=\frac{5^2}{5-5}$$

$$=\frac{25}{0}$$ (มีส่วนเป็น 0 หาค่าไม่ได้)

ดังนั้น $f(5)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=5$

บทสรุป

ฟังก์ชันเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรต้นกับตัวแปรตาม ซึ่งการหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถทำได้โดยเมื่อกำหนด $y=f(x)$ ค่าของตัวแปรต้น x เป็นตัวแปรป้อนเข้า จะเกิดผลลัพธ์ตัวแปรตาม y จากการแทนค่า

ลิมิตของฟังก์ชันจะมีความแตกต่างค่าของฟังก์ชัน เนื่องจากค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x=a$ จะหมายถึงว่า $f(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด แต่ค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น ต้องการที่พิจารณาหาค่าของฟังก์ชัน f ว่ามีค่าเท่าใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a ซึ่งผลที่ได้มี 2 แบบ คือ หาค่าลิมิตได้หรือหาค่าลิมิตไม่ได้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x=a$ โดยที่

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ คือ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
3. $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. กำหนดให้ $f(x)=x^2+3x-1$ และ $g(x)=3x-2$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(-2)$	1.2 $f(0)$
1.3 $f(1)$	1.4 $f(a)$
1.5 $f(b^2)$	1.6 $f(a+b)$
1.7 $g(x-h)$	1.8 $g(x-1)$
1.9 $g(2x+1)$	1.10 $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ เมื่อ $h\neq 0$

2. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & ; x<0 \\ 3-2x & ; 0\le x\le 5 \\ x-1 & ; x>5 \end{cases}$ และ $g(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(-1)$	2.2 $f(0)$
2.3 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$	2.4 $f(6)$
2.5 $g(1)$	2.6 $g(-2)$
2.7 $(f+g)(1)$	2.8 $(f-g)(1)$
2.9 $(f\,g)(1)$	2.10 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)$

3. กำหนดให้ $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=x-4$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $(f+g)(x)$	3.2 $(f-g)(x)$
3.3 $(f\,g)(x)$	3.4 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
3.5 $(f+g)\left(\dfrac{1}{2}\right)$	3.6 $(f-g)(3)$
3.7 $(f\,g)(0)$	3.8 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(5)$

4. จงหาฟังก์ชันประกอบ $(f\circ g)(x)$ และ $(g\circ f)(x)$ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 $f(x)=2^x$ และ $g(x)=x^2$

4.2 $f(x)=4x-3$ และ $g(x)=\sqrt{x-2}$

4.3 $f(x) = \sqrt{4-x}$ และ $g(x) = 4-x$

4.4 $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = \sqrt{x+1}$

4.5 $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ และ $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$

4.6 $f(x) = \sqrt[4]{x}$ และ $g(x) = x^4$

4.7 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ และ $g(x) = |x+1|$

5. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x+2$ และ $h(x) = (x^2+1)^2$

จงหา $(f \circ g \circ h)(x)$ และ $(f \circ g \circ h)(1)$

6. กำหนดให้ A เป็นฟังก์ชันพื้นที่ผิวของลูกบาศก์ และกำหนดความยาวของด้านลูกบาศก์เป็น x

6.1 จงเขียนฟังก์ชันพื้นที่ผิวของลูกบาศก์

6.2 ถ้าความยาวของด้านลูกบาศก์มีค่าเท่ากับ 3 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวของลูกบาศก์

6.3 ถ้าความยาวของด้านลูกบาศก์มีค่าเท่ากับ 3 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวของลูกบาศก์ โดยใช้โปรแกรม FreeMat

7. อุณหภูมิอากาศในประเทศสหรัฐอเมริกาใช้หน่วยการวัด คือ องศาฟาเรนไฮต์ ($°F$) และในประเทศไทยใช้หน่วยการวัด คือ องศาเซลเซียส ($°C$)

7.1 จงเขียนฟังก์ชันของอุณหภูมิองศาเซลเซียส

7.2 จงแปลงอุณหภูมิ 72 องศาฟาเรนไฮต์ เป็นหน่วยองศาเซลเซียส

7.3 จงแปลงอุณหภูมิ 72 องศาฟาเรนไฮต์ เป็นหน่วยองศาเซลเซียส โดยใช้โปรแกรม FreeMat

8. บริษัทแห่งหนึ่งมีการผลิตสินค้าออกจำหน่ายในราคาชิ้นละ 300 บาท ถ้าบริษัทนี้ลงทุนการผลิตคงที่เป็นเงิน 800,000 บาท และมีค่าขนส่งชิ้นละ 70 บาท เมื่อบริษัทนี้ผลิตสินค้าออกจำหน่าย x ชิ้น

8.1 จงเขียนฟังก์ชันของต้นทุน

8.2 จงเขียนฟังก์ชันของรายได้

8.3 จงเขียนฟังก์ชันของกำไร

8.4 จงหากำไรของบริษัทนี้ ถ้าบริษัทนี้ผลิตสินค้าออกจำหน่าย 6,000 ชิ้น

8.5 จงหากำไรของบริษัทนี้ ถ้าบริษัทนี้ผลิตสินค้าออกจำหน่าย 6,000 ชิ้น โดยใช้โปรแกรม FreeMat

9. จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

9.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+3x-1}$

9.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-5x}{x^2-x+7}$

9.3 $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2-x+9}$

9.4 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{1}{2x^3}}$

9.5 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-3x+6}{9x+7}}$

9.6 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{3-x}$

9.7 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$

9.8 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$

9.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3-x}$

9.10 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$

9.11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

9.12 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

9.13 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{4b^2-(x+b)^2}{x-b}$

9.14 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

9.15 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-3}$

9.16 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3-\sqrt{x+2}}{7-x}$

9.17 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}$

9.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

9.19 ถ้า $f(x)=\begin{cases} 3 \ ; \ x\neq 2 \\ 1 \ ; \ x=2 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

9.20 ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2 \ ; \ x\geq 0 \\ 2x \ ; \ x<0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

9.21 ถ้า $f(x)=\begin{cases} 3-x \ ; \ x>-1 \\ -4x \ ; \ x\leq -1 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

9.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{4x+5}$

9.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

9.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x+2}{6x^3+2x^2-7}$

9.25 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^4+2x+1}$

9.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(9x^5+2x^3-x^2-7)^2}{2x^8-x^2+4}$

9.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^4+x+1)^2}{(x^2-8x-6)^4}$

9.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x-9}{(x^2+x+1)^3}$

9.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{\sqrt{9x^2+1}}$

10. กำหนดให้ $f(x)=5x-2$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=2$ หรือไม่

11. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=1$ หรือไม่

12. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=-3$ หรือไม่

13. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=2$ หรือไม่

14. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 4x & ;\ x\neq 1 \\ 5-x & ;\ x=1 \end{cases}$ แล้ว $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

15. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5}{x-5} & ;\ x<5 \\ 5 & ;\ x\geq 5 \end{cases}$ แล้ว $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=5$ หรือไม่

16. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ ไม่ต่อเนื่องที่ค่าใดบ้าง

16.1 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$

16.2 $f(x)=-7x+3$

16.3 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-8x+12}$

16.4 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

16.5 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$

16.6 $f(x)=\dfrac{x}{x^4-x^2}$

16.7 $f(x)=\begin{cases} 2 & ;\ x>1 \\ -2 & ;\ x\leq 1 \end{cases}$

16.8 $f(x)=\begin{cases} x^2 & ;\ x<0 \\ 0 & ;\ x\geq 0 \end{cases}$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). **แคลคูลัสและเทคนิคการใช้ Graphing Calculator**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์ (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

มนัส ประสงค์. (2535). **แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2546). **พจนานุกรมศัพท์คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพมหานคร: ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

Find my soft., **A faster download experience**. https://www.freemat.findmysoft.com. (2564)

Google Technology Company., **Google website**. https://www.google.com. (2564)

John C. Peterson. (1997). **Technical Mathematics with Calculus**. New York: Delmar.

อนุพันธ์ บทที่ 2
Derivatives

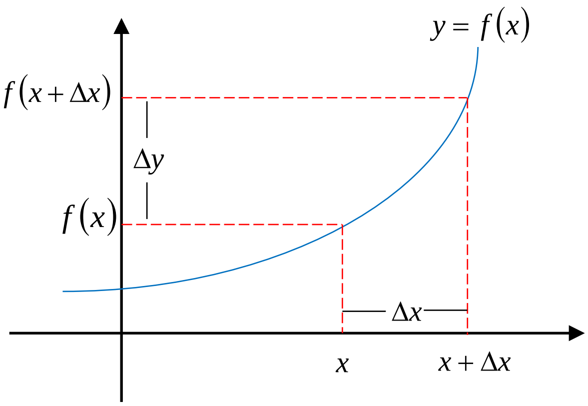
อนุพันธ์เป็นหัวข้อเกี่ยวกับอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน โดยทั่วไปทุกอย่างจะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นอยู่เสมอ และมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นเครื่องมือหลักในกระบวนการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจบทนิยามของอนุพันธ์
2. สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

2.1 บทนิยามของอนุพันธ์ (Definition of derivative)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 กราฟของอนุพันธ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป Δx คือ ส่วนที่เปลี่ยนของค่า x ทางแกน x จากค่า x ไปเป็น $x+\Delta x$

Δy คือ ส่วนที่เปลี่ยนของค่า y ทางแกน y จากค่า $f(x)$ ไปเป็น $f(x+\Delta x)$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

โดยส่วนที่เปลี่ยนของ x หรือ แกน y เรียกว่าค่าเพิ่ม (Increment) ซึ่งอาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ คือ อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 แล้วอนุพันธ์ของ f เทียบกับ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$ และอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

กำหนดนิยามดังนี้ ถ้า $y = f(x)$ แล้ว $f'(x)$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้แล้วจะเรียก $f(x)$ ว่าฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (Differentiable function)

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ $y = x^2 + 1$ ถ้า $x = 3$ และ $\Delta x = 2$ จงหา Δy

<u>วิธีทำ</u> จาก

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= f(3+2) - f(2) \\ &= f(5) - f(2) \\ &= (5^2+1) - (2^2+1) \\ &= (25+1) - (4+1) \\ &= 26 - 5 \\ &= 21 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2 ในการระเหยของสารเคมีชนิดหนึ่ง พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป x นาที การระเหยของสารเคมีเท่ากับ $x^2 + x + 1$ มิลลิลิตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยต่อนาทีของการระเหยของสารเมื่อเทียบกับเวลาในช่วงเวลา 1 ถึง 4 นาที ในการระเหย

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้การระเหยของสารเคมี คือ $y = x^2 + x + 1$

ณ จุดเริ่มต้นในเวลา $x=1$ จะได้ $\Delta x = 4-1=3$ และ $x+\Delta x = 4$

จาก
$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &= f(4)-f(1)\\ &= (4^2+4+1)-(1^2+1+1)\\ &= (16+4+1)-(1+1+1)\\ &= 21-3\\ &= 18 \quad \text{(คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของการระเหยใน 3 นาที)}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18}{3} = 6$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยต่อนาที มีค่าเท่ากับ 6 มิลลิลิตรต่อนาที

ตัวอย่าง 2.3 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2+1$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left((x+\Delta x)^2\right)+1-(x^2+1)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+1-x^2-1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x\\ &= 2x+0 = 2x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\sqrt{2-3x}$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}-\sqrt{2-3x}}{\Delta x}$$

แก้ปัญหาโจทย์โดยวิธีการคูณสังยุคทั้งเศษและส่วน

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}-\sqrt{2-3x}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}}{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}\right)^2-\left(\sqrt{2-3x}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2-3(x+\Delta x)\right)-\left(2-3x\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2}-\cancel{3x}-3\Delta x-\cancel{2}+\cancel{3x}}{\Delta x\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{2-3(x+0)}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2-x}{x}$ จงหา $f'(-1)$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{2-(x+\Delta x)}{x+\Delta x}\right)-\left(\dfrac{2-x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{2-(x+\Delta x)}{x+\Delta x}\right)-\left(\frac{2-x}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{2-x-\Delta x}{x+\Delta x}\right)+\left(\frac{x-2}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{2-x-\Delta x}{x+\Delta x}\right)\times\frac{x}{x}+\left(\frac{x-2}{x}\right)\times\frac{(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{(2-x-\Delta x)x+(x-2)(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\cancel{2x}-\cancel{x^2}\cancel{-x\Delta x}+\cancel{x^2}\cancel{+x\Delta x}\cancel{-2x}-2\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cancel{\Delta x}}\left[\frac{-2\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-2}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\frac{-2}{x(x+0)}$$

$$=\frac{-2}{x(x)}=\frac{-2}{x^2}$$

ดังนั้น $$f'(-1)=\frac{-2}{(-1)^2}=\frac{-2}{1}$$

$$=-2$$

2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Differentiation of algebraic functions)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันที่นิยามเขียนอยู่ในรูปของการบวก ลบ คูณ หาร ของตัวแปรและตัวคงที่ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของบางฟังก์ชันที่มีหลาย ๆ เทอมประกอบกันมาก ถ้าหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามในรูปลิมิตนั้นมีขั้นตอนมาก ดังนั้น จึงได้มีการสร้างสูตรที่ใช้สำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ขึ้นมาโดยอาศัยนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ดังสูตรต่อไปนี้

- กำหนดให้ u,v เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้
  โดยที่ c คือ ค่าคงที่ใด ๆ และ n เป็นจำนวนจริง

1. $\dfrac{dc}{dx}=0$

2. $\dfrac{dx}{dx}=1$

3. $\dfrac{d}{dx}(cu)=c\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}(u\cdot v)=u\dfrac{dv}{dx}\pm v\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}\pm u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}=\dfrac{1}{v^2}\left[v\dfrac{du}{dx}\pm u\dfrac{dv}{dx}\right]$

7. $\dfrac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\cdot\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=5x^4+7x^3-9x^2+8$

วิธีทำ $$f'(x)=\frac{d}{dx}(5x^4+7x^3-9x^2+8)$$ **สูตรที่ 4**

$$f'(x)=\frac{d(5x^4)}{dx}+\frac{d(7x^3)}{dx}-\frac{d(9x^2)}{dx}+\frac{d(8)}{dx}$$ **สูตรที่ 1 และ 3**

$$=5\frac{d(x^4)}{dx}+7\frac{d(x^3)}{dx}-9\frac{d(x^2)}{dx}+0$$ **สูตรที่ 2 และ 7**

$$=5(4)x^{4-1}\frac{dx}{dx}+7(3)x^{3-1}\frac{dx}{dx}-9(2)x^{2-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=20x^3+21x^2-18x$$

ตัวอย่าง 2.7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{5}{7}x^3-4$

วิธีทำ $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{5}{7}x^3-4\right)$$ **สูตรที่ 4**

$$=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}+\frac{5}{7}x^3-4\right)$$

$$=\frac{d(x^{-2})}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{7}x^3\right)-\frac{d(4)}{dx}$$ **สูตรที่ 1 และ 3**

$$=\frac{d(x^{-2})}{dx}+\frac{5}{7}\frac{d(x^3)}{dx}-0$$ **สูตรที่ 2 และ 7**

$$=-2x^{-2-1}\frac{dx}{dx}+\frac{5}{7}(3)x^{3-1}\frac{dx}{dx}$$ **สูตรที่ 7**

$$=-2x^{-3}+\frac{15}{7}x^2$$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+3$

วิธีทำ $$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+3)$$ **สูตรที่ 4**

$$f'(x)=\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx}-\frac{d(4x^{\frac{1}{2}})}{dx}+\frac{d(3)}{dx}$$

$$=\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx}-4\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}+0$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\frac{dx}{dx}-4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}\frac{dx}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 2 และ 7</u>**

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-\left(1\times\frac{3}{3}\right)}-\frac{4}{2}x^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}}-2x^{\frac{1-2}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}-2x^{\frac{-1}{2}}$$

ตัวอย่าง 2.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x^5-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{4x^2}+5x$

<u>วิธีทำ</u> $$f'(x)=\frac{d}{dx}(2x^5-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{4x^2}+5x)$$ **<u>สูตรที่ 4</u>**

$$=\frac{d(2x^5)}{dx}-\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^4}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x^2}\right)+\frac{d(5x)}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=2\frac{d(x^5)}{dx}-3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)+5\frac{dx}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=2\frac{d(x^5)}{dx}-3\frac{d(x^{-4})}{dx}+\frac{1}{4}\frac{d(x^{-2})}{dx}+5$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=2(5)x^{5-1}\frac{dx}{dx}-3(-4)x^{-4-1}\frac{dx}{dx}+\frac{1}{4}(-2)x^{-2-1}\frac{dx}{dx}+5$$ **<u>สูตรที่ 2 และ 7</u>**

$$=10x^4+12x^{-5}-\frac{1}{2}x^{-3}+5$$

ตัวอย่าง 2.10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=4x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{2}{3}}+8x^{\frac{3}{4}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d(4x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{2}{3}}+8x^{\frac{3}{4}})}{dx}$$

$$=\frac{d(4x^{\frac{1}{2}})}{dx}-\frac{d(9x^{\frac{2}{3}})}{dx}+\frac{d(8x^{\frac{3}{4}})}{dx}$$

$$=4\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}-9\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx}+8\frac{d(x^{\frac{3}{4}})}{dx}$$

$$=4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}\frac{dx}{dx}-9\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}\frac{dx}{dx}+8\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{3}{4}-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=2x^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}-\frac{18}{3}x^{\frac{2}{3}-\left(1\times\frac{3}{3}\right)}+6x^{\frac{3}{4}-\left(1\times\frac{4}{4}\right)}$$

$$=2x^{\frac{-1}{2}}-6x^{\frac{-1}{3}}+6x^{\frac{-1}{4}}$$

ตัวอย่าง 2.11 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{x}-12\sqrt[5]{x^3}+\frac{4}{\sqrt[9]{x^4}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-12\sqrt[5]{x^3}+\frac{4}{\sqrt[9]{x^4}}\right)$$

$$=\frac{d(\sqrt{x})}{dx}-\frac{d(12x^{\frac{3}{5}})}{dx}+\frac{d(4x^{\frac{4}{9}})}{dx}$$

$$=\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}-12\frac{d(x^{\frac{3}{5}})}{dx}+4\frac{d(x^{\frac{4}{9}})}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\frac{dx}{dx}-12\left(\frac{3}{5}\right)x^{\frac{3}{5}-1}\frac{dx}{dx}+4\left(\frac{4}{9}\right)x^{\frac{4}{9}-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}-\frac{36}{5}x^{\frac{3}{5}-\left(1\times\frac{5}{5}\right)}+\frac{16}{9}x^{\frac{4}{9}-\left(1\times\frac{9}{9}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}}-\frac{36}{5}x^{\frac{3-5}{5}}+\frac{16}{9}x^{\frac{4-9}{9}}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{36}{5}x^{\frac{-2}{5}}+\frac{16}{9}x^{\frac{-5}{9}}$$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดให้ $y=(2x^3+1)^8$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u> $$y'=\frac{d}{dx}(2x^3+1)^8$$ กำหนดให้ $(2x^3+1)^8$ อยู่ในรูปแบบ u^n

$$=8(2x^3+1)^{8-1}\frac{d(2x^3+1)}{dx}$$ โดยที่ $u=(2x^3+1)$ และ $n=8$

$$=8(2x^3+1)^7\left(2(3)(x^{3-1})\frac{dx}{dx}\right)$$

$$=8(2x^3+1)^7(6x^2)$$

$$=48x^2(2x^3+1)^7$$

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดให้ $y=(x^2-1)(-x^3+5x-2)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u> $$y'=\frac{d}{dx}(x^2-1)(-x^3+5x-2)$$ <u>**สูตรที่ 5**</u>

$$=(x^2-1)\frac{d}{dx}(-x^3+5x-2)+(-x^3+5x-2)\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=(x^2-1)(-3x^2+5)+(-x^3+5x-2)(2x)$$

ตัวอย่าง 2.14 กำหนดให้ $y=\frac{2x+5}{4-x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u> $$y'=\frac{(4-x)\frac{d}{dx}(2x+5)-(2x+5)\frac{d}{dx}(4-x)}{(4-x)^2}$$ <u>**สูตรที่ 6**</u>

$$=\frac{(4-x)(2)-(2x+5)(-1)}{(4)^2-2(4)(x)+x^2}$$

$$=\frac{(8-2x)+(2x+5)}{16-8x+x^2}$$

$$=\frac{8-2x+2x+5}{x^2-8x+16}$$

$$=\frac{13}{x^2-8x+16}$$

ตัวอย่าง 2.15 กำหนดให้ $y=\sqrt[3]{x^2}(2x^2-1)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}(2x^2-1)\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}(2x^2-1))$$

$$=x^{\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}(2x^2-1)+(2x^2-1)\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}})$$

$$=x^{\frac{2}{3}}(4x)+(2x^2-1)\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$=4x^{\frac{2}{3}}x+\frac{2}{3}(2x^2-1)x^{\frac{2}{3}-\left(1\times\frac{3}{3}\right)}$$

$$=4x^{\frac{2}{3}+1}+\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2-3}{3}}$$

$$=4x^{\frac{2}{3}+\left(1\times\frac{3}{3}\right)}+\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{2+3}{3}}+\frac{4}{3}x^{2-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\left(2\times\frac{3}{3}\right)-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=\left(4+\frac{4}{3}\right)x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=\left(\frac{12}{3}+\frac{4}{3}\right)x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=\frac{16}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}$ จงหา $f'(2)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{x^2\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-3})-\sqrt{x^2-3}\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\frac{d}{dx}(x^2-3)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x^2-3}\frac{d}{dx}(x^2)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{x^4}\left(x^2\frac{1}{2}(x^2-3)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x^2-3)-\sqrt{x^2-3}(2x)\right)$$

$$=\frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{2}x^2(x^2-3)^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}(2x)-2x\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$=\frac{1}{x^4}\left(x^3(x^2-3)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}-2x\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$=\frac{x^3(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}-2x\sqrt{x^2-3}}{x^4}$$

$$=\frac{x^3(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}}{x^4}-\frac{2x\sqrt{x^2-3}}{x^4}$$

$$=\frac{1}{x(x^2-3)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2\sqrt{x^2-3}}{x^3}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{x^2-3}}-2\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$$

$$\therefore\quad f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2^2-3}}-2\frac{\sqrt{2^2-3}}{2^3}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{4-3}}-2\frac{\sqrt{4-3}}{8}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{1}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\right)-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย (Differentiation of transcendental functions)

ฟังก์ชันอดิศัย ได้แก่ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential function) ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric function) และฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse trigonometric function)

2.3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม (Differentiation of exponential function and logarithm function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม จำเป็นที่จะต้องทราบพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1) <u>ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง</u> โดยมีบทนิยามดังนี้

นิยาม ถ้าให้ a, x และ y คือ จำนวนจริงใด ๆ กำหนดฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เรียกว่าเลขยกกำลังโดยที่ a เป็นเลขฐาน และ x เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีสมบัติฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ดังนี้

1. $a^x > 0$
2. $a^0 = 1$
3. $a^x a^y = a^{x+y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $a^y \neq 0$
7. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^x \neq 0$

โดยที่ e เป็นจำนวนอตรรกยะ $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ หรือ $e = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx 2.71828$ เรียกว่าตัวเลขของออยเลอร์ (Euler's number) ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x) = e^x$ เรียกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐาน e

2) <u>ฟังก์ชันลอการิทึม</u> เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีบทนิยามดังนี้

นิยาม ถ้ากำหนดฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=\log_a x$ คือ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $f(x)=a^x$ โดยที่ $x>0$, $a>0$ และ $a\neq 1$ เรียก a เป็นเลขฐานของฟังก์ชัน และเรียก $\log_a x$ ว่าล็อค x ฐาน a โดยมีสมบัติฟังก์ชันลอการิทึมดังนี้

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n\log_a x$ โดยที่ n คือจำนวนจริง
6. $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$
7. $a^{\log_a x} = x$
8. $\log^n x = (\log x)^n$

และ ln คือ log ฐาน e เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\log e$

ถ้ากำหนดให้ u,v เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ $u(x)>0$, $a>0$ และ $a\neq 1$

1. $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$
2. $$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$$
3. $$\frac{d}{dx}u^v = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$
4. $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e \frac{du}{dx}$$
5. $$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง 2.17 กำหนดให้ $y=8^{-3x^2}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(8^{-3x^2})$$

$$= 8^{-3x^2}\ln 8 \frac{d(-3x^2)}{dx}$$

$$= 8^{-3x^2}\ln 8(-6x)$$

$$= -6x(\ln 8)8^{-3x^2}$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $a=8$ และ $u=-3x^2$

ตัวอย่าง 2.18 กำหนดให้ $y=e^{x^2}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{x^2})$$

$$= e^{x^2}\frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= e^{x^2}(2x)$$

$$= 2xe^{x^2}$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u=x^2$

ตัวอย่าง 2.19 กำหนดให้ $y = e^{2x}3^{\sqrt{x}}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{2x}3^{\sqrt{x}})$$

$$= e^{2x}\frac{d}{dx}(3^{\sqrt{x}}) + 3^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(e^{2x})$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $a = 3$ และ $u = \sqrt{x}$

$$= e^{2x}(3^{\sqrt{x}})\ln 3\frac{d\sqrt{x}}{dx} + 3^{\sqrt{x}}(e^{2x})\frac{d}{dx}(2x)$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u = 2x$

$$= e^{2x}(3^{\sqrt{x}})\ln 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3^{\sqrt{x}}(e^{2x})(2)$$

$$= \frac{e^{2x}(3^{\sqrt{x}})\ln 3}{2\sqrt{x}} + 2e^{2x}(3^{\sqrt{x}})$$

ตัวอย่าง 2.20 กำหนดให้ $y = \log_5(2x^3 - 4)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\log_5(2x^3 - 4)\right)$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $a = 5$ และ $u = 2x^3 - 4$

$$= \frac{1}{2x^3 - 4}\log_5 e\frac{d(2x^3 - 4)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2x^3 - 4}\log_5 e(6x^2)$$

$$= \frac{6x^2\log_5 e}{2x^3 - 4}$$

ตัวอย่าง 2.21 กำหนดให้ $y = \ln(5 - x^3)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\ln(5 - x^3)\right)$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u = 5 - x^3$

$$= \frac{1}{5 - x^3}\frac{d(5 - x^3)}{dx}$$

$$= \frac{1}{5 - x^3}(-3x^2) = \frac{-3x^2}{5 - x^3}$$

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดให้ $y=\dfrac{e^{2x}}{\ln x}$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{\ln x}\right)$$

$$=\frac{(\ln x)\frac{d}{dx}(e^{2x})-e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

ใช้สูตร $\dfrac{d}{dx}e^u=e^u\dfrac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u=2x$

$$=\frac{1}{(\ln x)^2}\left[(\ln x)\frac{d}{dx}(e^{2x})-e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln x)\right]$$

ใช้สูตร $\dfrac{d}{dx}\ln u=\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u=x$

$$=\frac{1}{\ln^2 x}\left[(\ln x)(e^{2x})\frac{d(2x)}{dx}-(e^{2x})\frac{1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{\ln^2 x}\left[(\ln x)e^{2x}(2)-\frac{e^{2x}}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{\ln^2 x}\left[2e^{2x}\ln x-\frac{e^{2x}}{x}\right]$$

ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้ $y=x^2\ln 3x$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y'=\frac{d}{dx}\left(x^2\ln 3x\right)$$

$$=x^2\frac{d}{dx}(\ln 3x)+(\ln 3x)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{3x}\right)\frac{d(3x)}{dx}+(\ln 3x)(2x)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{3x}\right)(3)+2x\ln 3x$$

$$=x+2x\ln 3x$$

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ $y=\ln^4(x^3-2)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\ln^4(x^3-2)\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\ln(x^3-2)\right)^4$$

$$=4\left(\ln(x^3-2)\right)^3\frac{d\left(\ln(x^3-2)\right)}{dx}$$

$$=4\ln^3(x^3-2)\frac{1}{(x^3-2)}\frac{d(x^3-2)}{dx}$$

$$=4\ln^3(x^3-2)\frac{1}{x^3-2}\left(3x^2\right)$$

$$=\frac{12x^2\ln^3(x^3-2)}{x^3-2}$$

ตัวอย่าง 2.25 กำหนดให้ $y=\log\dfrac{5-x^2}{x(x^2+4)^3}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\log\frac{5-x^2}{x(x^2+4)^3}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\log(5-x^2)-\log x-\log(x^2+4)^3\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\log(5-x^2)-\log x-3\log(x^2+4)\right)$$

$$=\frac{d(\log(5-x^2))}{dx}-\frac{d(\log x)}{dx}-3\frac{d(\log(x^2+4))}{dx}$$

$$=\frac{1}{5-x^2}(\log e)\frac{d(5-x^2)}{dx}-\frac{1}{x}\log e-\frac{3}{x^2+4}(\log e)\frac{d(x^2+4)}{dx}$$

$$=\frac{\log e}{5-x^2}(-2x)-\frac{\log e}{x}-\frac{3\log e}{x^2+4}(2x)$$

$$=-\frac{2x}{5-x^2}-\frac{\log e}{x}-\frac{6x\log e}{x^2+4}$$

ตัวอย่าง 2.26 กำหนดให้ $y=9(e^{4^{x^2\log 5x}})$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y'=\frac{d}{dx}\left[9(e^{4^{x^2\log 5x}})\right]$$

$$=9\frac{d}{dx}(e^{4^{x^2\log 5x}})$$

$$=9(e^{4^{x^2\log 5x}})\frac{d(4^{x^2\log 5x})}{dx}$$

$$=9(e^{4^{x^2\log 5x}})4^{x^2\log 5x}(\ln 4)\frac{d(x^2\log 5x)}{dx}$$

$$=9(e^{4^{x^2\log 5x}})4^{x^2\log 5x}\ln 4\left[x^2\frac{d(\log 5x)}{dx}+\log 5x\frac{d(x^2)}{dx}\right]$$

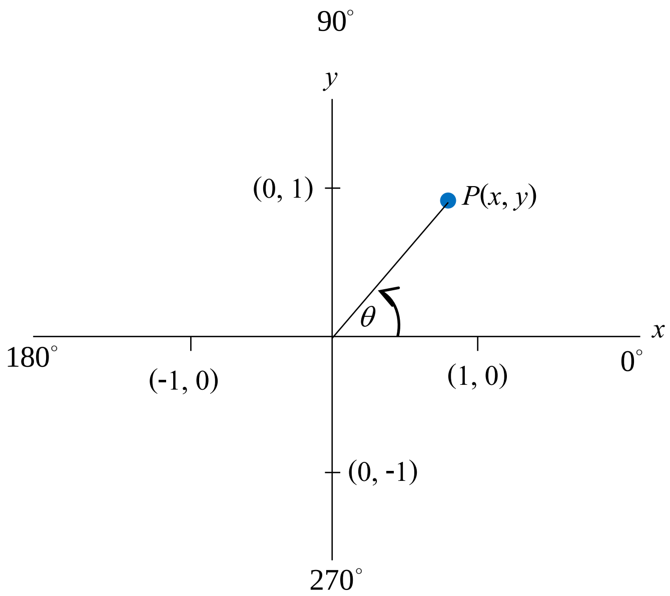
$$=9(e^{4^{x^2\log 5x}})4^{x^2\log 5x}\ln 4\left[x^2\frac{1}{5x}\log e\frac{d(5x)}{dx}+\log 5x(2x)\right]$$

$$=9(e^{4^{x^2\log 5x}})4^{x^2\log 5x}\ln 4\left[\frac{x^2\log e}{5x}(5)+2x\log 5x\right]$$

$$=9(e^{4^{x^2\log 5x}})4^{x^2\log 5x}\ln 4\left[x\log e+2x\log 5x\right]$$

2.3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Differentiation of trigonometric function) มีบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐาน ดังนี้

นิยาม ให้ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนด θ คือ การวัดของมุมในรูปหน่วยของเรเดียน (Radian) โดยเริ่มวัดจากแนวแกน x ที่เป็นบวก ณ จุด $(1, 0)$ ไปยังจุด $P(x, y)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา $\theta \geq 0$ ดังรูป



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์จตุภาคและตรีโกณมิติ

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

และ θ มีหน่วยเป็น เรเดียน ซึ่ง $\pi = 180^\circ$

จากรูป $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

โดยค่า $-1 \le x \le 1$ และ $-1 \le y \le 1$

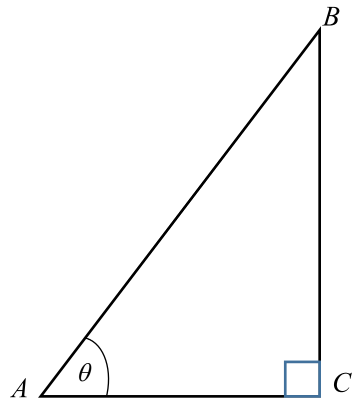
ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\sin\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ด้านประชิดมุม } \theta} = \frac{BC}{AC}$$

หรือ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$



รูปที่ 2.3 ตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมมุมฉาก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

$\operatorname{cosec}\theta$ คือ ส่วนกลับของ $\sin\theta$ หรือ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC}$

$\sec\theta$ คือ ส่วนกลับของ $\cos\theta$ หรือ $\sec\theta = \frac{AB}{AC}$

$\cot\theta$ คือ ส่วนกลับของ $\tan\theta$ หรือ $\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

หรือ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติมุมพื้นฐาน

θ	0°	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{6}=60^\circ$	$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	$\pi=180^\circ$	$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	$2\pi=360^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta\ , \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \;, \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \;, \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \;, \qquad \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \;, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \;, \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

ถ้ากำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.27 $y = \sin(x^2 - 3)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[\sin(x^2-3)\right] \\ &= \cos(x^2-3)\frac{d(x^2-3)}{dx} \\ &= \cos(x^2-3)(2x) \\ &= 2x\cos(x^2-3) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.28 กำหนดให้ $y=\cos(e^{2x})$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y'=\frac{d}{dx}\left[\cos(e^{2x})\right]$$

$$=-\sin(e^{2x})\frac{d(e^{2x})}{dx}$$

$$=-\sin(e^{2x})\cdot e^{2x}\frac{d(2x)}{dx}$$

$$=-e^{2x}\sin(e^{2x})(2)$$

$$=-2e^{2x}\sin(e^{2x})$$

ตัวอย่าง 2.29 กำหนดให้ $y=\sqrt{\tan(\ln x)}$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan(\ln x)}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(\tan(\ln x))^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\tan(\ln x))^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(\tan(\ln x))$$

$$=\frac{1}{2}(\tan(\ln x))^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}\sec^2(\ln x)\frac{d(\ln x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}(\tan(\ln x))^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}\sec^2(\ln x)\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2x}(\tan(\ln x))^{\frac{1-2}{2}}\sec^2(\ln x)$$

$$=\frac{1}{2x}(\tan(\ln x))^{\frac{-1}{2}}\sec^2(\ln x)$$

$$=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{(\tan(\ln x))^{\frac{1}{2}}}\right)\sec^2(\ln x)$$

$$=\frac{\sec^2(\ln x)}{2x(\tan(\ln x))^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\sec^2(\ln x)}{2x\sqrt{\tan(\ln x)}}$$

ตัวอย่าง 2.30 กำหนดให้ $y=(\sec 5x-\cot 5x)^3$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}(\sec 5x-\cot 5x)^3$$

$$=3(\sec 5x-\cot 5x)^2\,\frac{d(\sec 5x-\cot 5x)}{dx}$$

$$=3(\sec 5x-\cot 5x)^2\left(\sec 5x\tan 5x\frac{d(5x)}{dx}-\cos ec^2 5x\frac{d(5x)}{dx}\right)$$

$$=3(\sec 5x-\cot 5x)^2\left(\sec 5x\tan 5x(5)-\cos ec^2 5x(5)\right)$$

$$=3(\sec 5x-\cot 5x)^2\left(5\sec 5x\tan 5x-5\cos ec^2 5x\right)$$

$$=3(\sec 5x-\cot 5x)^2\,5\left(\sec 5x\tan 5x-\cos ec^2 5x\right)$$

$$=15(\sec 5x-\cot 5x)^2\left(\sec 5x\tan 5x-\cos ec^2 5x\right)$$

ตัวอย่าง 2.31 กำหนดให้ $y=\sin^4\sqrt{3x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}(\sin^4\sqrt{3x})$$

$$=\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{3x})^4$$

$$=4(\sin\sqrt{3x})^{4-1}\,\frac{d(\sin\sqrt{3x})}{dx}$$

$$=4(\sin\sqrt{3x})^3\cos\sqrt{3x}\,\frac{d(\sqrt{3x})}{dx}$$

$$=4\sin^3\sqrt{3x}\cos\sqrt{3x}\,\frac{1}{2\sqrt{3x}}\,\frac{d(3x)}{dx}$$

$$=2\sin^3\sqrt{3x}\cos\sqrt{3x}\,\frac{1}{\sqrt{3x}}(3)$$

$$=6\sin^3\sqrt{3x}\cos\sqrt{3x}\,\frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$=\frac{6\sin^3\sqrt{3x}\cos\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}$$

ตัวอย่าง 2.32 กำหนดให้ $y = 3^{\log x}\cos ec\sqrt{x}$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}(3^{\log x}\cos ec\sqrt{x})$$

$$= 3^{\log x}\frac{d}{dx}(\cos ec\sqrt{x}) + \cos ec\sqrt{x}\frac{d}{dx}(3^{\log x})$$

$$= 3^{\log x}(-\cos ec\sqrt{x}\cot\sqrt{x})\frac{d(\sqrt{x})}{dx} + \cos ec\sqrt{x}(3^{\log x})\ln 3\frac{d(\log x)}{dx}$$

$$= -3^{\log x}\cos ec\sqrt{x}\cot\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3^{\log x}\ln 3(\cos ec\sqrt{x})\frac{1}{x}\log e$$

$$= -\frac{3^{\log x}\cos ec\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3^{\log x}\log e\ \ln 3\ \cos ec\sqrt{x}}{x}$$

ตัวอย่าง 2.33 กำหนดให้ $y = \tan\left(\frac{x}{4}\right)\cot\left(\frac{x}{4}\right)$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\tan\left(\frac{x}{4}\right)\cot\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan\left(\frac{x}{4}\right)\frac{d}{dx}\left[\cot\left(\frac{x}{4}\right)\right] + \cot\left(\frac{x}{4}\right)\frac{d}{dx}\left[\tan\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan\left(\frac{x}{4}\right)\left[-\cos ec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right) + \cot\left(\frac{x}{4}\right)\left[\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= -\left[\tan\left(\frac{x}{4}\right)\cos ec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right) + \left[\cot\left(\frac{x}{4}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\tan\left(\frac{x}{4}\right)\cos ec^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{4}\cot\left(\frac{x}{4}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)$$

ตัวอย่าง 2.34 กำหนดให้ $y = \frac{(\cos x)-1}{\sin x}$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{(\cos x)-1}{\sin x}\right]$$

$$y' = \frac{\sin x\frac{d}{dx}\big((\cos x)-1\big)-\big((\cos x)-1\big)\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x)-\big((\cos x)-1\big)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x-(\cos^2 x-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 1-\cot^2 x+\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= 1-\cot^2 x+\cot x\cos ecx$$

ตัวอย่าง 2.35 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}$ จงหา $f'(0)$

<u>วิธีทำ</u> $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}\right]$$

$$= \frac{(\sin 2x+\cos 2x)\frac{d}{dx}(\sin 4x)-(\sin 4x)\frac{d}{dx}(\sin 2x+\cos 2x)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin 2x+\cos 2x)\cos 4x\frac{d(4x)}{dx}-(\sin 4x)\left(\cos 2x\frac{d(2x)}{dx}+(-\sin 2x)\frac{d(2x)}{dx}\right)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$= \frac{(\sin 2x+\cos 2x)\cos 4x(4)-(\sin 4x)(\cos 2x(2)-\sin 2x(2))}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$= \frac{4\cos 4x(\sin 2x+\cos 2x)-(\sin 4x)(2\cos 2x-2\sin 2x)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{4\cos 4(0)(\sin 2(0)+\cos 2(0))-(\sin 4(0))(2\cos 2(0)-2\sin 2(0))}{(\sin 2(0)+\cos 2(0))^2}$$

$$f'(0)=\frac{4(\cos 0)(\sin 0+\cos 0)-(\sin 0)(2\cos 0-2\sin 0)}{(\sin 0+\cos 0)^2}$$

$$=\frac{4(1)(0+1)-(0)(2(1)-2(0))}{(0+1)^2}$$

$$=\frac{4(1)(1)-(0)(2)}{(1)^2}$$

$$=\frac{4-0}{1}=\frac{4}{1}=4$$

ตัวอย่าง 2.36 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}}{\cos x}$ จงหา $f'(0)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\sin x}}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{\cos x\dfrac{d}{dx}(e^{\sin x})-e^{\sin x}\dfrac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(e^{\sin x})\dfrac{d(\sin x)}{dx}-e^{\sin x}(\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(e^{\sin x})\cos x-e^{\sin x}(\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x)^2e^{\sin x}-e^{\sin x}\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$\therefore\quad f'(0)=\frac{(\cos 0)^2\cdot e^{\sin 0}-e^{\sin 0}\sin 0}{(\cos 0)^2}$$

$$=\frac{(1)^2e^0-e^0(0)}{(1)^2}$$

$$=\frac{1(1)-1(0)}{(1)^2}$$

$$=\frac{1-0}{1}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

2.3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Differentiation of inverse trigonometric function) มีบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐาน ดังนี้

ถ้ากำหนดให้ $x=\sin y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y=\arcsin x$ หรือ $y=\sin^{-1}x$, $-1\le x\le 1$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ $x=\cos y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y=\arccos x$ หรือ $y=\cos^{-1}x$, $-1\le x\le 1$ และ $0\le y\le\pi$

ถ้ากำหนดให้ $x=\tan y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y=\arctan x$ หรือ $y=\tan^{-1}x$, $-1\le x\le 1$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ $x=\cot y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y=arc\cot x$ หรือ $y=\cot^{-1}x$, โดยที่ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $0\le y\le\pi$

ถ้ากำหนดให้ $x=\sec y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y=arc\sec x$ หรือ $y=\sec^{-1}x$, $-\infty<x\le -1,\ 1\le x<\infty$ และ $-\pi\le y<-\frac{\pi}{2},\ 0\le y<\frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ $x=\cos ec\,y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y=\arccos ec\,x$ หรือ $y=\cos ec^{-1}x$, $-\infty<x\le -1,\ 1\le x<\infty$ และ $-\pi<y\le-\frac{\pi}{2},\ 0<y\le\frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\cos ec^{-1}u=-\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.37 กำหนดให้ $f(x)=\sin^{-1}(e^x)$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(e^x)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\frac{d(e^x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}(e^x)$$

$$=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

ตัวอย่าง 2.38 กำหนดให้ $f(x)=\cos^{-1}(\sin x^3)$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(\sin x^3)\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x^3)^2}}\frac{d(\sin x^3)}{dx}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x^3}}\cos x^3\frac{d(x^3)}{dx}$$

$$=-\frac{\cos x^3}{\sqrt{1-\sin^2 x^3}}(3x^2)$$

$$=-\frac{3x^2\cos x^3}{\sqrt{1-\sin^2 x^3}}$$

$$=-\frac{3x^2\cos x^3}{\sqrt{\cos^2 x^3}}$$

$$=-\frac{3x^2\cos x^3}{\cos^2 x^3}$$

$$=-3x^2$$

ตัวอย่าง 2.39 กำหนดให้ $f(x)=\ln(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\ln(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})\right] \\
&= \frac{1}{5^{\tan^{-1}(\log 2x)}}\frac{d(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})}{dx} \\
&= \frac{1}{5^{\tan^{-1}(\log 2x)}}(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})\ln 5\frac{d(\tan^{-1}(\log 2x))}{dx} \\
&= (\ln 5)\frac{d(\tan^{-1}(\log 2x))}{dx} \\
&= (\ln 5)\frac{1}{1+(\log 2x)^2}\frac{d(\log 2x)}{dx} \\
&= \frac{\ln 5}{1+\log^2 2x}\left(\frac{1}{2x}\right)\log e\frac{d(2x)}{dx} \\
&= \frac{\ln 5}{(1+\log^2 2x)}\left(\frac{1}{2x}\right)\log e(2) \\
&= \frac{\ln 5\log e}{x(1+\log^2 2x)} \\
&= \frac{\ln 5\log e}{x+x\log^2 2x}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2.40 กำหนดให้ $f(x)=\tan^{-1}(\sin(\ln x))+\cot^{-1}(\sin(\ln x))$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\sin(\ln x))+\cot^{-1}(\sin(\ln x))\right] \\
&= \frac{1}{1+(\sin(\ln x))^2}\frac{d(\sin(\ln x))}{dx}-\frac{1}{1+(\sin(\ln x))^2}\frac{d(\sin(\ln x))}{dx} \\
&= \frac{1}{1+\sin^2(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{d(\ln x)}{dx}-\frac{1}{1+\sin^2(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{d(\ln x)}{dx} \\
&= \frac{\cos(\ln x)}{1+\sin^2(\ln x)}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\cos(\ln x)}{1+\sin^2(\ln x)}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\cos(\ln x)}{x(1+\sin^2(\ln x))}-\frac{\cos(\ln x)}{x(1+\sin^2(\ln x))}=0
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2.41 กำหนดให้ $f(x)=e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u> $$f'(x)=\frac{d}{dx}(e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)})$$

$$=e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\frac{d(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}{dx}$$

$$=e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left(\cos ec^{-1}2x\frac{d(\sec^{-1}2x)}{dx}+\sec^{-1}2x\frac{d(\cos ec^{-1}2x)}{dx}\right)$$

$$=e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left((\cos ec^{-1}2x)\frac{1}{(2x)\sqrt{(2x)^2-1}}\frac{d(2x)}{dx}+(\sec^{-1}2x)\frac{-1}{(2x)\sqrt{(2x)^2-1}}\frac{d(2x)}{dx}\right)$$

$$=e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left(\frac{\cos ec^{-1}2x}{(2x)\sqrt{4x^2-1}}(2)-\frac{\sec^{-1}2x}{(2x)\sqrt{4x^2-1}}(2)\right)$$

$$=e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left(\frac{\cos ec^{-1}2x}{x\sqrt{4x^2-1}}-\frac{\sec^{-1}2x}{x\sqrt{4x^2-1}}\right)$$

$$=\frac{e^{(\cos ec^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}(\cos ec^{-1}2x-\sec^{-1}2x)}{x\sqrt{4x^2-1}}$$

ตัวอย่าง 2.42 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\cot^{-1}x}{e^x}$ จงหา $f'(1)$

<u>วิธีทำ</u> $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot^{-1}x}{e^x}\right)$$

$$=\frac{e^x\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)-\cot^{-1}x\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)-\cot^{-1}x(e^x)}{e^{2x}}$$

$$=\frac{-\frac{e^x}{1+x^2}-e^x(\cot^{-1}x)}{e^{2x}}$$

$$\therefore \quad f'(1) = \frac{-\dfrac{e^1}{1+1^2} - e^1\cot^{-1}1}{e^{2(1)}}$$

$$f'(1) = \frac{-\dfrac{e}{2} - e\cot^{-1}1}{e^2}$$

$$= -\frac{e}{2e^2} - \frac{e\cot^{-1}1}{e^2}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{e\pi}{e^2}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{\pi}{e}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \left(\frac{\pi}{e} \times \frac{2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{2\pi}{2e}$$

$$= \frac{-1-2\pi}{2e}$$

$$= \frac{-(1+2\pi)}{2e}$$

2.4 อนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Logarithmic differentiation)

ถ้าการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่อยู่ในรูปผลคูณหรือผลหารมากกว่า 1 ฟังก์ชัน สามารถทำให้ง่ายขึ้นโดยใช้ลอการิทึม เพื่อลดความซับซ้อนในการหาอนุพันธ์โดยวิธีตรง โดยการนำลอการิทึมใส่เข้าไปทั้ง 2 ข้างของสมการในฟังก์ชันและใช้คุณสมบัติของลอการิทึมช่วยก่อนทำการหาอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$y\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\frac{d}{dx}(\ln y)$$

ตัวอย่าง 2.43 กำหนดให้ $y=(5-x^3)^4(x^4+6)^5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(5-x^3)^4(x^4+6)^5\\ &= \ln(5-x^3)^4+\ln(x^4+6)^5\\ &= 4\ln(5-x^3)+5\ln(x^4+6)\end{aligned}$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left(4\ln(5-x^3)+5\ln(x^4+6)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(4\ln(5-x^3))+\frac{d}{dx}(5\ln(x^4+6))$$

$$=4\frac{d}{dx}(\ln(5-x^3))+5\frac{d}{dx}(\ln(x^4+6))$$

$$=4\frac{1}{(5-x^3)}\frac{d(5-x^3)}{dx}+5\frac{1}{(x^4+6)}\frac{d(x^4+6)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(5-x^3)}(-3x^2)+\frac{5}{(x^4+6)}(4x^3)$$

$$=\frac{-12x^2}{(5-x^3)}+\frac{20x^3}{(x^4+6)}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{-12x^2}{(5-x^3)}+\frac{20x^3}{(x^4+6)}\right)$$

จากโจทย์ $y=(5-x^3)^4(x^4+6)^5$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx}=(5-x^3)^4(x^4+6)^5\left(\frac{-12x^2}{(5-x^3)}+\frac{20x^3}{(x^4+6)}\right)$$

ตัวอย่าง 2.44 กำหนดให้ $y=\dfrac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\frac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}\\ &= \ln(e^x\sqrt{x})-\ln(2x-1)^3\\ &= \ln e^x+\ln\sqrt{x}-3\ln(2x-1)\\ &= x\ln e+\ln x^{\frac{1}{2}}-3\ln(2x-1)\\ &= x+\frac{1}{2}\ln x-3\ln(2x-1)\end{aligned}$$

$\boxed{\ln e = 1}$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{2}\ln x-3\ln(2x-1)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)-(3)\frac{1}{(2x-1)}\frac{d(2x-1)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{(2x-1)}(2)$$

$$=1+\frac{1}{2x}-\frac{6}{(2x-1)}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=y\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{6}{(2x-1)}\right)$$

จากโจทย์ $y=\dfrac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{6}{(2x-1)}\right)$$

ตัวอย่าง 2.45 กำหนดให้ $y=\dfrac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\ln y=\ln\frac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}$$

$$=\ln(\sin x)^{\cos x}-\ln(\tan x)$$

$$=\cos x\ln(\sin x)-\ln(\tan x)$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\big(\cos x\ln(\sin x)-\ln(\tan x)\big)$$

$$=\frac{d}{dx}\cos x\ \ln(\sin x)-\frac{d}{dx}\ln(\tan x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\left(\cos x\frac{d}{dx}(\ln(\sin x))+\ln(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)\right)-\frac{1}{\tan x}\frac{d(\tan x)}{dx}$$

$$=\cos x\frac{1}{\sin x}\frac{d(\sin x)}{dx}+\ln(\sin x)(-\sin x)-\frac{1}{\tan x}(\sec^2 x)$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}(\cos x)-\sin x\ln(\sin x)-\frac{\sec^2 x}{\tan x} \qquad \boxed{\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\cot x\cos x-\sin x\ln(\sin x)-\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\left(\cot x\cos x-\sin x\ln(\sin x)-\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$$

จากโจทย์ $y=\dfrac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}\left(\cot x\cos x-\sin x\ln(\sin x)-\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$

ตัวอย่าง 2.46 กำหนดให้ $y=\dfrac{\arctan x\ \ln x}{x^2}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\ln y=\ln\left(\frac{\arctan x\ln x}{x^2}\right)$$

$$=\ln(\arctan x\ \ln x)-\ln x^2$$

$$=\ln(\arctan x)+\ln(\ln x)-\ln x^2$$

$$=\ln(\arctan x)+\ln(\ln x)-2\ln x$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left(\ln(\arctan x)+\ln(\ln x)-2\ln x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\arctan x}\frac{d(\arctan x)}{dx}+\frac{1}{\ln x}\frac{d(\ln x)}{dx}-2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\arctan x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)+\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2}{x}\right)$$

จากโจทย์ $y=\dfrac{\arctan x\ \ln x}{x^2}$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx}=\frac{\arctan x\ \ln x}{x^2}\left(\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2}{x}\right)$$

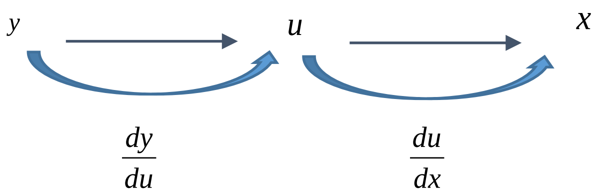
$$=\frac{\arctan x\ \ln x}{x^2(x^2+1)\arctan x}+\frac{\arctan x\ \ln x}{x^2x\ln x}-\frac{2\arctan x\ \ln x}{x^2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x^2(x^2+1)} + \frac{\arctan x}{x^2 x} - \frac{2\arctan x \ln x}{x^3}$$
$$= \frac{\ln x}{x^4+x^2} + \frac{\arctan x}{x^3} - \frac{2\arctan x \ln x}{x^3}$$
$$= \frac{\ln x}{x^4+x^2} + \frac{\arctan x - 2\arctan x \ln x}{x^3}$$

2.5 กฎลูกโซ่ (The chain rule)

ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ และ $F = f \circ g$ เป็นฟังก์ชันประกอบ ซึ่งกำหนดโดย $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ แล้วฟังก์ชัน F หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $F'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

ถ้ากำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $\frac{dy}{dx}$ หาค่าได้ แล้ว



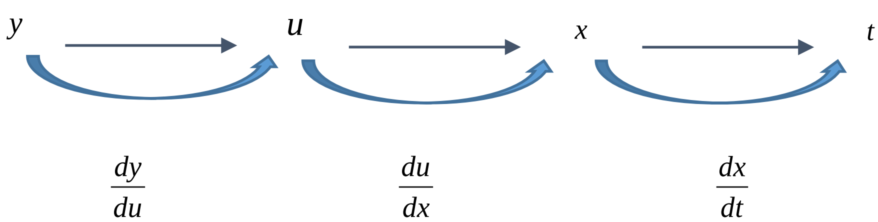
รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันประกอบ

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่มากกว่า 2 ฟังก์ชันขึ้นไป โดยการเพิ่มกฎลูกโซ่ต่อ เพื่อหาอนุพันธ์ได้

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

เช่น ถ้ากำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ และ $x = h(t)$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว



รูปที่ 2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ 3 ฟังก์ชัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้ คือ

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

ตัวอย่าง 2.47 กำหนดให้ $y=u^2-2u+3$ และ $u=2x+1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$$=\frac{d(u^2-2u+3)}{du}\frac{d(2x+1)}{dx}$$

$$=(2u-2)\cdot(2)$$

$$=4u-4$$ จากโจทย์ $u=2x+1$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=4(2x+1)-4$$

$$=8x+4-4$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=8x$

ตัวอย่าง 2.48 ถ้า $y=x^2$ และ $x=\sqrt{3t^2+1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t=1$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d(x^2)}{dx}\frac{d\sqrt{3t^2+1}}{dt}$$

$$=(2x)\frac{1}{2\sqrt{3t^2+1}}\frac{d(3t^2+1)}{dt}$$

$$=x\frac{1}{\sqrt{3t^2+1}}(6t)$$

$$=\frac{6xt}{\sqrt{3t^2+1}}$$ จากโจทย์ $x=\sqrt{3t^2+1}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{6(\sqrt{3t^2+1})t}{\sqrt{3t^2+1}}$$

$$=6t$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=6(1)$$

$$=6$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}=6$

ตัวอย่าง 2.49 กำหนดให้ $y=\dfrac{u^2}{u^2+1}$ และ $u=\sin x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=0$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$$=\frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{u^2+1}\right)\frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$=\left(\frac{(u^2+1)\dfrac{d}{du}(u^2)-u^2\dfrac{d}{du}(u^2+1)}{(u^2+1)^2}\right)\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{(u^2+1)(2u)-u^2(2u)}{(u^2+1)^2}\right)\cos x$$ จากโจทย์ $u=\sin x$

$$=\left(\frac{((\sin x)^2+1)(2\sin x)-(\sin x)^2(2\sin x)}{((\sin x)^2+1)^2}\right)\cos x$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left(\frac{((\sin 0)^2+1)(2\sin 0)-(\sin 0)^2(2\sin 0)}{((\sin 0)^2+1)^2}\right)\cos 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 0=0\\ \\ \cos 0=1\end{array}}$$

$$=\left(\frac{(0^2+1)(2(0))-(0)^2(2(0))}{((0)^2+1)^2}\right)(1)$$

$$=\left(\frac{1(0)-0}{1}\right)(1)=\left(\frac{0}{1}\right)(1)$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

ตัวอย่าง 2.50 กำหนดให้ $y=e^{\sqrt{u}}$, $u=\ln t$ และ $t=\arctan x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dx}$

$$=\frac{d(e^{\sqrt{u}})}{du}\frac{d(\ln t)}{dt}\frac{d(\arctan x)}{dx}$$

$$=e^{\sqrt{u}}\frac{d(\sqrt{u})}{du}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

$$=e^{\sqrt{u}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+x^2}$$ จากโจทย์ $u=\ln t$

$$=e^{\sqrt{\ln t}}\frac{1}{2\sqrt{\ln t}}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+x^2}$$ จากโจทย์ $t=\arctan x$

$$=e^{\sqrt{\ln\arctan x}}\frac{1}{2\sqrt{\ln\arctan x}}\left(\frac{1}{\arctan x}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sqrt{\ln\arctan x}}}{2(x^2+1)\sqrt{\ln\arctan x}\ \arctan x}$$

2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit differentiation)

ถ้าฟังก์ชันหนึ่งที่เขียนอยู่ในรูปสมการโดยแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y โดยรวมกันอยู่ ไม่ได้แยกแสดงออกจากกันอย่างชัดเจน คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบ $F(x,y)=0$ เช่น $2xy^2+xy-x+5y-2=0$ จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันไม่ชัดแจ้งหรือฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายนี้ ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของแต่ละพจน์ทั้งหมดที่อยู่ในสมการ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันของ x แล้วจึงทำการแก้สมการทางคณิตศาสตร์โดยปกติทั่วไปเพื่อหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 2.51 กำหนดให้ $xy^2-2xy+5x-y=0$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด $(1, 0)$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}(xy^2-2xy+5x-y)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(xy^2)-\frac{d}{dx}(2xy)+\frac{d}{dx}(5x)-\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$\left[x\frac{d}{dx}(y^2)+y^2\frac{d}{dx}(x)\right]-2\left[x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)\right]+5\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$\left[x(2y)\frac{dy}{dx}+y^2\right]-2\left[x\frac{dy}{dx}+y\right]+5-\frac{dy}{dx}=0$$

$$2xy\frac{dy}{dx}+y^2-2x\frac{dy}{dx}-2y+5-\frac{dy}{dx}=0$$

$$2xy\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=-y^2+2y-5$$

ดึงตัวร่วม $\dfrac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}(2xy-2x-1)=-y^2+2y-5$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y^2+2y-5}{2xy-2x-1}$$

$\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด $(1, 0)$ คือ การแทนค่า $x=1$ และ $y=0$

ดังนั้น
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}=\frac{-0^2+2(0)-5}{2(1)(0)-2(1)-1}$$

$$=\frac{0+0-5}{0-2-1}$$

$$=\frac{-5}{-3}$$

$$=\frac{5}{3}$$

ตัวอย่าง 2.52 กำหนดให้ $\sqrt{x}y - \ln y - 1 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (4, 1)

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}y - \ln y - 1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}y) - \frac{d}{dx}(\ln y) - \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$\left[\sqrt{x}\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\right] - \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(y) - 0 = 0$$

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(x) - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y}\right) = -\frac{y}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y}\right)}$$

$\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (4, 1) คือ การแทนค่า $x = 4$ และ $y = 1$

ดังนั้น
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{\left(\sqrt{4} - \frac{1}{1}\right)}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2(2)}}{(2-1)} = -\frac{\frac{1}{4}}{1}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

ตัวอย่าง 2.53 กำหนดให้ $e^x\cos y - e^y\sin x = 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}(e^x\cos y - e^y\sin x) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\left[e^x\frac{d}{dx}(\cos y) + \cos y\frac{d}{dx}(e^x)\right] - \left[e^y\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(e^y)\right] = 0$$

$$\left[e^x(-\sin y)\frac{d}{dx}(y) + \cos y(e^x)\right] - \left[e^y(\cos x) + \sin x e^y\frac{d}{dx}(y)\right] = 0$$

$$-e^x\sin y\frac{dy}{dx} + e^x\cos y - e^y\cos x - e^y\sin x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-e^x\sin y\frac{dy}{dx} - e^y\sin x\frac{dy}{dx} = -e^x\cos y + e^y\cos x$$

คูณลบตลอดทั้งสมการ

$$e^x\sin y\frac{dy}{dx} + e^y\sin x\frac{dy}{dx} = e^x\cos y - e^y\cos x$$

ดึงตัวร่วม $\dfrac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(e^x\sin y + e^y\sin x\right) = e^x\cos y - e^y\cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x\cos y - e^y\cos x}{e^x\sin y + e^y\sin x}$$

ตัวอย่าง 2.54 กำหนดให้ $x^2\sin(x+y) = \tan^{-1}x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin(x+y)\right) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$

$$x^2\frac{d}{dx}\left(\sin(x+y)\right) + \sin(x+y)\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2\cos(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) + \sin(x+y)2x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2\cos(x+y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right]+2x\sin(x+y)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2\cos(x+y)+x^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx}+2x\sin(x+y)=\frac{1}{1+x^2}$$

ย้ายพจน์อื่นไปด้านขวามือทั้งหมด เพื่อหาค่า $\frac{dy}{dx}$

$$x^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}-x^2\cos(x+y)-2x\sin(x+y)$$

$$=\frac{1}{x^2\cos(x+y)}\left[\frac{1}{1+x^2}-x^2\cos(x+y)-2x\sin(x+y)\right]$$

$$=\frac{1}{(1+x^2)x^2\cos(x+y)}-\frac{x^2\cos(x+y)}{x^2\cos(x+y)}-\frac{2x\sin(x+y)}{x^2\cos(x+y)}$$

$$=\frac{1}{(x^3+x^2)\cos(x+y)}-1-\frac{2}{x}\left(\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sec(x+y)}{(x^3+x^2)}-1-\frac{2}{x}\tan(x+y)$$

ตัวอย่าง 2.55 กำหนดให้ $xe^y-y\sin(\ln x)=5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}\left(xe^y-y\sin(\ln x)\right)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$\left(x\frac{d}{dx}(e^y)+e^y\right)-\left(y\frac{d}{dx}\sin(\ln x)+\sin(\ln x)\frac{d}{dx}(y)\right)=0$$

$$x(e^y)\frac{d}{dx}(y)+e^y-y\cos(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x)-\sin(\ln x)\frac{dy}{dx}=0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx}+e^y-y\cos(\ln x)\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\frac{dy}{dx}=0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx}-\sin(\ln x)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cos(\ln x)-e^y$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(xe^{y}-\sin(\ln x)\right)=\frac{y}{x}\cos(\ln x)-e^{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}\cos(\ln x)-e^{y}}{xe^{y}-\sin(\ln x)}$$

$$=\frac{1}{xe^{y}-\sin(\ln x)}\left[\frac{y}{x}\cos(\ln x)-e^{y}\right]$$

$$=\frac{y\cos(\ln x)}{x(xe^{y}-\sin(\ln x))}-\frac{e^{y}}{xe^{y}-\sin(\ln x)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\cos(\ln x)}{x^{2}e^{y}-x\sin(\ln x)}-\frac{e^{y}}{xe^{y}-\sin(\ln x)}$$

2.7 อนุพันธ์อันดับสูง (Derivative of higher order)

ถ้าฟังก์ชัน $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ โดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง คือ y' หรือ $f'(x)$ โดยสามารถหาอนุพันธ์อันดับต่อไปเป็นอันดับที่สองได้ เขียนแทนด้วย

$$y'' \text{ หรือ } f''(x) \text{ หรือ } \frac{d^{2}y}{dx^{2}} \text{ หรือ } \frac{d^{2}f(x)}{dx^{2}}$$

และอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่า ผลลัพธ์จากการหาอนุพันธ์ n ครั้ง เขียนแทนได้ด้วย

$$y^{(n)} \text{ หรือ } f^{(n)}(x) \text{ หรือ } \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} \text{ หรือ } \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}}$$

ตัวอย่าง 2.56 กำหนดให้ $y=3x^{4}+5x^{2}-3x+1$ จงหา y'''

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=12x^{3}+10x-3$$

$$y''=36x^{2}+10$$

$$y'''=72x$$

ตัวอย่าง 2.57 กำหนดให้ $y = x\ln x + \log x$ จงหา y''

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \left(x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x) \right) + \frac{1}{x}\log e\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x) + \ln x + \frac{1}{x}\log e$$

$$= 1 + \ln x + \frac{\log e}{x}$$

$$= x^{-1}\log e + \ln x + 1$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\log e + \ln x + 1\right)$$

$$= (-1)x^{-2}\log e + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\log e}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\log e}{x^2}$$

ตัวอย่าง 2.58 กำหนดให้ $x^2 + xy - y^2 + 5 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ณ จุด $(-1,-1)$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^2 + 5\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x + x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x) - 2y\frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(x-2y\right)=-2x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x-2y}$$

$\frac{dy}{dx}$ ณ จุด $(-1,-1)$ คือ การแทนค่า $x=-1$ และ $y=-1$

ดังนั้น $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=\frac{-2(-1)-(-1)}{(-1)-2(-1)}$$

$$=\frac{2+1}{(-1)+2}$$

$$=3$$

หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบ x

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(-2x-y)-(-2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-2y)(-2-\frac{dy}{dx})-(-2x-y)(1-2\frac{dy}{dx})}{(x-2y)^2}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่จุด $(-1,-1)$ คือ การแทนค่า $x=-1$, $y=-1$ และ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=3$

ดังนั้น $$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(-1,-1)}=\frac{\left((-1)-2(-1)\right)(-2-3)-\left(-2(-1)-(-1)\right)\left(1-2(3)\right)}{\left((-1)-2(-1)\right)^2}$$

$$=\frac{(-1+2)(-5)-(2+1)\left(1-6\right)}{\left(-1+2\right)^2}$$

$$=\frac{1(-5)-3\left(-5\right)}{\left(1\right)^2}$$

$$=\frac{-5+15}{1}$$

$$=10$$

ตัวอย่าง 2.59 กำหนดให้ $y = e^x - x^{-1}$ จงหา $y^{(n)}$

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = e^x - (-1)x^{-1-1}$$

$$= e^x + x^{-2}$$

$$y'' = e^x + (-2)x^{-2-1}$$

$$= e^x - 2x^{-3}$$

$$y''' = e^x - 2(-3)x^{-3-1}$$

$$= e^x + 6x^{-4}$$

$$y^{(4)} = e^x + 6(-4)x^{-4-1}$$

$$= e^x - 24x^{-5}$$

$$\vdots$$

เขียนให้อยู่ในรูปลำดับ n

เมื่อกำหนดให้ $n = 1$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 1

$$y' = e^x + x^{-2} = e^x + (-1)^{1+1}\ (1)x^{-1-1}$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 2$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 2

$$y'' = e^x - 2x^{-3} = e^x + (-1)^{2+1}\ (1\times 2)x^{-2-1}$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 3$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 3

$$y''' = e^x + 6x^{-4} = e^x + (-1)^{3+1}\ (1\times 2\times 3)x^{-3-1}$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 4$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 4

$$y^{(4)} = e^x - 24x^{-5} = e^x + (-1)^{4+1}\ (1\times 2\times 3\times 4)x^{-4-1}$$

$$\vdots$$

ดังนั้น $y^{(n)} = e^x + (-1)^{n+1}\ n!x^{-(n+1)}$ โดยที่ $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

ในการหลักการทางฟิสิกส์ ถ้า $s = f(t)$ เป็นฟังก์ชันระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ในเวลา t การหาความเร็ว v จะได้จากอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ s เมื่อเทียบกับ t หรือ $v = \dfrac{ds}{dt}$ และการหาความเร่ง a ของวัตถุที่เวลา t จะได้จากอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ $a = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

ตัวอย่าง 2.60 ถ้ากล่องใบหนึ่งถูกลากให้เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 10t$ จงหาความเร่ง a ณ จุดที่ความเร็ว $v = 0$

<u>วิธีทำ</u> ความเร็ว $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 10t\right)$$

$$= \frac{1}{3}(3)t^{3-1} - \frac{3}{2}(2)t^{2-1} - 10$$

$$= t^2 - 3t - 10$$

ณ จุดที่ความเร็ว $v = 0$

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t-5)(t+2) = 0$$

$$t = -2, 5$$

ความเร่ง $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(t^2 - 3t - 10\right)$$

$$\therefore\ a = 2t - 3$$

เมื่อ $t = -2$ $\quad \therefore a = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

เมื่อ $t = 5$ $\quad \therefore a = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$

ดังนั้น ความเร่ง a ณ จุดที่ความเร็ว $v = 0$ คือ $-7, 7$

บทสรุป

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถหาได้โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ เพื่อหาอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่มีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นอยู่เสมอ ทั้งยังมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย อนุพันธ์เชิงลอการิทึม กฎลูกโซ่หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย และอนุพันธ์อันดับสูง ซึ่งจะมีทฤษฎีบทของการหาอนุพันธ์ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน รวมทั้งการจัดผลเฉลยให้อยู่ในรูปที่ถูกต้อง

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = -5x + 3$

1.2 $f(x) = 2x^2 - 5$

1.3 $f(x) = x^2 + x - 3$

1.4 $f(x) = 7 - \sqrt{x}$

1.5 $f(x) = x(x+3)$

1.6 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1.7 $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

1.8 $f(x) = \dfrac{5-x}{x}$

1.9 $f(x) = (x-3)^2$

1.10 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

1.11 $f(x) = -x^2 + 3$

1.12 $f(x) = x(x+1)(x+2)$

1.13 $f(x) = 2x^2 - x + 7$

1.14 $f(x) = x\sqrt{x} + 1$

1.15 $f(x) = x^2(x+3)$

1.16 $f(x) = \dfrac{5}{x}$

1.17 กำหนดให้ $f(x) = x + 3$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(3)$

1.18 กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + x + 1$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(3)$

1.19 กำหนดให้ $f(x)=\frac{1}{x}-x$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

1.20 กำหนดให้ $f(x)=(1-x)^2$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(2)$

1.21 กำหนดให้ $f(x)=\frac{x}{1-x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(-1)$

1.22 กำหนดให้ $f(x)=x\sqrt{x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

1.23 กำหนดให้ $f(x)=(x-5)(x-7)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(4)$

1.24 กำหนดให้ $f(x)=x(x^2+3)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

1.25 กำหนดให้ $f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x)=(2-7x)^5$

2.2 $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

2.3 $f(x)=\sqrt[3]{3x^2-4}$

2.4 $f(x)=\left(\frac{1}{3x-2}\right)^4$

2.5 $f(x)=(x^2+1)(5x-2)$

2.6 $f(x)=(x^2-3)^2(3x+2)$

2.7 $f(x)=(3x-2)(x+2)(x-7)$

2.8 $f(x)=\frac{7x+1}{x^2-3}$

2.9 $f(x)=\left(\frac{x+7}{8-3x}\right)^3$

2.10 กำหนดให้ $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

2.11 กำหนดให้ $f(x)=(x-8)^{-2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(9)$

2.12 กำหนดให้ $f(x)=(3x+2)(x^2-3)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

2.13 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{6}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(9)$

2.14 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x+3}{1-3x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

2.15 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{3-x^3}{9-x^2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $y=e^{e^x}$ 3.2 $y=6^{6^x}$

3.3 $y=x\log x$ 3.4 $y=5^{x^3}e^{2x}$

3.5 $y=(x^2-3)^{(x^2-3)}$ 3.6 $y=5^{\log x}\,e^x$

3.7 $y=\ln(\log x)$ 3.8 $y=x\log\sqrt{x-1}$

3.9 $y=2^{\ln x}e^{x^2}$ 3.10 $y=e^{(x\log x)}$

3.11 กำหนดให้ $f(x)=\ln(\ln(5x-2))$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

3.12 กำหนดให้ $f(x)=\log_3(3x^2-1)^5$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

3.13 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1-e^x}{e^{2x}+2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

3.14 กำหนดให้ $f(x)=\log\dfrac{x(x-3)^2}{x+1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

3.15 กำหนดให้ $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(2)$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $y=\sin x^2-2\tan x^2$ 4.2 $y=e^{\log(\sin x)}+\log^2(\cos x)$

4.3 $y=\cos^3\left(\dfrac{x}{6}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{6}\right)$ 4.4 $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$

4.5 $y=\cos(\tan\sqrt{\cos x})$

4.6 $y=(1-\tan^2 x)^4$

4.7 $y=\dfrac{\sec x}{2x}$

4.8 $y=\operatorname{cosec}^2(\cos x)$

4.9 $y=5^{\ln(\sin x)}$

4.10 $y=\tan\sqrt{1-\sin x}$

4.11 $y=2\sin x+x^2\cos^3 x$

4.12 $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

4.13 กำหนดให้ $f(x)=\ln(\sin^2 3x)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

4.14 กำหนดให้ $f(x)=x\cos(e^{2x}-1)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

4.15 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\cos x}{2\sin x-1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $y=\sin^{-1}(e^{2x})$

5.2 $f(x)=\arccos(\sin x)$

5.3 $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

5.4 $f(x)=(\cot^{-1}\sqrt{x})^4$

5.5 $y=e^{\operatorname{arcsec}2x}$

5.6 $f(x)=x^3\tan^{-1}(\ln x)$

5.7 $y=\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5.8 $f(x)=\sec^{-1}x\ \operatorname{cosec}^{-1}x$

5.9 $y=\log x\tan^{-1}x$

5.10 $f(x)=\dfrac{\cot^{-1}x}{\sqrt{x}}$

5.11 $y=\ln\left(\sin^{-1}(\tan x)\right)$

5.12 $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$

5.13 $y=\sqrt{x}\cot^{-1}x$

5.14 กำหนดให้ $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ จงหา $f'(1)$

5.15 กำหนดให้ $f(x)=x+\cos^{-1}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ จงหา $f'(0)$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $y=\dfrac{(5x-1)^4\sqrt{x-7}}{\sqrt[3]{x}(2x+9)^5}$

6.2 $y=(2x^3+4)^3\sqrt{4x^4+4}\sqrt[3]{1-x^3}$

6.3 $y=\dfrac{e^x\sin x}{x^x}$

6.4 $y=\dfrac{\sin^{-1}x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

6.5 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

6.6 $y=x^2e^{3x}\tan^3 x$

6.7 $y=\dfrac{x^2\cos 5x}{(x^2+1)^3(x-1)^2}$

6.8 $y=\dfrac{x^4\sin^2 x}{\sqrt{x+1}}$

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7.1 กำหนดให้ $y=t^2+3t-1$ และ $t=x^2+3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=1$

7.2 กำหนดให้ $y=u^2$ และ $u=\dfrac{1-x}{x+1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=0$

7.3 กำหนดให้ $y=\ln x$ และ $x=e^t$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$

7.4 กำหนดให้ $y=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$ และ $x=\sqrt{t}$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$

7.5 กำหนดให้ $y=3u^2+2$ และ $u=\dfrac{1}{x-1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

7.6 กำหนดให้ $y=\dfrac{u-1}{u+1}$ และ $u=x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=2$

7.7 กำหนดให้ $y=\dfrac{u+2}{u-1}$,$u=(3s-1)^2$ และ $s=1-2t^3$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t=-1$

7.8 กำหนดให้ $y=u^3-u^2$ และ $u=4x^2+x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=3$

7.9 กำหนดให้ $y=\sqrt{u}$,$u=v(3-2v)$ และ $v=x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=-1$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

8.1 กำหนดให้ $xy - y + 2x + 5 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

8.2 กำหนดให้ $xy^2 + x^2y - x^2 + y^2 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

8.3 กำหนดให้ $x\sin y - \tan^{-1} x = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 0)$

8.4 กำหนดให้ $e^y \cos x - ye^x = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x, y) = (0, 1)$

8.5 กำหนดให้ $x\ln y - \cos y = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 1)$

9. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 กำหนดให้ $y = x^2 - \sqrt{x+1}$ จงหา y''

9.2 กำหนดให้ $f(x) = (x^2+1)^3$ จงหา $f^{(4)}(x)$

9.3 กำหนดให้ $r(t) = 5t^{\frac{1}{2}} - e^{2t}$ จงหา $r'''(t)$

9.4 กำหนดให้ $u(x) = \cos 2x - \ln 5x$ จงหา $u''(x)$

9.5 กำหนดให้ $y = x\sin x - 3x^2$ จงหา $y''(x)$

9.6 กำหนดให้ $y = \sin^2 x - x + 1$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 0$

9.7 กำหนดให้ $x^2 + xy - y^2 = 0$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 0$

9.8 จงหา $f^{(12)}(x)$ เมื่อ $f(x) = \sin x$

9.9 จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

9.10 จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ $f(x) = xe^x$

เอกสารอ้างอิง

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

จินดา อาจริยะกุล. (2545). **อนุพันธ์และการประยุกต์**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

สุวรรณ ถังมณี และบุษราพร เหลืองมาลาวัฒน์. (2558). **แคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับผู้เริ่มเรียน**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.

การประยุกต์ของอนุพันธ์ บทที่ 3

Applications of Differentiation

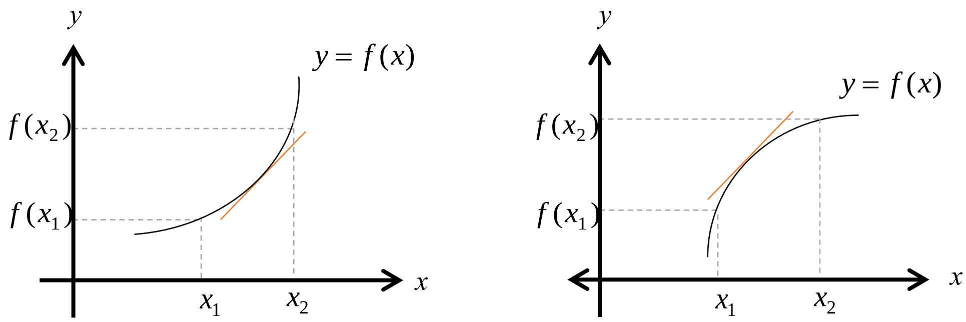
การประยุกต์อนุพันธ์สามารถใช้ได้ในศาสตร์หลากหลายด้านของการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ที่ใช้ในการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ เมื่อเทียบกับเวลา ในเศรษฐศาสตร์ใช้กับทางด้านอุปสงค์อุทาน การจ้างงาน และการวิเคราะห์รวมไปถึงทางด้านการเงินที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์ต่อกันได้อย่างเป็นระบบโดยภาพรวม ทางด้านบริหารธุรกิจ ประยุกต์การคำนวณหาค่าผลกำไร ขาดทุน จุดคุ้มทุน จากค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน เป็นต้น

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจการประยุกต์ของอนุพันธ์ในหลายศาสตร์
2. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้
3. วิเคราะห์เชื่อมโยงความสัมพันธ์ต่อกันได้อย่างเป็นระบบ

3.1 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing and decreasing functions)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงใด ๆ เมื่อสำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 ในช่วงนั้น ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

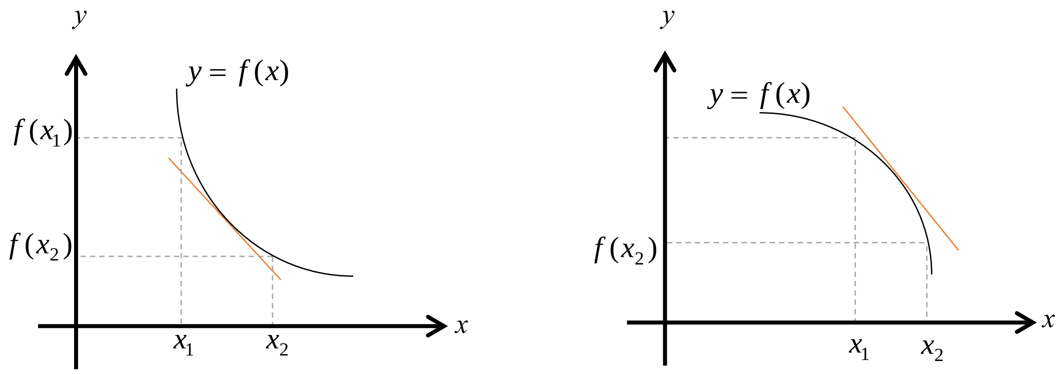


รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันเพิ่ม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป จะเห็นได้ว่า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) < f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่มีความชันเป็นบวกสำหรับทุก $x_1 < x < x_2$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใด ๆ เมื่อสำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 ในช่วงนั้น ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

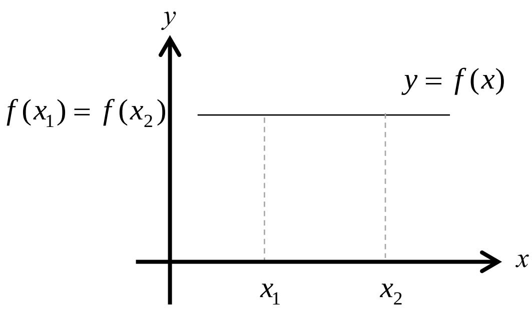


รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันลด

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป จะเห็นได้ว่า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) > f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่มีความชันเป็นลบสำหรับทุก $x_1 < x < x_2$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว (Constant function) ในช่วงใด ๆ เมื่อสำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 ในช่วงนั้น ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

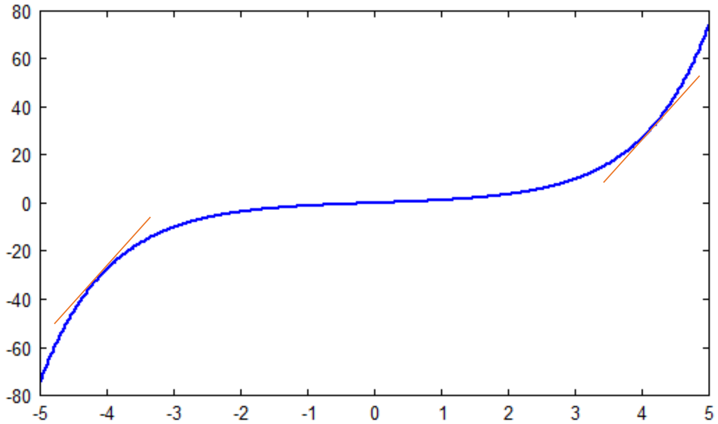


รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันค่าคงตัว

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 จะได้ $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว

ตัวอย่าง 3.1 จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังรูป จงพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วงใด ๆ



รูปที่ 3.4 กราฟของฟังก์ชันเพิ่ม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $[-5,-1]$ และ $[1,5]$ และเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วง $[-1,1]$ โดยสังเกตได้จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง

$[-5,-1]$ และ $[1,5]$

x	-5	-3	-1
y	-70	-10	0

x	1	3	5
y	0	10	70

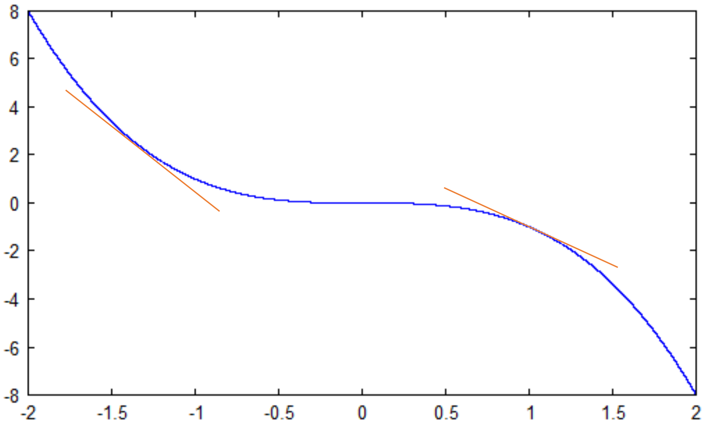
ฟังก์ชันเพิ่ม จะสังเกตได้ว่า ถ้าค่า x เพิ่ม แล้ว y เพิ่ม หรือ ถ้าค่า x ลด แล้ว y ลด ซึ่งจะเป็นไปในทิศทางเดียวกัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วง

$[-1,1]$

x	-1	0	1
y	0	0	0

ฟังก์ชันค่าคงตัว ไม่ว่า x จะเพิ่มหรือลด ค่า y มีค่าเท่าเดิมเสมอ

ตัวอย่าง 3.2 จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังรูป จงพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วงใด ๆ



รูปที่ 3.5 กราฟของฟังก์ชันลด
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $[-2,2]$ โดยสังเกตได้จาก

x	-2	-1	0	1	2
y	8	1	0	-1	-8

ฟังก์ชันลดสังเกตได้ว่า ถ้าค่า x เพิ่ม แล้ว y ลด หรือ ถ้าค่า x ลด แล้ว y เพิ่ม ซึ่งจะเป็นไปในทิศทางตรงกันข้าม

3.2 จุดวิกฤต (Critical points)

จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ จุดบนกราฟ ณ ที่ $x=c$ โดย $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ รวมถึงกรณี $f'(c)=\infty$ ด้วย และจะเรียก $f(c)$ ว่าค่าวิกฤต (Critical value) ของฟังก์ชัน $f(x)$

<u>ขั้นตอนการหาจุดวิกฤต</u>

1. จากบทนิยาม คือ หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน โดย $f'(x)=0$
2. แก้สมการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้จุดวิกฤต ณ จุด x ใด ๆ

ตัวอย่าง 3.3 ถ้า $f(x)=2x^3-6x^2-18x+1$ จงหาจุดวิกฤตและค่าวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> $f'(x)=6x^2-12x-18$

จากบทนิยาม $f'(x)=0$

$$6x^2-12x-18=0$$

$$6(x^2-2x-3)=0$$

$$6(x+1)(x-3)=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore \quad x=-1,3$$

ค่าวิกฤต ณ ที่ $x=-1$ $f(-1)=2(-1)^3-6(-1)^2-18(-1)+1$

$$= 2(-1)-6+18+1$$

$$= 11$$

ค่าวิกฤต ณ ที่ $x=3$ $f(3)=2(3)^3-6(3)^2-18(3)+1$

$$= 2(27)-6(9)-54+1$$

$$= -53$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 2 จุด คือ $(-1, 11)$ และ $(3, -53)$

ตัวอย่าง 3.4 ถ้า $f(x)=x\ln x-1$ จงหาจุดวิกฤตและค่าวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ $x>0$ เนื่องจากค่าหลัง log หรือ ln ต้องมีค่ามากกว่า 0

$$f'(x)=x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)$$

$$=x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x)+\ln x$$

$$f'(x) = 1 + \ln x \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$1 + \ln x = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$x = e^{-1}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{e}$$

ค่าวิกฤต ณ ที่ $x = \frac{1}{e}$

$$f(x) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{e}\ln e^{(-1)} - 1$$

$$= \frac{1}{e}(-1) - 1$$

$$= -\frac{1}{e} - 1$$

ดังนั้น จุดวิกฤต คือ $= \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e} - 1\right)$

3.3 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน (Extreme value of function)

ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน คือ ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน (Maximum and minimum of function)

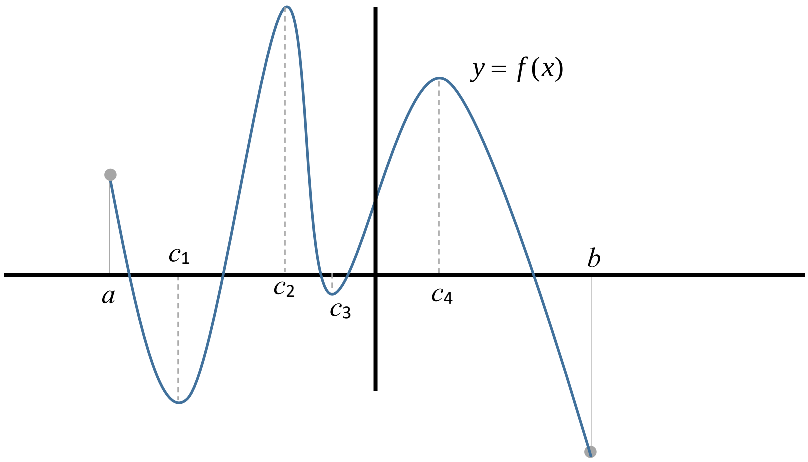
3.3.1 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน (Absolute maximum and minimum of function)

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \ge f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \le f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน สามารถเรียกได้ว่า “ค่าสุดขีดสัมบูรณ์” (Absolute extreme)

การพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน f คือ สมาชิกทุกตัว หรือทุกค่าของ x อยู่ระหว่างค่า a และ b ดังรูป



รูปที่ 3.6 กราฟแสดงค่าสุดขีดสัมบูรณ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากกราฟ

- ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(c_2)$ และจุดสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(b)$ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $(b, f(b))$

ข้อสังเกต ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันจะมีได้เพียงอย่างละ1 ค่าเท่านั้น ในช่วงโดเมนของฟังก์ชัน f

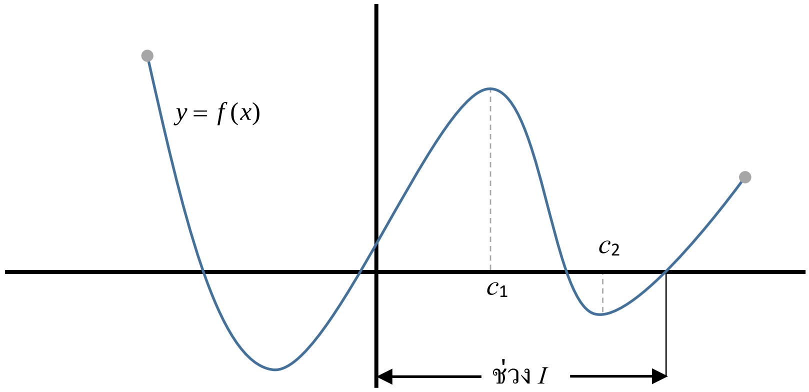
3.3.2 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน (Local or relative maximum and minimum of function)

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง I ช่วงหนึ่ง ๆ ของโดเมนของ f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง I ช่วงหนึ่ง ๆ ของโดเมนของ f

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน สามารถเรียกได้ว่า “ค่าสุดขีดสัมพัทธ์” (Local or relative extreme)

พิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ โดยช่วง I ช่วงหนึ่ง ๆ ของโดเมนในฟังก์ชัน f ดังรูป



รูปที่ 3.7 กราฟแสดงค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

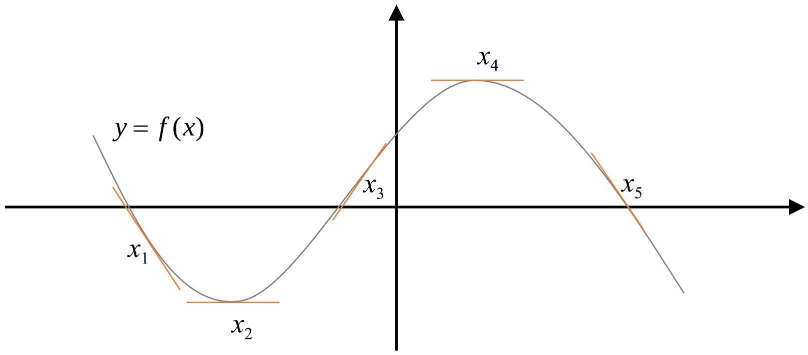
จากกราฟ
- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_1)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_1, f(c_1))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$

ข้อสังเกต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าสูงสุดที่แสดงอยู่ในกราฟและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ก็ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าต่ำสุดที่อยู่ในกราฟเช่นกัน เนื่องจากสนใจในช่วง I ช่วงหนึ่งเท่านั้นในโดเมนของฟังก์ชัน f

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด ๆ และ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุกค่า x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนั้น
2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุกค่า x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มลดช่วงนั้น
3. ถ้า $f'(x)=0$ สำหรับทุกค่า x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วงนั้น

หมายเหตุ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน f หรือ $f'(x)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดใด ๆ นั้นเอง



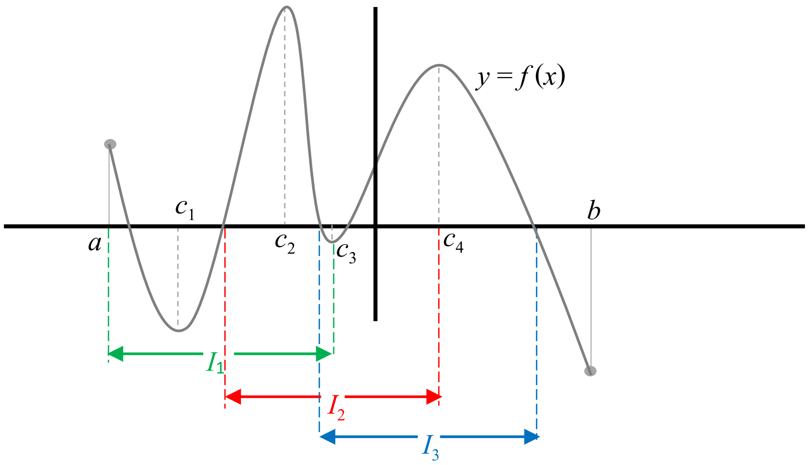
รูปที่ 3.8 กราฟแสดงความชันของเส้นสัมผัส
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป ให้จุด x_1, x_2, x_3, x_4 และ x_5 เป็นจุดของเส้นสัมผัสความชันบนเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งของจุดต่าง ๆ จะได้ว่า

- ที่จุด x_1 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นค่าลบ และเส้นโค้งมีลักษณะดิ่งลง
- ที่จุด x_2 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นศูนย์
- ที่จุด x_3 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นค่าบวก และเส้นโค้งมีลักษณะดิ่งขึ้น
- ที่จุด x_4 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นศูนย์
- ที่จุด x_5 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นค่าลบ และเส้นโค้งมีลักษณะดิ่งลง

โดยที่จุด x_2 จะเปลี่ยนจากโค้งลงเป็นโค้งขึ้น โดยให้ค่าต่ำสุด ณ จุดนั้น ซึ่งเปลี่ยนจากความชันลบไปเป็นบวกและ x_5 เปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง โดยให้ค่าสูงสุด ณ จุดนั้น ซึ่งเปลี่ยนจากความชันบวกไปเป็นลบ

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง I_1 , I_2, I_3 และค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันในโดเมน f จากกราฟ



รูปที่ 3.9 กราฟแสดงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ในช่วง I_1

- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_1)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_1, f(c_1))$

ในช่วง I_2

- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_3)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_3, f(c_3))$

ในช่วง I_3

- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_4)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_4, f(c_4))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_3)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_3, f(c_3))$

ในโดเมน f

- ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(b)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(b, f(b))$

3.3.3 การทดสอบหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

การหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน จะต้องมีเงื่อนไขโดยพิจารณาที่จุดวิกฤต ดังนิยามในหัวข้อ 3.2 ที่แสดงไว้ให้แล้ว โดยมี 2 วิธี คือ

1. <u>การพิจารณาของการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง</u>

- ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ แสดงว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $f(c)$ ที่ $x = c$ โดยจากการแทนค่าใกล้ c จากทางซ้ายและทางขวาใน $f'(x)$
- ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $f(c)$ ที่ $x = c$ โดยจากการแทนค่าใกล้ c จากทางซ้ายและทางขวาใน $f'(x)$
- ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ หรือจากค่าลบไปเป็นค่าบวกแสดงว่าฟังก์ชัน f ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ที่ $x = c$

หมายเหตุ การแทนค่าที่น้อยกว่าและมากกว่า c เพียงเล็กน้อยเท่านั้น

การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน โดยเริ่มจากการหาจุดวิกฤตและทำการพิจารณาค่าในแต่ละช่วงของ $f'(x)$ ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

ขั้นตอนการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

1. จากบทนิยาม คือหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน โดย $f'(x) = 0$
2. แก้สมการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ค่าวิกฤต ณ จุด x ใด ๆ
3. พิจารณาค่าในแต่ละช่วงของ $f'(x)$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ และใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u> $f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$

1. จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$6x^2+18x-24=0$$

หาร 6 ตลอดทั้งสมการ $x^2+3x-4=0$

$$(x+4)(x-1)=0$$

$\therefore$ ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต คือ $x = 1, -4$

ค่าวิกฤต ที่ $x=1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^3+9(1)^2-24(1)+5 \\ &= 2(1)+9(1)-24+5 \\ &= 2+9-24+5 \\ &= -8 \end{aligned}$$

ค่าวิกฤต ที่ $x=-4$

$$\begin{aligned} f(-4) &= 2(-4)^3+9(-4)^2-24(-4)+5 \\ &= 2(-64)+9(16)+96+5 \\ &= -128+144+96+5 \\ &= 115 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 2 จุด คือ (1, -8) และ (-4, 115)

2. นำค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤตมาพิจารณาโดยการทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายจากทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

- พิจารณา จุดวิกฤต (-4, 115)

$f'(x<-4)$ $\quad$ $f'(x>-4)$

เลือกที่ใกล้ เช่น $x=-5$ $\quad$ $x=-3$

$x=-4$

จาก $f'(x)=6(x+4)(x-1)$

$$\begin{aligned} f'(-5) &= 6(-5+4)(-5-1) \\ &= (+)(-)(-) \\ &= (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 6(-3+4)(-3-1) \\ &= (+)(+)(-) \\ &= (-) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x=-4$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 116 และจุด (-4, 116) เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

- พิจารณา จุดวิกฤต $(1, -8)$

$f'(x<1)$ $\qquad$ $f'(x>1)$

เลือกที่ใกล้ คือ $\qquad x=0 \qquad x=2$

1

จาก $f'(x)=6(x+4)(x-1)$

$$f'(0)=6(0+4)(0-1) \qquad f'(2)=6(2+4)(2-1)$$

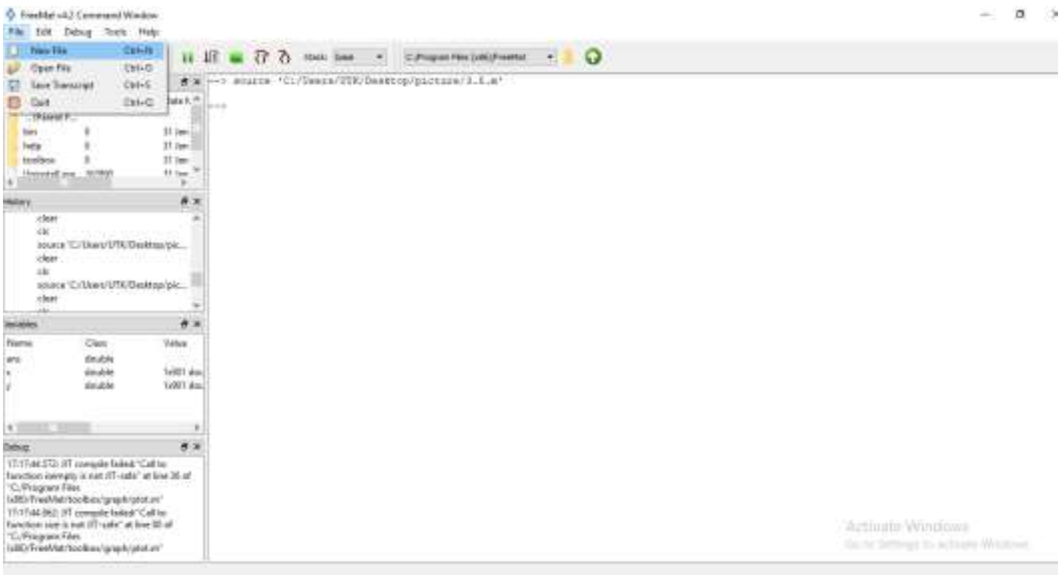
$$=(+)(+)(-) \qquad =(+)(+)(+)$$

$$=(-) \qquad =(+)$$

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x=1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ –8 และจุด (1, –8) เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$ จากการใช้โปรแกรม FreeMat เพื่อสามารถใช้ในการตรวจสอบได้ว่าได้ทำการหาค่าหรือจุดต่าง ๆ ถูกต้องหรือไม่ โดยมีวิธีการดังนี้

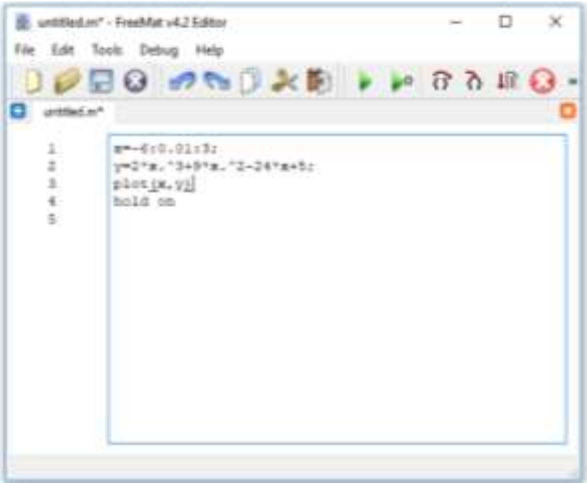
1. เปิดโปรแกรม FreeMat > New File ดังภาพ



รูปที่ 3.10 โปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

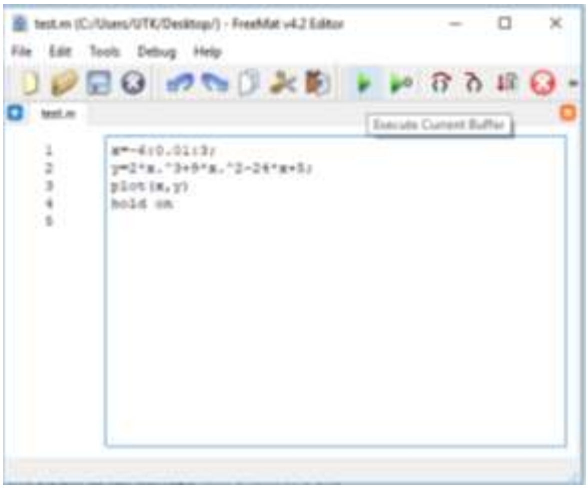
2. จะได้ดังภาพ และเขียนโปรแกรมสำหรับการสร้างกราฟ



รูปที่ 3.11 การประมวลผลของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

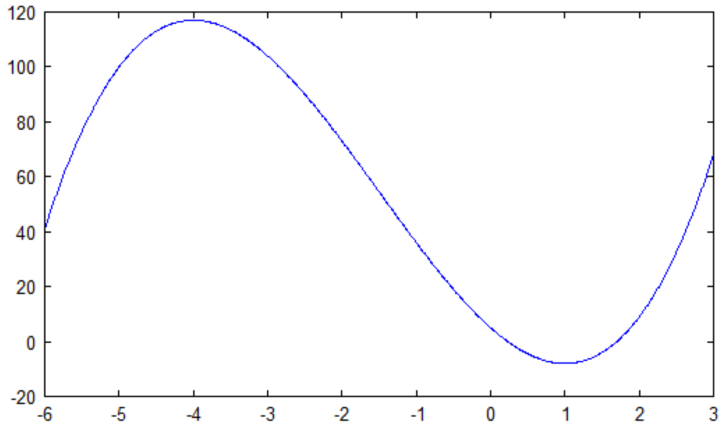
3. ทำการบันทึกไฟล์พร้อมตั้งชื่อและประมวลผลโปรแกรม save > save as > test.m > Execute 



รูปที่ 3.12 การบันทึกไฟล์และประมวลผลของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะได้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$



รูปที่ 3.13 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 116 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (-4, 116)

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -8 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ (1, -8)

ข้อดีจากการที่สร้างกราฟได้เอง คือ สามารถตรวจสอบคำตอบจากการคำนวณได้จากรูป

ตัวอย่าง 3.7 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}$ และใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{5x}{3x^{\frac{1}{3}}}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}} \qquad =\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

1. จากบทนิยาม $f'(x)=0$

$$\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}=0 \qquad \text{โดยที่ } x \neq 0$$

$$5x-4=0$$

$$5x=4$$

$$x=\frac{4}{5}$$

2. เนื่องจาก $f'(0)=$ ไม่มีค่า เมื่อ $x=0$ จะได้ $f(0)=0$

$\therefore$ ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $x=0, \frac{4}{5}$

ค่าวิกฤต ที่ $x=0$ $\qquad f(0)=0$

ค่าวิกฤต ที่ $x=\frac{4}{5}$

$$f\left(\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{5}{3}}-2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{5}{3}}-2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}-2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{4}{5}-2\right]$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{4}{5}-(2)\frac{5}{5}\right]$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$=-\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 2 จุด คือ (0, 0) และ $\left(\frac{4}{5},-\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$

3. นำค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤตมาพิจารณาโดยการทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายจากทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

- พิจารณา จุดวิกฤต $(0, 0)$

$f'(x) < 0$ $\qquad$ $f'(x) > 0$

เลือกที่ใกล้ คือ $x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2}$

(-) $\qquad$ 0 $\qquad$ (-)

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายไม่เปลี่ยน แสดงว่า $f(x)$ ณ จุดที่ $x = 0$ ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดที่ $x = 0$

- พิจารณา จุดวิกฤต $\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$

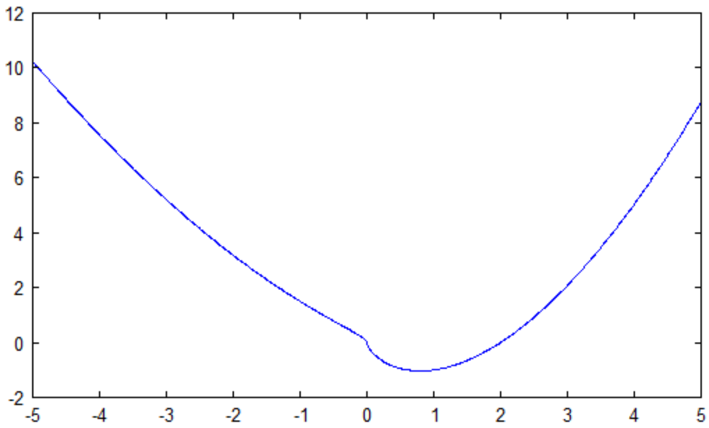
$f'(x) < \frac{4}{5}$ $\qquad$ $f'(x) > \frac{4}{5}$

เลือกที่ใกล้ คือ $x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x = 1$

(-) $\qquad$ $\frac{4}{5}$ $\qquad$ (+)

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x = \frac{4}{5}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $-\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ และจุด $\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$ โดยใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.14 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 3.8 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^4-5$ และใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u> $f'(x)=4x^3$

1. จากบทนิยาม

$$f'(x)=0$$
$$4x^3=0$$
$$x=0$$

2. ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $\therefore \quad x=0$

ค่าวิกฤต ที่ $x=0$

$$f(0)=0^4-5$$
$$=-5$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 1 จุด คือ (0, -5)

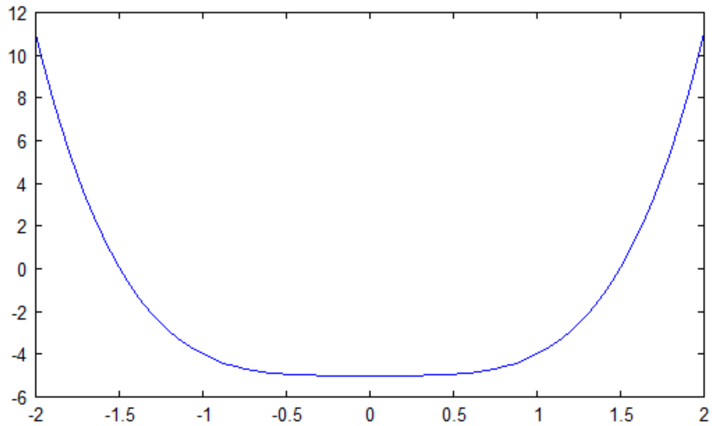
3. นำค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤตมาพิจารณาโดยการทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายจากทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

- พิจารณา จุดวิกฤต (0, -5)

	$f'(x)<0$		$f'(x)>0$
เลือกที่ใกล้ คือ	$x=-1$		$x=2$
	(-)	0	(+)

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x=0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -5 และจุด (0, -5) เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^4-5$ จะได้จากใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.15 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^4-5$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. <u>การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันโดยอนุพันธ์อันดับที่สอง</u>

เป็นวิธีการที่ง่ายในการหาโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองตามวิธีการต่อไปนี้

ขั้นตอนการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

1. จากบทนิยาม คือหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน โดย $f'(x)=0$
2. แก้สมการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ค่าวิกฤต ณ จุด x ใด ๆ
3. ทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์จากค่าวิกฤต โดยการหา $f''(x)$ เช่น ถ้าได้ ค่าวิกฤต $x=a$ และพิจารณาดังนี้

3.1 ถ้า $f''(a) < 0$ แล้ว $f(a)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด a

3.2 ถ้า $f''(a) > 0$ แล้ว $f(a)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด a

3.3 ถ้า $f''(a) = 0$ ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ซึ่งจะต้องกลับไปใช้วิธีการหาแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 3.9 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

<u>วิธีทำ</u> $$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

1. จากบทนิยาม $$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

หาร 3 ตลอดทั้งสมการ $$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

2. ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $\therefore \; x = -3, 1$

3. ทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์จากค่าวิกฤต โดยการหา $f''(x) = 6x + 6$

   นำค่า $x = -3, 1$ แทนใน $f''(x)$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = -3$

$$f''(-3) = 6(-3) + 6 = -12 < 0$$

ดังนั้น $f''(-3)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 1$$

$$= -27 + 3(9)^2 + 27 + 1 = 28$$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = 1$

$$f''(1) = 6(1) + 6 = 12 > 0$$

ดังนั้น $f''(1)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 1$$

$$f(1) = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 28 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (– 3, 28)

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ – 4 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ (1, – 4)

ตัวอย่าง 3.10 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2e^{-x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = x^2e^{-x}(-1) + e^{-x}(2x)$$

$$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$$

1. จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$-x^2e^{-x} + 2xe^{-x} = 0$$

$$xe^{-x}(-x+2) = 0$$

$$xe^{-x}(2-x) = 0$$

$$x = 0,\ 2$$

2. ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $\therefore \quad x = 0,\ 2$

3. ทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์จากค่าวิกฤต โดยการหา

$$f''(x) = xe^{-x}(-1) + (2-x)\left(xe^{-x}(-1) + e^{-x}\right)$$

$$= -xe^{-x} + (2-x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = 0$

$$f''(0) = -(0)e^{-0} + (2-0)\left(e^{-0} - (0)e^{-0}\right)$$

$$= 0 + 2(1-0)$$

$$= 2 > 0$$

ดังนั้น $f''(0)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(0) = 0^2e^{-0}$$

$$f(0) = 0(1)$$
$$= 0$$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = 2$

$$f''(2) = -2e^{-2} + (2-2)\left(e^{-2} - 2e^{-2}\right)$$
$$= -2e^{-2} < 0$$

ดังนั้น $f''(2)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(2) = 2^2 e^{-2}$$
$$= 4e^{-2}$$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ 0 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (0, 0)

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 2 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(2,\ 4e^{-2})$

3.4 การประยุกต์ใช้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

การหาความสัมพันธ์ของสมการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยอนุพันธ์ ซึ่งโจทย์ประยุกต์ที่กำหนดให้จะต้องทำการสร้างสมการและวาดรูปประกอบตามเงื่อนไข เพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ได้ง่ายขึ้น แล้วกำหนดตัวแปรให้กับปริมาณต่าง ๆ ถ้ามีตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปร จะต้องทำให้เหลือตัวแปรเดียวโดยอาศัยเงื่อนไขจากโจทย์และสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรให้เหลือเพียงสมการเดียวของสิ่งที่โจทย์ต้องการ จึงนำมาทดสอบหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.11 จงหาจำนวน 2 จำนวนซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าต่างกัน 10 และผลคูณของเลขทั้ง 2 จำนวน มีค่าน้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นเลขจำนวนที่ 1

$\therefore\ x-10$ เป็นเลขจำนวนที่ 2

ให้ y เป็นผลคูณของเลขทั้ง 2 จำนวน

ดังนั้น $y = x(x-10) = x^2 - 10x$

พิจารณาหาค่า x ซึ่งเป็นค่าวิกฤตจาก $y' = 0$

จะได้ $y' = 2x - 10$

$$2x - 10 = 0$$

$$2x = 10$$

$$\therefore\ x = 5$$

พิจารณาได้ 2 กรณี

- อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$y' < 0$ $\qquad$ $y' > 0$

(-) $\qquad$ 5 $\qquad$ (+)

เครื่องหมายเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก แสดงว่าให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือพิจารณาอีกวิธีหนึ่งคือ

- อนุพันธ์อันดับสอง

$y'' = 2 > 0$ ให้ลักษณะเดียวกัน คือ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$\therefore$ จำนวนที่ 1 คือ $x = 5$ และจำนวนที่ 2 คือ $x - 10 = 5 - 10 = -5$

ดังนั้น 2 จำนวน คือ 5 และ -5

ตัวอย่าง 3.12 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการทำกำไรมากที่สุดใน 1 เดือน จากการขายสินค้าชนิดหนึ่ง โดยตั้งราคาขายที่มีความสัมพันธ์ของยอดขายเป็นหน่วยต่อปี โดยมีค่าวัสดุเสื่อม 10,000 บาท ต้นทุนต่อชิ้นในการผลิตสินค้าและค่าขนส่งที่ 40 บาทต่อชิ้น และสมการของราคาขาย คือ $500 - 0.02x$ บาทต่อชิ้น บริษัทควรผลิตจำนวนกี่ชิ้นจึงจะมีกำไรมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นจำนวนของยอดขายมีหน่วยเป็นชิ้น

r เป็นฟังก์ชันของรายได้

c เป็นฟังก์ชันของต้นทุน

p เป็นฟังก์ชันของกำไร

สร้างสมการหาความสัมพันธ์

$$r(x) = (500 - 0.02x)x = 500x - 0.02x^2$$

$$c(x) = 10{,}000 + 40x$$

$$p(x) = 500x - 0.02x^2 - (10{,}000 + 40x) = -0.02x^2 + 460x - 10{,}000$$

พิจารณาหาค่า x ซึ่งเป็นค่าวิกฤตจากฟังก์ชันของกำไร $p'(x)=0$

จะได้ $-0.04x+460=0$

$$0.04x=460$$

$$x=\frac{460}{0.04}$$

$$\therefore \quad x=11{,}500 \text{ ชิ้น}$$

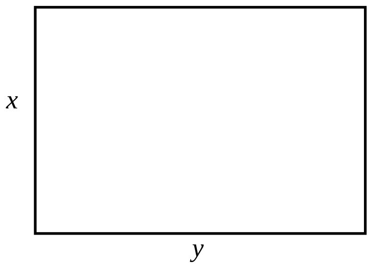
ดังนั้น บริษัทต้องผลิตสินค้า 11,500 ชิ้นต่อเดือน จึงจะมีกำไรมากที่สุด

ตัวอย่าง 3.13 จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่มากที่สุด โดยมีความยาวเส้นรูป 120 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

x เป็นความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

y เป็นความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



หาความสัมพันธ์ได้จากโจทย์

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูป $2x+2y=120$ (1)

พื้นที่ $A=xy$ (2)

รูปที่ 3.16 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากสมการความยาวเส้นรอบรูปในสมการ (1) จะได้ $y=60-x$

และแทน y ในสมการที่ (2)

$$A=x(60-x)=60x-x^2$$

- ทดสอบหาค่าวิกฤตจากเงื่อนไขของโจทย์ที่มี่พื้นที่มากที่สุด

$$A'=60-2x$$

- หาค่าวิกฤตจาก $A' = 0$

$$60 - 2x = 0$$
$$2x = 60$$
$$x = 30$$

จาก $y = 60 - x \;\therefore\; y = 60 - 30 = 30$

ดังนั้น ความกว้าง $x = 30$ และความยาว $y = 30$ คือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 30 หน่วย ที่มีความยาวเส้นรอบรูป 120 หน่วย และมีพื้นที่มากที่สุดตามเงื่อนไข

ตัวอย่าง 3.14 การเกิดปฏิกิริยาเคมีระหว่างอุณหภูมิมีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส C ในการทดลองครั้งหนึ่งที่สัมพันธ์กับเวลา t มีหน่วยเป็นวินาทีตามสมการ $C(t) = 6t - 0.1t^2$ เมื่อเวลาที่เท่าใดอุณหภูมิจะขึ้นสูงสุดและอุณหภูมิสูงสุดมีค่าเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> จากความสัมพันธ์ของสมการ $C(t) = 6t - 0.1t^2$

- ทดสอบหาค่าวิกฤตจาก $C'(t) = 6 - 0.2t$
- หาค่าวิกฤตจาก $C'(t) = 0$

$$6 - 0.2t = 0$$
$$0.2t = 6$$
$$t = \frac{6}{0.2}$$
$$= 30 \text{ วินาที}$$

ดังนั้น เมื่อเวลา 30 วินาที อุณหภูมิจะขึ้นสูงสุด $C(30) = 6(30) - 0.1(30)^2$

$$= 180 - 0.1(900)$$
$$= 180 - 90$$
$$= 90 \text{ องศาเซลเซียส}$$

$\therefore$ เมื่อเวลา 30 วินาที อุณหภูมิจะขึ้นสูงสุด 90 องศาเซลเซียส

3.5 ความเร็ว ความเร่ง (Velocity, Acceleration)

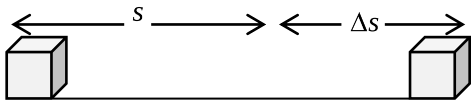
สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุมีหลายวิธีในทางฟิสิกส์ มีทั้งการเคลื่อนที่ในแนวที่เส้นตรง แนวดิ่ง และไม่ใช่เส้นตรง แต่จะกล่าวถึงเฉพาะความเร็ว ความเร่งการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงและอัตราสัมพัทธ์ที่มีความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของตัวแปรต่าง ๆ

3.5.1 ความเร็ว ความเร่ง

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางที่เกิดจากการเคลื่อนที่เป็นแนวตรงเทียบกับเวลา t ที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน $s(t)$ เรียกว่า “สมการของการเคลื่อนที่”

<u>การหาความเร็วและความเร่ง</u>

1. ความเร็ว (Velocity) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ของระยะทางเทียบกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่



รูปที่ 3.17 อัตราการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.1 ความเร็วเฉลี่ย (Average velocity) คือ อัตราส่วนระหว่างระยะทางทั้งหมดที่เคลื่อนที่ได้หารด้วยเวลา

$$v_{avr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

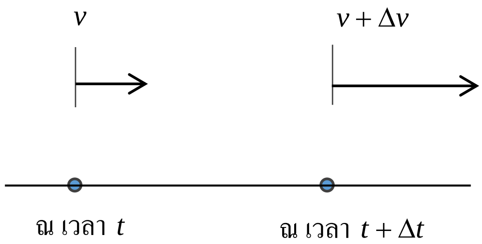
Δs คือ ระยะทางที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง

Δt คือ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

1.2 ความเร็ว ณ ขณะเวลา t ใด ๆ หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity) ของความเร็ว ซึ่งเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่มีค่าน้อยมาก หรือ Δt มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $(\Delta t \to 0)$ หรืออนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\begin{aligned} v_{avr} &= \frac{ds}{dt} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ &= s'(t) \end{aligned}$$

2. ความเร่ง (Acceleration) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา



รูปที่ 3.18 อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2.1 ความเร่งเฉลี่ย (Average acceleration) คือ อัตราส่วนระหว่างความเร็วที่เปลี่ยนไปทั้งหมดกับช่วงเวลาที่เปลี่ยนความเร็วนั้น

$$a_{avr} = \frac{dv}{dt}$$

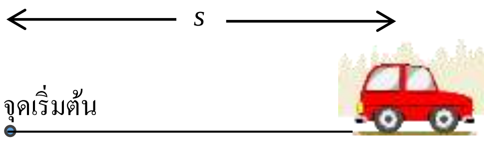
Δv คือ ความเร็วของวัตถุที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง

2.2 ความเร่ง ณ ขณะเวลา t ใด ๆ หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity) ของความเร่ง ซึ่งเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่มีค่าน้อยมาก หรือ Δt มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $(\Delta t \to 0)$ หรืออนุพันธ์อันดับสอง

$$
\begin{aligned}
a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) &= \frac{d^2 s}{dt^2} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s'(t+\Delta t) - s'(t)}{\Delta t} \\
&= s''(t)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.15 รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามสมการของการเคลื่อนที่โดยที่ความสัมพันธ์กับเวลา t คือ $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$ เมตร จงหา

1. ระยะทาง ขณะเวลาที่ 3 วินาที
2. ความเร็ว ขณะเวลาที่ 3 วินาที
3. ความเร่ง ขณะเวลาที่ 3 วินาที



รูปที่ 3.19 การเคลื่อนที่ของรถยนต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

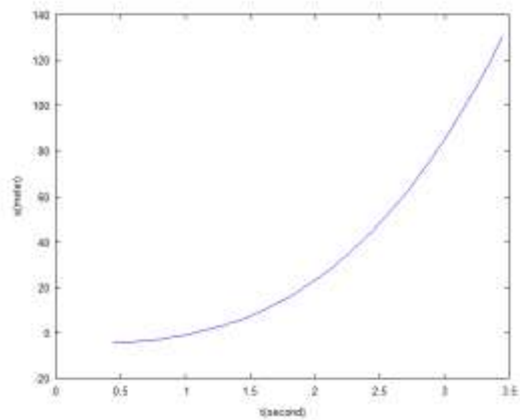
<u>วิธีทำ</u> 1. ระยะทางขณะ $t = 3$

จาก $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$

$= 3(3)^3 + 3^2 - 5$

$= 3(27) + 9 - 5$

$= 85$ เมตร



รูปที่ 3.20 กราฟของระยะทาง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. ความเร็วขณะ $t = 3$

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ หรือ } s'$$

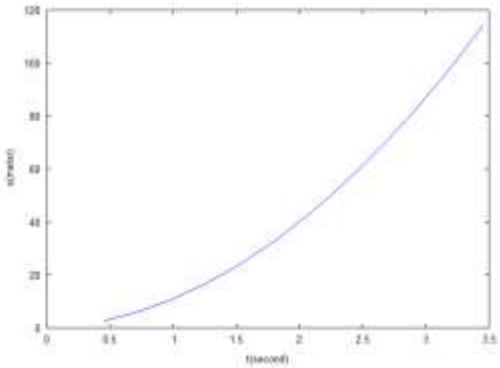
$$= \frac{d}{dt}\left(3t^3 + t^2 - 5\right)$$

$$s'(t) = 9t^2 + 2t$$

$$s'(3) = 9(3)^2 + 2(3)$$

$$= 9(9) + 6$$

$= 87$ เมตรต่อวินาที



รูปที่ 3.21 กราฟของความเร็ว

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ความเร่งขณะ $t = 3$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ หรือ } s''$$

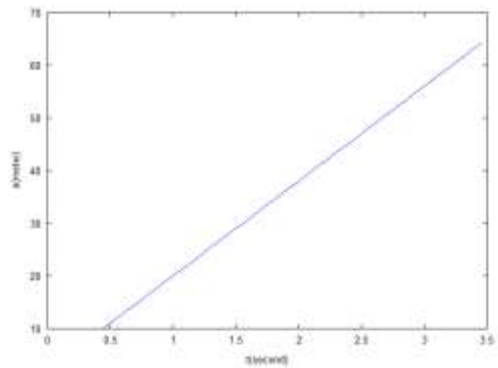
$$= \frac{d}{dt}\left(9t^2 + 2t\right)$$

$$s''(t) = 18t + 2$$

$$s''(3) = 18(3) + 2$$

$$= 54 + 2$$

$= 56$ เมตรต่อวินาที^{2}

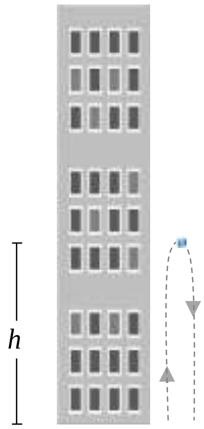


รูปที่ 3.22 กราฟของความเร่ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 3.16 ลูกแก้วลูกหนึ่งถูกโยนขึ้นไปในอากาศด้วยความเร็ว 30 เมตรต่อวินาที ตามแนวดิ่ง และสมการของการเคลื่อนที่ของลูกแก้วซึ่งเป็นความสูงจากพื้นดิน $h(t) = -8t^2 + 56t$ เมตร จงหา

1. ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง 4 วินาที
2. ความเร็ว ขณะเวลาที่ $t = 3$ วินาที
3. ระยะทางที่ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุด
4. เวลาเท่าใดที่ลูกแก้วขึ้นไปได้สูงเป็นระยะทาง 80 เมตร



รูปที่ 3.23 การเคลื่อนที่แนวดิ่ง
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> 1. ความเร็วเฉลี่ย v_{arv} ในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง 4 วินาที

$$v_{arv} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

$$h(4) = -8(4)^2 + 56(4) = -128 + 224 = 96$$

$$h(2) = -8(2)^2 + 56(2) = -32 + 112 = 80$$

$$\therefore\ v_{avr} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 80}{2} = \frac{16}{2}$$

$= 8$ เมตรต่อวินาที

ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง 4 วินาที คือ 8 เมตรต่อวินาที

2. ความเร็ว ขณะเวลาที่ $t = 3$ วินาที

จาก $v = \frac{ds}{dt}$ หรือ $s'(t)$

$$h'(t) = -16t + 56$$

$$\therefore \quad h'(t) = -16(3) + 56$$

$$= -48 + 56$$

$= 8$ เมตรต่อวินาที

ดังนั้น ความเร็ว ขณะเวลาที่ $t = 3$ วินาที คือ 8 เมตรต่อวินาที

3. ระยะทางที่ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุด (ก้อนหินจะมีความเร็วเป็นศูนย์หรือ $v = 0$)

จาก $v = \frac{ds}{dt}$ หรือ $s'(t)$ มีค่าเท่ากับ 0

$$h'(t) = 0$$

$$-16t + 56 = 0$$

$$16t = 56$$

$\therefore \quad t = \frac{56}{16} = 3.5$ วินาที

แทนค่า $t = 3.5$ ในสมการการเคลื่อนที่ $h(t) = -8t^2 + 56t$

$$h(3.5) = -8(3.5)^2 + 56(3.5)$$

$$= 98 + 196$$

$= 294$ เมตร

ดังนั้น ระยะทางที่ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุด คือ 294 เมตร

4. เวลาเท่าใดที่ลูกแก้วขึ้นไปได้สูงเป็นระยะทาง 80 เมตร ($h = 80$)

จาก $$h(t) = -8t^2 + 56t$$

$$80 = -8t^2 + 56t$$

$$8t^2 - 56t + 80 = 0$$

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$(t-2)(t-5) = 0$$

$$t = 2,\ 5$$

3.5.2 อัตราสัมพัทธ์ (Related rates)

อัตราสัมพัทธ์ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณใด ๆ เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของเวลา โดยถ้าตัวแปร x เป็นฟังก์ชันของปริมาณใด ๆ (เช่น พื้นที่, ปริมาตร หรือน้ำหนัก) ของเวลา t แล้วอัตราสัมพัทธ์ x คือ $\dfrac{dx}{dt}$ โดยตัวแปรที่สัมพันธ์ของปริมาณอาจมีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 ตัวขึ้นไปในสมการ และใช้กฎลูกโซ่ เพื่อใช้แก้ปัญหาในการคำนวณ

หมายเหตุ ถ้าเวลาผ่านไป t เพิ่มขึ้น และ

- ค่าตัวแปร x เพิ่ม จะได้ $\dfrac{dx}{dt}$ เป็นบวก (+)
- ค่าตัวแปร x ลด จะได้ $\dfrac{dx}{dt}$ เป็นลบ (-)

ตัวอย่าง 3.17 เครื่องเล่นดิ่งหอคอย (Space tower) เคลื่อนที่ขึ้นในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 250 เมตรต่อวินาที โดยมีกล้องวีดีโอบันทึกภาพตั้งอยู่ห่างจากฐานด้านล่างของเครื่องเล่น 120 เมตร จงหาว่าระยะทางระหว่างกล้องบันทึกวีดีโอบันทึกภาพกับเครื่องเล่นจะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะที่เครื่องเล่นอยู่สูง 160 เมตร

<u>วิธีทำ</u> ต้องการหา $\frac{ds}{dt}$ เมื่อเครื่องเล่นมีความสูงอยู่ที่ 160 เมตร

ให้ s เป็นระยะทางระหว่างกล้องและเครื่องเล่น

ให้ y เป็นความสูงของเครื่องเล่น

หาความสัมพันธ์ของรูป(โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส)

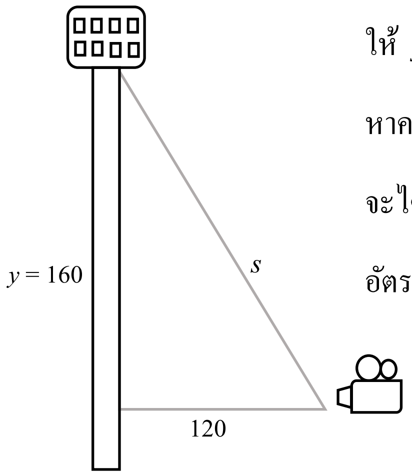
จะได้สมการ $$s^2 = 120^2 + y^2 \qquad (1)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วของระยะทางเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ

$$2s\frac{ds}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

$$s\frac{ds}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{y}{s}\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$



รูปที่ 3.24 การเคลื่อนที่ของเครื่องเล่นดิ่งหอคอย

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

โจทย์กำหนดให้ความเร็วที่เคลื่อนที่ในแนวดิ่ง 250 เมตรต่อวินาที

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 250 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ความสูงของเครื่องเล่น 160 เมตร

$$\therefore \quad y = 160 \text{ เมตร}$$

ระยะทางของกล้องบันทึกภาพและเครื่องเล่น

จากสมการที่ (1) $$s^2 = 120^2 + 160^2$$

$$s^2 = 14,400 + 25,600 = 40,000$$

$$\therefore \quad s = \sqrt{40,000} = 200 \text{ เมตร}$$

แทนค่า s , y และ $\frac{dy}{dt}$ ในสมการ (2)

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = \frac{160}{200}(250) = 200 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ดังนั้น ขณะที่เครื่องเล่นอยู่สูง 160 เมตร และระยะทางระหว่างเครื่องเล่นกับกล้องห่างกัน 120 เมตร จะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็ว 200 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.18 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเมื่อบรรจุแก๊สฮีเลียมใส่ในลูกโป่งทรงกลมด้วยอัตราเร็ว 5 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที โดยที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

<u>วิธีทำ</u> ให้ r เป็นรัศมีของลูกโป่ง

v เป็นปริมาตรของลูกโป่ง

รูปที่ 3.25 ลูกโป่งที่บรรจุแก๊สฮีเลียม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หาความสัมพันธ์จากปริมาตรของทรงกลม เพื่อหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\right)\frac{dr}{dt}$$

$\therefore$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเมื่อเวลา t ใด ๆ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

โจทย์กำหนดให้ $r = 10$ เซนติเมตร และ $\frac{dv}{dt} = 5$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที

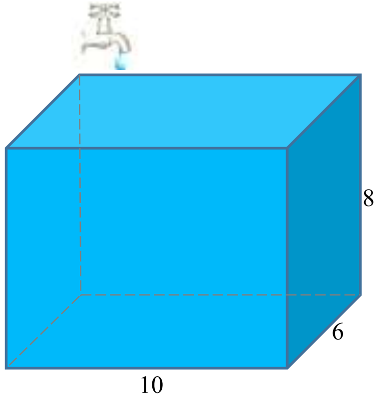
จากสมการที่ (1)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(10)^2}(5)$$

$$= \frac{1}{80\pi} \quad \text{เซนติเมตรต่อวินาที}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี มีค่า $\frac{1}{80\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.19 อ่างเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อทำการบรรจุน้ำลงไปด้วยอัตราการไหลเข้า 15 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ถ้าอ่างเก็บน้ำมีฐานกว้าง 6 เมตร ยาว 10 เมตร และสูง 8 เมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำที่สูงขึ้นเป็นเท่าใด



รูปที่ 3.26 อ่างเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> ให้ v เป็นปริมาตรของอ่างเก็บน้ำ

h เป็นความสูงของอ่างเก็บน้ำ

หาความสัมพันธ์จากปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$V = \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \times \text{สูง}$$

$$= 6 \times 10 \times h$$

$$= 60h$$

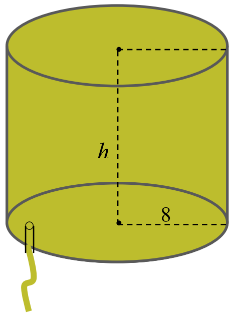
$$\frac{dv}{dt} = 60\frac{dh}{dt} \qquad (1)$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dv}{dt} = 6$ จากสมการที่ (1) จะได้ $6 = 60\frac{dh}{dt}$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ เมื่อเวลา t ใด ๆ $\frac{dh}{dt} = 0.1$ เมตรต่อนาที

หรือ10 เซนติเมตรต่อนาที

ตัวอย่าง 3.20 ถังโลหะทรงกระบอกสำหรับเก็บน้ำมันมีจุดรั่ว ซึ่งทำให้น้ำมันไหลออกไปด้วยอัตรา 16 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที โดยถังมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 เซนติเมตร จงหาอัตราการไหลออกของน้ำมันจะลดลงเท่าใด



รูปที่ 3.27 ถังโลหะทรงกระบอก
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> ให้ v เป็นปริมาตรของทรงกระบอก
h เป็นปริมาตรของทรงกระบอก
r เป็นรัศมีของทรงกระบอก

หาความสัมพันธ์จากปริมาตรทรงกระบอก

$$v = \pi r^2 h \qquad \text{โดย } r = 8$$

$$= 64\pi h$$

$$\frac{dv}{dt} = 64\pi \frac{dh}{dt} \qquad \text{โดย } \frac{dv}{dt} = -16$$

$$-16 = 64\pi \frac{dh}{dt}$$

$\therefore$ อัตราการไหลออกของน้ำมัน เมื่อเวลา t ใด ๆ

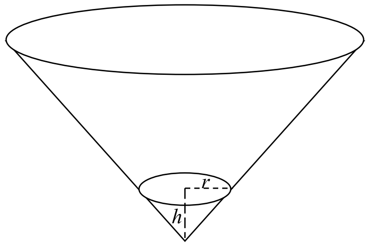
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{16}{64\pi}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}$$

ดังนั้น อัตราการไหลออกของน้ำมันจะลดลง $\frac{1}{4\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.21 กรวยกลมซึ่งทำมุม 45 องศาในแนวดิ่ง โดยมีอัตราคงที่ของปริมาตรน้ำอยู่ที่ 30 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที เมื่อความสูงของน้ำที่ระดับ 60 เซนติเมตร จงหา

1. อัตราความสูงของน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อวินาที
2. อัตรารัศมีพื้นผิวของน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อวินาที
3. อัตราพื้นที่ผิวของน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อวินาที



รูปที่ 3.28 กรวยกลม
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> ให้ h เป็นความสูงของน้ำ

r เป็นรัศมีพื้นผิวของน้ำ

A เป็นพื้นที่ผิวของน้ำ

V เป็นปริมาตรของน้ำ

หาความสัมพันธ์ได้จากสูตร

- ปริมาตรของกรวยกลม $$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

- พื้นที่ผิว $$A = \pi r^2 \qquad (2)$$

เนื่องจากกรวยกลมทำมุม 45 องศา ดังนั้น $r = h$

จากสมการ (1) จะได้ $$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi h^2$$

1. อัตราความสูงของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ $\frac{dh}{dt}$

โดยใช้กฎลูกโซ่ $$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \times \frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{1}{\pi h^2} \times 30$$

$$= \frac{30}{\pi h^2}$$

เมื่อ $h = 60$ $\therefore$ อัตราความสูงของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ

$$\frac{30}{\pi h^2} = \frac{30}{\pi (60)^2}$$

$$= \frac{30}{\pi (3{,}600)}$$

$$= \frac{1}{120\pi} \text{ เซนติเมตรต่อวินาที}$$

2. อัตรารัศมีพื้นผิวของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ $\frac{dr}{dt}$

จากสมการ (2) จะได้ $$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

เนื่องจาก $r = h$ เมื่อ $h = 60$

$\therefore$ อัตรารัศมีพื้นผิวน้ำเทียบกับเวลา คือ $\frac{1}{120\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

3. อัตราพื้นที่ผิวของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ $\frac{dA}{dt}$

โดยใช้กฎลูกโซ่ $$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{30}{\pi r^2}$$

$$= \frac{60}{r}$$

เมื่อ $r = 60$

$\therefore$ อัตราพื้นที่ผิวน้ำเทียบกับเวลา คือ $\frac{60}{r}$ ตารางเซนติเมตรต่อวินาที

3.6 การประยุกต์อนุพันธ์เกี่ยวกับรูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate forms) และกฎโลปิตาล (L'Hopital's rule)

การหาลิมิตของฟังก์ชันในบทที่ 1 ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าได้หรือไม่ ถ้าอยู่ในรูปแบบ $\dfrac{0}{0}, \pm\dfrac{\infty}{\infty}$ หรือรูปแบบอื่นๆ ซึ่งเป็นลักษณะที่บอกไม่ได้เช่นกัน คือ $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 และ 1^∞ เรียกรูปแบบลักษณะนี้ว่า "รูปแบบไม่กำหนด" ในการหาค่าของรูปแบบดังกล่าว สามารถทำได้โดยใช้ กฎโลปิตาล

<u>**วิธีการใช้กฎโลปิตาล**</u> มีดังนี้

1. รูปแบบ $\dfrac{0}{0}, \pm\dfrac{\infty}{\infty}$

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของ x และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

เมื่อ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ หรือไม่เป็นค่าอนันต์

ถ้า $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ อีก ให้ใช้กฎโลปิตาลซ้ำอีกจนกระทั่งได้ค่า $\lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a} g^{(n)}(x)$ ไม่เป็นศูนย์ หรือ $\pm\infty$ พร้อมกัน โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

ตัวอย่าง 3.22 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{0}{\sin 0}=\dfrac{0}{0}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{0}{0}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx}(\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos 0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

ตัวอย่าง 3.23 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \dfrac{3-\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$$= \frac{3-\sqrt{0+9}}{0}$$

$$= \frac{3-\sqrt{9}}{0}$$

$$= \frac{3-3}{0}$$

$$= \frac{0}{0}$$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\frac{0}{0}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx}(3-\sqrt{\cos\theta+9})}{\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{0-\frac{1}{2}(\cos\theta+9)^{-\frac{1}{2}}(-\sin\theta)}{(0-1)}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2}(\cos\theta+9)^{-\frac{1}{2}}(-\sin\theta)}{-1}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}(\cos\theta+9)^{-\frac{1}{2}}(\sin\theta)$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin\theta}{2(\cos\theta+9)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta+9}}$$

$$= -\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+9}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{0+9}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{9}}$$

$$= -\frac{1}{2(3)}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

ตัวอย่าง 3.24 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{5^x-1}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{5^x-1} = \dfrac{1-e^{-0}}{5^0-1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{0}{0}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{5^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-e^{-x})}{\frac{d}{dx}(5^x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0-e^{-x}(-1)}{5^x \ln 5 - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{5^x \ln 5}$$

$$= \frac{e^{-0}}{5^0 \ln 5} \quad = \frac{1}{\ln 5}$$

ตัวอย่าง 3.25 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2-5x+1}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2-5x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2-5x+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2-5x+1)}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{2x-5}$$

$= \dfrac{\infty}{\infty}$ ยังคงเป็นรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$ จึงต้องใช้กฎโลปิตาลซ้ำ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(2x-5)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}$$

$$=\infty$$

ตัวอย่าง 3.26 จงหาค่าของ $\lim_{\theta\to0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{\theta\to0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}=\frac{\ln(\sin 0)}{\ln(\tan 0)}=\frac{\infty}{\infty}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\frac{\infty}{\infty}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}=\lim_{\theta\to0^+}\frac{\frac{d}{d\theta}(\ln(\sin\theta))}{\frac{d}{d\theta}(\ln(\tan\theta))}$$

$$\therefore\quad\lim_{\theta\to0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}=\lim_{\theta\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)}{\frac{1}{\tan\theta}\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0^+}\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0^+}\frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0^+}\cos^2\theta$$

$$=1$$

2. รูปแบบไม่กำหนดอื่น ๆ ที่อยู่ในรูปแบบ $0(\infty)$, $\infty - \infty$ โดยจำเป็นที่จะต้องจัดให้อยู่ใน

รูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน จึงสามารถทำการใช้กฎโลปิตาลได้

ตัวอย่าง 3.27 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0(\infty)$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $0(\infty)$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

ตัวอย่าง 3.28 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x \cot x$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x \cot x = 0(\infty)$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $0(\infty)$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \sin 2x \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sin 2x)}{\frac{d}{dx}(\tan x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin 2x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{\sec^2 x}$$

$$= 2$$

ตัวอย่าง 3.29 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x) = \infty-\infty$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\infty-\infty$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin x}$$

$$= 0$$

ตัวอย่าง 3.30 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \infty-\infty$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\infty-\infty$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-x^{-2}\right)}{\left(-x^{-2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. รูปแบบไม่กำหนดอื่นๆ ที่อยู่ในรูปแบบ 0^0, ∞^0 หรือ 1^∞ โดยจำเป็นที่จะต้องจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน จึงสามารถทำการใช้กฎโลปิตาลได้

ตัวอย่าง 3.31 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = 0^0$ ซึ่งจะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้กฎโลปิตาลได้ โดยการใส่ $\ln$ เพื่อกำจัดกำลังให้ $y = x^{x^2}$

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$= x^2(\ln x) = 0(\infty) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\ln y\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^0$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = 1$

ตัวอย่าง 3.32 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x} = \infty^0$ ซึ่งจะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้กฎโลปิตาลได้ โดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลังให้ $y = \left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x}$

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x}$$

$$= 2x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$= 2\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0} 2\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{\frac{1}{\left(\frac{1-x}{x}\right)}\left(\frac{-x-(1-x)}{x^2}\right)}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(\ln y) = 0$$

$$y = e^0 = 1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x} = 1$

ตัวอย่าง 3.33 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x = 1^\infty$ ซึ่งจะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้กฎโลปิตาลได้ โดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลังให้ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x$

$$\ln y = \ln\left(1+\frac{9}{x}\right)^x$$

$$= x\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{9}{x}\right)}\left(\frac{-9}{x^2}\right)}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{9}{\left(1+\frac{9}{x}\right)} = 9$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(\ln y) = 9$$

$$y = e^9$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x = 9$

บทสรุป

การประยุกต์อนุพันธ์ หากพิจารณาร่วมกับบทที่ผ่านมา สามารถนำมาต่อยอดใช้คำนวณแก้ไขโจทย์ปัญหาในการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันได้ โดยนำไปหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพื่อหาค่าวิกฤตที่ทำให้มีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดตามเงื่อนไข แล้วจะได้คำตอบของสมการหรือฟังก์ชันนั้น ๆ และนำไปสรุปผลในสาขาวิชาต่าง ๆ ได้ เช่น

1. การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของก๊าซ แก๊ส การไหลต่าง ๆ ของสารเคมี ทางเคมี
2. การคำนวณหาความเร็ว ความเร่ง ทางฟิสิกส์
3. การหาอัตราการเกิด การเจริญเติบโต การตาย ทางชีววิทยา
4. การหาการเปลี่ยนแปลงของเวลาในการประมวลผลของโปรแกรม ทางคอมพิวเตอร์
5. การหาจุดคุ้มทุน กำไร ขาดทุน ทางด้านบริหารธุรกิจหรือเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหาจุดวิกฤต ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

1.2 $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

1.3 $f(x) = 4x^3$

1.4 $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 18x + \frac{3}{2}$

1.5 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

1.6 $f(x) = x + \frac{4}{x}$

1.7 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

2. โยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศ ความสัมพันธ์ระหว่างที่ลูกบอลอยู่ห่างจากพื้นดิน s เมตรหลังจากโยนลูกบอลขึ้นไป t วินาที เป็นไปตามสมการ จงหาระยะทางที่ลูกบอลขึ้นไปได้สูงสุด

3. กระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 ซม. ต้องการตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x ซม. แล้วพับตามรอยเส้นประเพื่อเชื่อมทำกล่องฝาเปิดดังรูป x ควรจะมีค่าเท่าไร กล่องจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด และมีปริมาตรมากที่สุดเท่าไร

4. พ่อค้าคนหนึ่งทราบว่าถ้าเขาตั้งราคาสินค้าอย่างหนึ่งชิ้นละ 20 บาท ในหนึ่งสัปดาห์เขาจะขายสินค้าได้ 1,000 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงชิ้นละ 1 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มอีก 100 ชิ้นเป็น 1,100 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงชิ้นละ 2 บาท เขาจะขายสิ้นค้าได้เพิ่มอีก 200 ชิ้น เป็น 1,200 ชิ้น ถ้าเป็นเช่นนี้เรื่อย ๆ ไ ป เขาควรจะตั้งราคาสินค้าเท่าไรจึงจะมีเงินจากการขายมากที่สุด

5. ต้องการนำเชือกที่มีความยาว 160 เมตร ไปล้อมรอบที่ดินเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุด จงหาความกว้างและความยาวในการล้อมรอบที่ดิน

6. กล่องใบหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการการเคลื่อนที่ $s = \frac{2}{3}t^3 + 3t - 5$ หน่วย จงหาความเร็วและความเร่งของกล่อง เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาที

7. ถ้าระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่เมื่อเวลา t ใดๆ ตามสมการ $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ โดยที่ s มีหน่วยเป็นกิโลเมตร และ t มีหน่วยเป็นนาที จงหา

7.1 ระยะทางและความเร่ง เมื่อความเร็วมีค่าเป็นศูนย์

7.2 ระยะทางและความเร่ง เมื่อความเร่งมีค่าเป็นศูนย์

8. บันไดหนึ่งยาว 5 เมตร โดยปลายด้านบนพิงกำแพงแต่เกิดการลื่นไถล ปลายด้านล่างของบันไดอยู่บนพื้นดินเคลื่อนไถลห่างออกจากกำแพง 3 เมตร ด้วยความเร็ว 2 เมตรต่อวินาที ในขณะที่ปลายด้านล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเป็นระยะทาง 3 เมตร จงหาว่าปลายด้านบนจะเคลื่อนลงที่ขอบกำแพงด้วยความเร็วเท่าใด

9. ในการแข่งขันการก่อกองทรายเป็นรูปเจดีย์ ซึ่งเททรายบนยอดด้วยความเร็ว 3 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที โดยที่กองทรายยังคงรูปเดิมและส่วนสูงของรัศมีจะเท่ากับรัศมีของฐานกองทราย จงหาว่าส่วนสูงของกองทรายจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด ขณะที่กองทรายมีความสูง 6 ฟุต

10. แผ่นโลหะกลมเมื่อได้รับความร้อนจะขยายตัว โดยเส้นรอบวงจะยาวเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 4 เซนติเมตรต่อนาที จงหาพื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด

11. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ โดยใช้กฎโลปิตาล

11.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-2}{x^2+7}$

11.2 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

11.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+1}$

11.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

11.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}\cos x}{x}$

11.6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

11.7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$

11.8 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

11.9 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

11.10 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^x}$

11.11 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^3}$

11.12 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

11.13 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{2x}$

11.14 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

11.15 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

11.16 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

11.17 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$

11.18 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

11.19 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}+x^2}{e^x+4x}$

11.20 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

11.21 $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

11.22 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

เอกสารอ้างอิง

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

จินดา อาจริยะกุล. (2545). **อนุพันธ์และการประยุกต์**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

มนัส ประสงค์. (2535). **แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ภิรดี ฤทธิเดช. (2560). **แคลคูลัสพื้นฐาน.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วรรณา ไชยวิโน. (2535). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วิริยะ ศิริชานนท์. (มปป). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.

การปริพันธ์

Integrate

การหาปริพันธ์หรือที่เรียกว่าการอินทิเกรต (Integration) เป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ (Derivative) โดยที่โจทย์กำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้ แต่ต้องการหาฟังก์ชันที่สอดคล้องกับอนุพันธ์นั้น เรียกว่าการหาปฏิยานุพันธ์ (Anti - derivative)

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจความหมายของปริพันธ์
2. สามารถหาค่าปริพันธ์ได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

4.1 การหาปริพันธ์ในความหมายของปฏิยานุพันธ์

นิยาม ฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้า $F'(x) = f(x)$

ตัวอย่าง 4.1 ให้ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$F(x) = x^3 + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2$

เนื่องจาก $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 + c\right) = 3x^2$

เช่น ถ้า $c_1 = 2$; $F_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 2\right) = 3x^2$

ถ้า $c_2 = -5$; $F_2'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 5\right) = 3x^2$

สรุปได้ว่าปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ มีจำนวนไม่จำกัดขึ้นอยู่กับค่าของ c

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะได้ว่า $F(x) + c$ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย เนื่องจากว่า

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) + c\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) + \frac{d}{dx}c = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = F'(x) = f(x)$$

กระบวนการหาปริพันธ์ทั้งหมดของ $f(x)$ เรียกว่าการหาปริพันธ์ หรือ การอินทิเกรต และเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)\,dx$

$\int$ คือ เครื่องหมายการหาปริพันธ์หรืออินทิกรัล (Integral sign)

$f(x)$ คือ ฟังก์ชันของการหาปริพันธ์

dx คือ สัญลักษณ์ของการหาปริพันธ์เมื่อเทียบกับตัวแปร x

นิยาม ถ้า $F'(x) = f(x)$ หรือ $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์ $d(F(x)) = f(x)dx$ แล้วจะหาปริพันธ์ได้ดังนี้

$$\int f(x)\,dx = \int d(F(x))$$

หรือ $$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ซึ่งเป็นผลจากการหาปริพันธ์จะต้องบวกค่านี้เสมอทุกครั้ง และเรียกการหาปริพันธ์นี้ว่าเป็นการหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขต (Indefinite integrals)

ตัวอย่าง 4.2 จงหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตของ $3x^2$ หรือ $\int 3x^2 dx$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 4.1 $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ เขียนอยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$dx^3 = 3x^2 dx$$

จากนิยาม

$$\int 3x^2 dx = \int dx^3$$

$$= x^3 + c$$

4.2 สูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์

ถ้า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และสามารถหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตได้ในรูปแบบดังนิยาม $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ แล้ว จะสามารถใช้สูตรในการหาปริพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

4.2.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Integration of algebraic functions)

ถ้าให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$\int 0\,du = c$$

$$\int a\,du = a\int du$$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$\int du = u + c$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$ เมื่อ n เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ $n \neq -1$

$$\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$$

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่า $\int 0\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 1; $u = x$

$$\int 0\,dx = c$$

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่า $\int 5\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 2; $a = 5$ และ $u = x$

$$\int 5\,dx = 5\int dx$$

จากสูตรที่ 3; $u = x$

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่า $\int x^2\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 4; $u = x$ และ $n = 2$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + c$$

หรือ

$$= \frac{1}{3}x^3 + c$$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า $\int (3x^2+1)dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 5;

$$\int (3x^2+1)dx = \int 3x^2dx + \int 1dx$$
$$= 3\int x^2dx + \int dx$$
$$= 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + x + c$$
$$= 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + x + c$$
$$= x^3 + x + c$$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่า $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$
$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \left(x^{\frac{5}{2}} \div \frac{5}{2}\right) - \left(x^{\frac{1}{2}} \div \frac{1}{2}\right) + c$$
$$= \left(x^{\frac{5}{2}} \times \frac{2}{5}\right) - \left(x^{\frac{1}{2}} \times 2\right) + c$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$(1-u)u^{\frac{1}{2}} = 1\left(u^{\frac{1}{2}}\right) - u \cdot u^{\frac{1}{2}}$$
$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{1+\frac{1}{2}}$$
$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{\left(1\times\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}}$$
$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่า $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-4\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x^3}\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-4\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x^3}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}-4x^{\frac{1}{2}}+7x^{\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=\int\left(2x^{-\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+7x^{\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=2\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right)-4\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)+7\left(\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}\right)+c$$

$$=2\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)-4\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+7\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\right)+c$$

$$=2(3)\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}-4(2)\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+7(4)\frac{x^{\frac{7}{4}}}{7}+c$$

$$=3x^{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{7}{4}}+c$$

ตัวอย่าง 4.9 จงหาค่า $\int\frac{3x^5-2x^3+x-4}{x^3}dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int\boxed{\frac{3x^5-2x^3+x-4}{x^3}}dx=\int\left(3x^2-2+x^{-2}-4x^{-3}\right)dx$$

$$=3\frac{x^{2+1}}{2+1}-2x+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-4\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c$$

$$=3\frac{x^3}{3}-2x+\frac{x^{-1}}{-1}-4\frac{x^{-2}}{-2}+c$$

$$=x^3-2x-x^{-1}+2x^{-2}+c$$

$$=x^3-2x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+c$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{3x^5-2x^3+x-4}{x^3}&=\frac{3x^5}{x^3}-\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{4}{x^3}\\&=3x^2-2+x^{-2}-4x^{-3}\end{aligned}}$$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่า $\int x\left(\sqrt{x}+1\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int x\left(\sqrt{x}+1\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}+x\right)dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{1+1}}{1+1}+c$$
$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{2}}{2}+c$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^{2}}{2}+c$$

4.2.2 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร (Method of substitution)

วิธีนี้เป็นการเปลี่ยนตัวแปรในโจทย์ จากเดิมในการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x หรือในรูปแบบ dx ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันใหม่เพื่อให้สอดคล้องในการใช้สูตรของการหาปริพันธ์ได้

ตัวอย่าง 4.11 จงหาค่า $\int (x+3)^6 dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x+3$ จะได้ $dy = d(x+3)$

แทนค่า u และ du ในสูตร
$$\int (x+3)^6 dx = \int u^6 dx$$
$$= \frac{u^{7+1}}{7+1}+c$$
$$= \frac{u^8}{8}+c$$

แทนค่า $u = x+3$
$$= \frac{(x+3)^8}{8}+c$$

จากตัวอย่าง 4.11 ถ้ากระจายพจน์ $(x+3)^6$ สามารถทำได้ก่อนการหาปริพันธ์แต่ซับซ้อนและใช้เวลามาก จึงมีวิธีการหาโดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรนี้

ตัวอย่าง 4.12 จงหาค่า $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = 1-x^2$ จะได้ $x^2 = 1-u$ และ $\dfrac{du}{dx} = -2x$

ดังนั้น $du = -2xdx$ และ $xdx = \dfrac{du}{-2}$

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$= \int \boxed{(1-u)u^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{-2}$$

$$(1-u)u^{\frac{1}{2}} = 1\left(u^{\frac{1}{2}}\right) - u\cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{1+\frac{1}{2}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{\left(1\times\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{-2}\int (1-u)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) + c = -\frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + c$$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า $\int \dfrac{\ln^2(2x-1)}{(2x-1)}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \ln(2x-1)$ จะได้ $du = \dfrac{1}{2x-1}d(2x-1)$

และ $du = \dfrac{1}{2x-1}(2)\,dx$ ดังนั้น $\dfrac{du}{2} = \dfrac{dx}{2x-1}$

$$\int \frac{\ln^2(2x-1)}{(2x-1)}dx = \int \frac{(\ln(2x-1))^2}{(2x-1)}dx$$

$$= \int (\ln(2x-1))^2 \frac{dx}{(2x-1)}$$

$$= \int u^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2 du$$

$$\int \frac{\ln^2(2x-1)}{(2x-1)}dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^3}{3}+c$$
$$= \frac{1}{6}u^3 + c$$
$$= \frac{1}{6}\left(\ln(2x-1)\right)^3 + c$$
$$= \frac{1}{6}\ln^3(2x-1)+c$$

ตัวอย่าง 4.14 จงหาค่า $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \arctan x$ จะได้ $du = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx = \int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx$$
$$= \int (\arctan x)^2 \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \int u^2 du$$
$$= \frac{u^3}{3} + c$$
$$= \frac{(\arctan x)^3}{3} + c$$
$$= \frac{1}{3}\arctan^3 x + c$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหาค่า $\int \frac{\log^8 3x}{x}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \log 3x$ จะได้ $du = \frac{1}{3x}(\log e)dx$

ดังนั้น $\frac{dx}{x} = 3\frac{du}{\log e}$

$$\int \frac{\log^8 3x}{x}dx = \int (\log 3x)^8 \frac{dx}{x}$$
$$= \int u^8 \cdot (3)\frac{du}{\log e}$$
$$= \frac{3}{\log e}\int u^8 du$$

$$\int \frac{\log^8 3x}{x}dx = \frac{3}{\log e}\cdot\frac{u^9}{9}+c$$
$$= \frac{1}{3\log e}(\log 3x)^9 + c$$
$$= \frac{\log^9 3x}{3\log e}+c$$

4.2.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c$$
$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a}+c$$
$$\int e^u\,du = e^u + c$$

ตัวอย่าง 4.16 จงหาค่า $\int \frac{1}{x-2}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x-2$ จะได้ $du = d(x-2) = dx$

$$\int \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{u}du$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln|x-2| + c$$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาค่า $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x^3+1$ จะได้ $du = 3x^2dx$

$$x^2dxdu = \frac{du}{3}$$
$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{x^3+1}x^2dx$$
$$= \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{3}$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$$

ตัวอย่าง 4.18 จงหาค่า $\int \frac{3e^x}{e^x+1}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = e^x + 1$ จะได้ $du = e^x dx$

$$\int \frac{3}{e^x+1}e^x dx = \int \frac{3}{u}du$$
$$= 3\int \frac{1}{u}du$$
$$= 3\ln|u| + c$$
$$= 3\ln|e^x+1| + c$$

ตัวอย่าง 4.19 จงหาค่า $\int \frac{5}{x\ln x}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \ln x$ จะได้ $du = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{5}{x\ln x}dx = \int \frac{5}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 5\int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 5\int \frac{1}{u}du$$
$$= 5\ln|u| + c$$
$$= 5\ln|\ln x| + c$$

ตัวอย่าง 4.20 จงหาค่า $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=\ln x$ จะได้ $du=\frac{1}{x}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx &= \int \frac{\ln x+1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= \int \frac{u+1}{u}du \\ &= \int \left(\frac{u}{u}+\frac{1}{u}\right)du \\ &= \int \left(1+\frac{1}{u}\right)du \\ &= u+\ln|u|+c \\ &= \ln x+\ln|\ln x|+c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.21 จงหาค่า $\int \frac{\sin x}{\cos x-1}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=\cos x-1$ จะได้ $du=-\sin x\,dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x-1}dx &= \int \frac{-1}{u}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du \\ &= -\ln|u|+c \\ &= -\ln|\cos x-1|+c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.22 จงหาค่า $\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=x^{-1}$ จะได้ $du=-x^{-2}dx=-\frac{1}{x^2}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}dx &= \int e^{x^{-1}}\frac{1}{x^2}dx \\ &= \int e^{u}\left(-du\right)\end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}\,dx = -\int e^u\,du$$
$$= -e^u + c$$
$$= -e^{x^{-1}} + c$$

ตัวอย่าง 4.23 จงหาค่า $\int (x-1)e^{x^2-2x+5}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $du = (2x-2)dx = 2(x-1)dx$

$$\therefore \frac{du}{2} = (x-1)dx$$

$$\int (x-1)e^{x^2-2x+5}\,dx = \int e^{x^2-2x+5}\,(x-1)dx$$
$$= \int e^u\,\frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int e^u\,du$$
$$= \frac{1}{2}e^u + c$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2-2x+5} + c$$

ตัวอย่าง 4.24 จงหาค่า $\int \frac{5^{\ln x}}{x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \ln x$ จะได้ $du = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{5^{\ln x}}{x}\,dx = \int 5^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \int 5^u\,du$$
$$= \frac{5^u}{\ln 5} + c$$
$$= \frac{5^{\ln x}}{\ln 5} + c$$

ตัวอย่าง 4.25 จงหาค่า $\int \frac{9^{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \arctan\sqrt{x}$ จะได้

$$du = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}dx = \left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$\therefore\ 2du = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$\int \frac{9^{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int 9^{\arctan\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$= \int 9^u(2)\,du$$

$$= 2\int 9^u\,du$$

$$= 2\frac{9^{\arctan\sqrt{x}}}{\ln 9} + c$$

4.2.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration of trigonometric functions)

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ c คือค่าคงที่ใด ๆ

$$\int \sin u\,du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$$

$$\int \operatorname{cosec} u \cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + c$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + c$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$$

ตัวอย่าง 4.26 จงหาค่า $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$= \int \sec x(\tan x)\ dx$$

$$= \sec x + c$$

ตัวอย่าง 4.27 จงหาค่า $\int \tan(2x-5)dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = 2x-5$ จะได้ $du = 2dx$

$$\therefore dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \tan(2x-5)dx = \int \tan u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan u du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec(2x-5)| + c$$

ตัวอย่าง 4.28 จงหาค่า $\int e^{\sin 3x}\cos 3x\, dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \sin 3x$ จะได้ $du = 3\cos 3x dx$

$$\therefore \frac{du}{3} = \cos 3x dx$$

$$\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx = \int e^u \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{\sin 3x} + c$$

ตัวอย่าง 4.29 จงหาค่า $\int \frac{\operatorname{cosec}^2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = 1-2\sqrt{x}$ จะได้ $du = -\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\therefore \quad -du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int \operatorname{cosec}^2(1-2\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 u(-du)$$

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = -\int \operatorname{cosec}^2 u\,du$$

$$= -(-\cot u) + c$$

$$= \cot u + c$$

$$= \cot(1-2\sqrt{x}) + c$$

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในบางรูปแบบของโจทย์ จะต้องใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นเพื่อแปลงโจทย์ จึงสามารถหาปริพันธ์ได้

$$\sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$$

ตัวอย่าง 4.30 จงหาค่า $\int (\tan x - 1)^2 dx$

วิธีทำ

$$\int \boxed{(\tan x - 1)^2} dx = \int \left(\tan^2 x - 2\tan x + 1\right) dx$$
$$= \int \left(\left(1 + \tan^2 x\right) - 2\tan x\right) dx$$
$$= \int \left(\sec^2 x - 2\tan x\right) dx$$
$$= \int \sec^2 x dx - 2\int \tan x \, dx$$
$$= \tan x - 2\ln|\sec x| + c$$

$$\begin{aligned}(\tan x - 1)^2 &= (\tan x - 1)(\tan x - 1) \\ &= (\tan x)\cdot(\tan x) + \tan x(-1) \\ &\quad + (-1)\tan x + (-1)(-1) \\ &= (\tan x)^2 - \tan x - \tan x + 1 \\ &= \tan^2 x - 2\tan x + 1\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.31 จงหาค่า $\int \frac{1}{\sin x - 1} dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{1}{\sin x - 1} dx = \int \frac{1}{\sin x - 1} \times \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} dx$$
$$= \int \frac{\sin x + 1}{\boxed{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}} dx$$

$$\begin{aligned}(\sin x - 1)(\sin x + 1) &= \sin x \cdot \sin x + \sin x(1) \\ &\quad + (-1)\sin x + (-1)(1) \\ &= (\sin x)^2 + \sin x - \sin x - 1 \\ &= \sin^2 x - 1\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\sin x + 1}{\boxed{\sin^2 x - 1}} dx$$

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin^2 x - 1 &= \cos^2 x\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\sin x + 1}{-\cos^2 x} dx$$
$$= -\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$$
$$= -\int \boxed{(\cos x)^{-2} \sin x dx} - \int \sec^2 x dx$$

กำหนดให้ $u = \cos x$ จะได้ $du = -\sin x dx$

$$\therefore \sin x dx = -du$$

$$= -\int u^{-2}(-du) - \tan x + c$$
$$= \int u^{-2} du - \tan x + c$$
$$= \frac{u^{-1}}{-1} - \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x - 1}dx = -\frac{1}{u} - \tan x + c$$

$$= -\frac{1}{\cos x} - \tan x + c$$

$$= -\sec x - \tan x + c$$

4.2.5 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่จัดอยู่ในรูปแบบ u^2 และ a^2

$u^2 + a^2, u^2 - a^2, a^2 - u^2, \sqrt{u^2 + a^2}, \sqrt{u^2 - a^2}$ **หรือ** $\sqrt{a^2 - u^2}$

โดยที่ u เป็นฟังก์ชันของ x และ a, c คือ ค่าคงที่ใด ๆ ตามสูตรดังนี้

ชุดที่ 1 รูปแบบเป็นตัวหาร (อยู่ด้านล่าง)

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}arc\sec\frac{u}{a} + c$$

ชุดที่ 2 รูปแบบเป็นตัวตั้งหาร (อยู่ด้านบน)

$$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$$

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+c$$

ตัวอย่าง 4.32 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2+25}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $u=x$ และ $a=5$

ดังนั้น $du=dx$

$$\int \frac{dx}{x^2+25} = \boxed{\int \frac{dx}{x^2+(5)^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c}$$

$$= \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}+c$$

ตัวอย่าง 4.33 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $u=\ln x$ และ $a=3$

ดังนั้น $du=d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

หรือ $d(\ln x)=\frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}} = \boxed{\int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{(\ln x)^2-(3)^2}}}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c}$$

$$= \ln\left|\ln x+\sqrt{(\ln x)^2-(3)^2}\right|+c$$

$$= \ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-9}\right|+c$$

ตัวอย่าง 4.34 จงหาค่า $\int \sqrt{4-e^{2x}}\ e^x\,dx$

วิธีทำ จากโจทย์ $u=e^x$ และ $a=2$

ดังนั้น $du=d\left(e^x\right)=e^x dx$

$$\int \sqrt{4-e^{2x}}\ e^x\,dx = \boxed{\int \sqrt{2^2-(e^x)^2}\ d(e^x)}$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+c}$$

$$=\frac{e^x}{2}\sqrt{2^2-\left(e^x\right)^2}+\frac{2^2}{2}\arcsin\frac{e^x}{2}+c$$

$$=\frac{e^x}{2}\sqrt{4-e^{2x}}+2\arcsin\frac{e^x}{2}+c$$

ตัวอย่าง 4.35 จงหาค่า $\int \frac{\operatorname{cosec} x\ \cot x}{1-\operatorname{cosec}^2 x}\,dx$

วิธีทำ จากโจทย์ $u=\operatorname{cosec} x$ และ $a=1$

ดังนั้น $du=d(\operatorname{cosec} x)-\operatorname{cosec} x\ \cot x\,dx$

หรือ $\operatorname{cosec} x\ \cot x\,dx=-d(\operatorname{cosec} x)$

$$\int \frac{\operatorname{cosec} x\ \cot x}{1-\operatorname{cosec}^2 x}\,dx=\int \frac{\operatorname{cosec} x\ \cot x}{1-(\operatorname{cosec} x)^2}\,dx$$

$$=\int \frac{-d\left(\operatorname{cosec} x\right)}{1^2-\left(\operatorname{cosec} x\right)^2}$$

$$=\boxed{-\int \frac{d\left(\operatorname{cosec} x\right)}{1^2-\left(\operatorname{cosec} x\right)^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c}$$

$$=-\frac{1}{2(1)}\ln\left|\frac{1+\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{cosec} x}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{cosec} x}\right|+c$$

เนื่องจาก 4 ตัวอย่างที่ผ่านมาข้างต้น รูปแบบของโจทย์สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ u^2 และ a^2 ได้อย่างง่ายชัดเจนและไม่ซับซ้อน แต่ถ้าโจทย์กำหนดให้แตกต่างจากเดิม จึงต้องทำการจัดให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวให้ได้ โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ ดังสูตรต่อไปนี้

ผลรวมทั้งหมดกำลังสอง

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= \underline{aa+ab}+\underline{ba+bb}$$

ดังนั้น $$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(\text{หน้า}+\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

หรือให้ง่ายต่อการเขียน $$(\text{น}+\text{ล})^2 = \text{น}^2 + 2\text{นล} + \text{ล}^2$$

ผลต่างทั้งหมดกำลังสอง

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= \underline{aa+a(-b)}-\underline{ba-b(-b)}$$

ดังนั้น $$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(\text{หน้า}-\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า})^2 - 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

หรือให้ง่ายต่อการเขียน $$(\text{น}-\text{ล})^2 = \text{น}^2 - 2\text{นล} + \text{ล}^2$$

เช่น ① x^2+2x-3 สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2 ได้ โดยใช้สูตรผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $2x$ เป็นลบ

$$\text{น}^2 + 2\text{นล} + \text{ล}^2$$
$$x^2+2x-3 = \underbrace{(x)^2+2(x)[1]+[1]^2}\underline{-[1]^2-3}$$

มีการบวกเข้าโดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 1

$$x^2+2x-3 = \underbrace{(x)^2+2(x)[1]+[1]^2}_{(\text{น}+\text{ล})^2}\underline{-4}$$

$$= \underline{(x+1)^2}-4$$

$$\boxed{\text{น}^2 + 2\text{นล} + \text{ล}^2 = (\text{น}+\text{ล})}$$

$\therefore\ x^2+2x-3 = (x+1)^2-2^2$ หรืออยู่ในรูปของ u^2-a^2 โดยที่ $u=x+1$ และ $a=2$

② $4x^2-4x+5$ สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2 ได้ โดยใช้สูตรผลต่างทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $4x$ เป็นลบ

$$4x^2-4x+5=\underbrace{\overset{\text{น}^2\ -\ 2\text{นล}\ +\ \text{ล}^2}{(2x)^2-2(2x)[1]+[1]^2}}-[1]^2+5$$

มีการบวกเข้า $[1]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = $2x$ และ ล = 1

$$4x^2-4x+5=\underbrace{(2x)^2-2(2x)[1]+[1]^2}_{(\text{น - ล})^2}\underline{-[1]^2+5}$$

น^2 - 2นล + ล^2 = $(\text{น - ล})^2$

$$=\underline{(2x-1)^2}\,\underline{+4}$$

$$\therefore\ 4x^2-4x+5=(2x-1)^2+2^2$$

หรืออยู่ในรูปของ u^2+a^2 โดยที่ $u=2x-1$ และ $a=2$

③ $8-2x-x^2$ จะต้องทำการจัดเรียงให้ x อยู่ร่วมกัน เพื่อจะได้สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2

$$8-2x-x^2=8-(2x+x^2)$$
$$=8-(x^2+2x)$$

โดยใช้สูตรผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $2x$ เป็นบวก

$$8-(x^2+2x)=8-\{\underbrace{\overset{\text{น}^2\ +\ 2\text{นล}\ +\ \text{ล}^2}{(x)^2+2(x)[1]+[1]^2}}-[1]^2\}$$

มีการบวกเข้า $[1]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 1

$$8-(x^2+2x)=8-\{\underbrace{(x)^2+2(x)[1]+[1]^2}_{(\text{น + ล})^2}-[1]^2\}$$

น^2 + 2นล + ล^2 = $(\text{น + ล})^2$

$$=8-\{\underline{(x+1)^2}-1\}=\underline{8}-(x+1)^2\,\underline{+1}$$
$$=\underline{9}-(x+1)^2$$

$$\therefore\ 8-2x-x^2=3^2-(x+1)^2$$

หรืออยู่ในรูปของ a^2-u^2 โดยที่ $u=x+1$ และ $a=3$

ตัวอย่าง 4.36 จงหาค่า $\int \frac{dx}{(x^2-10x+16)}$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $x^2-10x+16$ ให้อยู่ในรูปผลต่างทั้งหมดกำลังสอง

เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $10x$ เป็นลบ

$$\underbrace{x^2-10x+16=(x)^2-2(x)[5]+[5]^2}_{น^2-2นล+ล^2}-[5]^2+16$$

มีการบวกเข้า $[5]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[5]^2$

ดังนั้น น $= x$ และ ล $= 5$

$$x^2-10x+16=\underline{(x)^2-2(x)[5]+[5]^2}\ \underline{-25+16}$$

$$=\underbrace{(x-5)^2}_{(น-ล)^2}-9$$

น² - 2นล + ล² = (น - ล)

$\therefore\ x^2-10x+16=(x-5)^2-3^2$

หรืออยู่ในรูปของ u^2-a^2 โดยที่ $u=x-5$ และ $a=3$

ดังนั้น $du=d(x-5)=dx$

$$\int \frac{dx}{(x^2-10x+16)}=\int \frac{dx}{(x-5)^2-3^2}$$

$$=\int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2}$$

$$=\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right|+c$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+c$$

ตัวอย่าง 4.37 จงหาค่า $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+10}}$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $4x^2+4x+10$ ให้อยู่ในรูปผลรวมทั้งหมดกำลังสอง
เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $4x$ เป็นบวก

$$4x^2+4x+10 = \underbrace{\overset{\text{น}^2}{(2x)^2} + \overset{2\text{นล}}{2(2x)[1]} + \overset{\text{ล}^2}{[1]^2}} - [1]^2 + 10$$

มีการบวกเข้า $[1]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = $2x$ และ ล = 1

$$4x^2+4x+10 = (2x)^2 + 2(2x)[1] + [1]^2 - 1 + 10$$

$$= \underbrace{(2x+1)^2}_{(\text{น}+\text{ล})^2} + 9$$

$\boxed{\text{น}^2 + 2\text{นล} + \text{ล}^2 = (\text{น}+\text{ล})^2}$

$$\therefore\ 4x^2+4x+10 = (2x+1)^2 + 3^2$$

หรืออยู่ในรูปของ u^2+a^2 โดยที่ $u = 2x+1$ และ $a = 3$

ดังนั้น $du = d(2x+1) = 2dx$ $\quad \therefore\ dx = \frac{du}{2} = \frac{d(2x+1)}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+3^2}}$$

$$= \int \frac{d(2x+1)}{2\sqrt{(2x+1)^2+3^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+3^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|(2x+1) + \sqrt{(2x+1)^2+3^2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|(2x+1) + \sqrt{4x^2+4x+10}\right| + c$$

ตัวอย่าง 4.38 จงหาค่า $\int \sqrt{7+6x-x^2}\;dx$

<u>วิธีทำ</u> จะต้องทำการจัดเรียงให้ x อยู่ร่วมกัน

เพื่อจะได้สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2

$$
\begin{aligned}
7+6x-x^2 &= 7-\left(-6x+x^2\right) \\
&= 7-\left(x^2-6x\right)
\end{aligned}
$$

โดยใช้สูตรผลต่างทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $6x$ เป็นลบ

$$
\text{น}^2 - 2\text{นล} + \text{ล}^2
$$

$$
7-\left(x^2-6x\right)=7-\left\{\underbrace{(x)^2-2(x)[3]+[3]^2}-[3]^2\right\}
$$

มีการบวกเข้า $[3]^2$ โดยการบังคับ จากสูตรจึงต้องทำการ $-[3]^2$

ดังนั้น น $= x$ และ ล $= 1$

$$
7-\left(x^2-6x\right)=7-\left\{\underbrace{(x)^2-2(x)[3]+[3]^2}_{(\text{น}\,-\,\text{ล})^2}-[3]^2\right\}
$$

$\boxed{\text{น}^2 - 2\text{นล} + \text{ล}^2 = (\text{น} - \text{ล})^2}$

$$
\begin{aligned}
&= 7-\left\{(x-3)^2-9\right\} = 7-(x+1)^2+9 \\
&= 16-(x-3)^2
\end{aligned}
$$

$\therefore\; 7+6x-x^2 = 4^2-(x-3)^2$

ดังนั้น $\sqrt{7+6x-x^2} = \sqrt{4^2-(x-3)^2}$

หรืออยู่ในรูปของ a^2-u^2 โดยที่ $u = x-3$ และ $a = 4$

$$
du = d(x-3) = dx
$$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{7+6x-x^2}\;dx &= \int \sqrt{4^2-(x-3)^2}\;dx \\
&= \int \sqrt{4^2-(x-3)^2}\;d(x-3) \\
&= \frac{(x-3)}{2}\sqrt{4^2-(x-3)^2}+\frac{4^2}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+c \\
&= \frac{x-3}{2}\sqrt{7+6x-x^2}+8\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+c
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 4.39 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x(9\ln^2 x - 24\ln x + 20)}$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $9\ln^2 x - 24\ln x + 20$ ให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $24\ln x$ เป็นลบ

$$\begin{aligned}
9\ln^2 x - 24\ln x + 20 &= \underbrace{\overset{น^2}{(3\ln x)^2} - \overset{-2\,น\,ล}{2(3\ln x)(4)} + \overset{+ล^2}{(4)^2}}_{} - (4)^2 + 20 \\
&= (3\ln x - 4)^2 - 16 + 20 \\
&= (3\ln x - 4)^2 + 4 \\
9\ln^2 x - 24\ln x + 20 &= (3\ln x - 4)^2 + 2^2
\end{aligned}$$

$น^2 - 2นล + ล^2 = (น - ล)^2$

มีการบวกเข้า $[4]^2$ โดยการบังคับ จากสูตรจึงต้องทำการ $-[4]^2$

หรืออยู่ในรูปของ $u^2 + a^2$ โดยที่ $u = 3\ln x - 4$ และ $a = 2$

ดังนั้น $du = \frac{3}{x}dx$,

$$\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{3} = \frac{d(3\ln x - 4)}{3}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(9\ln^2 x - 24\ln x + 20)} &= \int \frac{d(3\ln x - 4)}{3\left((3\ln x - 4)^2 + 2^2\right)} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{d(3\ln x - 4)}{(3\ln x - 4)^2 + 2^2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\ln x - 4}{2}\right) + c \\
&= \frac{1}{6}\arctan\frac{3\ln x - 4}{2} + c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.40 จงหาค่า $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5}}{\operatorname{cosec} x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $\cos^2 x + 4\cos x - 5$ ให้อยู่ในรูปผลรวมกำลังสอง

เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $4\cos x$ เป็นบวก

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad น^2 \;+\; 2\;น\;\;ล \;+ ล^2\\
\cos^2 x + 4\cos x - 5 &= \underbrace{(\cos x)^2 + 2(\cos x)(2) + (2)^2}_{} - (2)^2 - 5\\
&= \underline{(\cos x + 2)^2}\; \underline{-4-5}\\
&= (\cos x + 2)^2 \underline{-9}\\
\cos^2 x + 4\cos x - 5 &= (\cos x + 2)^2 - 3^2
\end{aligned}$$

น² - 2นล + ล² = (น - ล)²

มีการบวกเข้า $[4]^2$ โดยการบังคับ จากสูตรจึงต้องทำการ $-[4]^2$

หรืออยู่ในรูปของ $u^2 - a^2$ โดยที่ $u = \cos x + 2$ และ $a = 3$

ดังนั้น $du = -\sin x\,dx$,

$$du = -\frac{1}{\operatorname{cosec} x}\,dx$$

$$\frac{dx}{\operatorname{cosec} x} = -du = -d(\cos x + 2)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5}}{\operatorname{cosec} x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}}{\operatorname{cosec} x}\\
&= \int \sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}\,\left(-d(\cos x + 2)\right)\\
&= -\int \sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}\; d(\cos x + 2)
\end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{\cos x + 2}{2}\right)\sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2} - \frac{3^2}{2}\ln\left|\cos x + 2 + \sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}\right| + c$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\cos x\right)\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5} - \frac{9}{2}\ln\left|\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5}\right| + c$$

บทสรุป

การหาปริพันธ์หรือที่เรียกว่าการอินทิเกรตเป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ เรียกว่าการหาปฏิยานุพันธ์ ในบทนี้ได้ใช้สูตรพื้นฐานต่าง ๆ ของการหาปริพันธ์ดังนี้

1. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
2. การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร
3. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
4. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่จัดอยู่ในรูปแบบ u^2 และ a^2

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\int (4x^3 - 3x^2 + x)dx$

1.2 $\int \left(x^{\frac{3}{4}} + 5x - x^{\frac{1}{3}} \right) dx$

1.3 $\int \left(2x^{\frac{2}{3}} - 6\sqrt{x} + 1 \right) dx$

1.4 $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$

1.5 $\int \sqrt{x}(11\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x} - 1)dx$

1.6 $\int \left(\frac{8x^2 + 4\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$

1.7 $\int \frac{(x+2)}{(x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}} dx$

1.8 $\int x\sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

1.9 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}} dx$

1.10 $\int \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} dx$

1.11 $\int \frac{5\ln^4 5x}{x} dx$

1.12 $\int \cos^3 x \cdot \sin x\, dx$

1.13 $\int x \frac{\arcsin x^2}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

1.14 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$

2. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $\int \frac{2}{3 - x} dx$

2.2 $\int \frac{x^3}{3x^4 + 1} dx$

2.3 $\int \frac{\sec^2 x}{5 - e^{2x}} dx$

2.4 $\int \frac{x^{-1}}{\ln x} dx$

2.5 $\int \frac{\sec^{2x}}{\tan x+1}dx$

2.6 $\int \frac{\cos x}{\sin x-3}dx$

2.7 $\int \frac{3}{(1+x^2)\,arc\cot x}dx$

2.8 $\int (2x-3)^{19}\,dx$

2.9 $\int \frac{\ln^2 x}{x\ln 5}dx$

2.10 $\int \frac{1-x^2}{x-2}dx$

2.11 $\int xe^{(5x^2-1)}\,dx$

2.12 $\int \frac{x^2}{(x^3+4)^4}dx$

2.13 $\int (4x^3+5x-1)^3(8x+5)\,dx$

2.14. $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2-5}dx$

2.15 $\int \sqrt{4x+1}\,dx$

2.16 $\int e^{(e^x+x)}\,dx$

2.17 $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$

2.18 $\int (2x-3)^{19}\,dx$

2.19 $\int 3^{\cos x}\sin x dx$

2.20 $\int (x-1)e^{x^2-2x+5}\,dx$

3. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $\int x^3\tan(5x^4-1)dx$

3.2 $\int \frac{\cos ec^2 x^{-1}}{x^2}dx$

3.3 $\int \frac{\sin(arc\cot x)}{1+x^2}dx$

3.4 $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx$

3.5 $\int \sec 5x\,\tan 5x\,dx$

3.6 $\int \frac{\cos(\ln\sqrt{x}-2)}{x}dx$

3.7 $\int e^x\cos ec\,e^x\cot e^x dx$

3.8 $\int \frac{\cos ec\sqrt{x}}{\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}dx$

3.9 $\int \frac{\cos x-1}{\sin^2 x}dx$

3.10 $\int \frac{\tan(\arctan 2x)}{1+4x^2}dx$

4. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $\int \frac{dx}{x^2+9}$

4.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$

4.3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$

4.4 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

4.5 $\int \sqrt{4x^2-9}\,dx$

4.6 $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx$

4.7 $\int \frac{\cos 2x}{8-\sin^2 2x}dx$

4.8 $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x-1)}$

4.9 $\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$

4.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$

4.11 $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

4.12 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-18x+13}}$

4.13 $\int \frac{dx}{3-12x-4x^2}$

4.14 $\int e^x\sqrt{15-2e^x-e^{2x}}\,dx$

4.15 $\int \frac{\sin x}{4\cos^2 x-16\cos x-9}dx$

เอกสารอ้างอิง

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

ภิรดี ฤทธิเดช. (2560). **แคลคูลัสพื้นฐาน.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.

เทคนิคการหาปริพันธ์ บทที่
Techniques of Integration 5

การหาปริพันธ์ในบางโจทย์ไม่สามารถใช้สูตรที่มีอยู่ในรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบสูตรพื้นฐานทั่วไปได้ จึงจำเป็นจะต้องทำการเปลี่ยนรูปหรือแปลงโจทย์ก่อนการใช้สูตร โดยวิธีการนี้จะเรียกว่า เทคนิคการหาปริพันธ์

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. สามารถเลือกใช้วิธีเทคนิคการหาปริพันธ์ที่เหมาะสมกับโจทย์ได้
2. สามารถหาค่าปริพันธ์ได้จากเทคนิคการหาปริพันธ์
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

5.1 การหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วน (Integration by parts)

วิธีนี้เป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบของผลคูณ 2 ฟังก์ชัน เช่น การหาปริพันธ์ในลักษณะดังกล่าว จะทำได้ก็ต่อเมื่อและเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้จาก

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

ทำการปริพันธ์ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\boxed{\therefore \int udv = uv - \int vdu}$$

การหาปริพันธ์โดยใช้สูตรนี้ได้โดย แบ่งเป็นฟังก์ชันออกเป็น 2 ส่วน คือ u และ dv

1. ทำการเลือก dv ก่อน โดยฟังก์ชันจะต้องเป็นฟังก์ชันที่ดูซับซ้อนหรือยุ่งยาก แต่จะต้องสามารถหาปริพันธ์ได้ เนื่องจากจะต้องนำ dv ไปทำการหาปริพันธ์ เพื่อให้ได้ v มา แล้วจึงนำไปแทนค่าทางด้านขวามือของสูตร ซึ่งฟังก์ชันที่เลือกจะต้องติดค่า dx ไปด้วยเสมอเพื่อรองรับในการหาปริพันธ์

2. ส่วนที่เหลือ คือ u โดยนำไปหาค่า du เพื่อแทนสูตรทางด้านขวามือ
3. ถ้าส่วนของ $\int vdu$ ไม่สามารถหาคำตอบได้ ให้ทำการหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วนซ้ำต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบ หรือมีพจน์ที่ได้จากการทำเหมือนทางด้านซ้ายมือ
4. ย้ายพจน์ $\int vdu$ ไปด้านซ้ายมือแล้วแก้สมการแทนค่าหาคำตอบ

ตัวอย่าง 5.1 จงหาค่า $\int x\ln x dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก dv ที่ซับซ้อนแต่สามารถหาปริพันธ์ได้

ถ้าให้ $dv = \ln x\,dx$ เพื่อทำการหา $v = \int dv = \int \ln x\,dx$ ซึ่ง $\int \ln x\,dx$ ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ ถึงแม้ว่าจะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน จึงจำเป็นจะต้องเลือก dv ใหม่ คือ

$$dv = x\,dx \quad \text{นำไปหาค่า} \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \ln x \quad \text{นำไปหาค่า} \quad du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \quad u \quad dv$$

จาก $$\int x\ln x\,dx = \int (\ln x)\,(x\,dx)$$

$$u \quad v \quad - \int \quad v \quad du$$

$$= (\ln x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

ตัวอย่าง 5.2 จงหาค่า $\int x^2 \cos 4x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = \cos\ 4x\,dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int \cos 4x\,dx$

$$= \int \cos 4x \frac{d(4x)}{4} = \frac{1}{4}\sin 4x$$

$u = x^2$ นำไปหาค่า $du = d(x^2) = 2x\,dx$

$$\int u \quad dv \quad = u \quad v \quad - \int v \quad du$$

จาก $$\int x^2 \cos 4x\,dx = x^2\left(\frac{1}{4}\right)\sin 4x - \int \frac{1}{4}(\sin 4x)(2x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\boxed{\int x\sin 4x\,dx}\ * \qquad (1)$$

เนื่องจาก $\int x\sin 4x\,dx$ ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังนั้นจะต้องนำไปหาปริพันธ์โดยแยกทีละส่วนซ้ำ

เลือก $dv = \sin\ 4x\,dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int \sin 4x\,dx$

$$= \int \sin 4x \frac{d(4x)}{4} = -\frac{1}{4}\cos 4x$$

$u = x$ นำไปหาค่า $du = dx$

$$\int u \quad dv \quad = u \quad v \quad - \int v \quad du$$

จาก * $$\int x\sin 4x\,dx = x\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - \int\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx$$

$$= -\frac{x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x + c$$

นำคำตอบที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่ (1)

$$\int x^2\cos 4x\,dx = \frac{x^2}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{4}\sin 4x + \frac{x}{8}\cos 4x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาค่า $\int arc\cot x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = arc\cot x\,dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int arc\cot x\,dx$

ซึ่ง $\int arc\cot x\,dx$ ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ ถึงแม้ว่าจะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน จึงจำเป็นจะต้อง

เลือก dv ใหม่ คือ $dv = dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int dx = x$

$u = arc\cot x$ นำไปหาค่า $du = d\left(arc\cot x\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$\int u\,dv$$

จาก $\int arc\cot x\,dx = \int \overset{u}{(arc\cot x)}\,\overset{dv}{dx}$

$$u\,v - \int v\,du$$

$$\int arc\cot x\,dx = (arc\cot x)x - \int x\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x\,arc\cot x + \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= x\,arc\cot x + \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2}$$

$$= x\,arc\cot x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$$

ตัวอย่าง 5.4 จงหาค่า $\int x e^{2x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = e^{2x}\,dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int e^{2x}\,dx = \int e^{2x}\dfrac{d\left(2x\right)}{2} = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$u = x$ นำไปหาค่า $du = dx$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

จาก $\int \overset{u}{x}\,\overset{dv}{e^{2x}\,dx} = x\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \dfrac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\frac{d\left(2x\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

<u>การหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วนด้วยวิธีลัด</u> ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. สร้างตารางโดยให้ u อยู่ด้านซ้ายมือ เพื่อทำการหาอนุพันธ์ และให้ dv อยู่ด้านขวามือของตาราง เพื่อทำการหาปริพันธ์

u เพื่อหาอนุพันธ์ (D)	dv เพื่อหาปริพนธ์ (I)

โดยที่ D หมายถึง Differential หรือ การหาอนุพันธ์

I หมายถึง Integrate หรือ การหาปริพันธ์

2. เลือก dv ที่เป็นฟังก์ชันซับซ้อนแต่จะต้องสามารถหาปริพันธ์ได้ และ u คือ ส่วนที่เหลือจากการเลือก dv เพื่อนำไปหาอนุพันธ์ได้
3. หาอนุพันธ์ด้านซ้ายมือจนมีค่าเท่ากับศูนย์
4. ทำการหาปริพันธ์จาก dv ทางด้านขวามือ เพื่อให้ได้ค่า v
5. คูณทแยงจากบรรทัดแรกทางด้านซ้ายมือไปสู่บรรทัดที่สองของด้านขวามือในบรรทัดที่ 2 และทเช่นนี้ต่อไปจนสุดบรรทัดของทางด้านขวามือ
6. ผลจากการคูณทแยงในครั้งที่ 1 ด้วยเครื่องหมาย + ครั้งที่ 2 ด้วยเครื่องหมาย – สลับกันไป กล่าวได้ คือ การคูณเครื่องหมายในการคูณกระทำกันของครั้งที่คี่ (หรือครั้งที่ 1, 3, 5,…) เป็นเครื่องหมาย + และครั้งที่คู่ (หรือครั้งที่ 2, 4, 6,…) เป็นเครื่องหมาย -

ตัวอย่าง 5.5 จากตัวอย่าง 5.4 จงหาค่า $\int xe^{2x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = e^{2x}\,dx$ และ $u = x$ สร้างตารางได้ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
x	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

ดังนั้น

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

ซึ่งจะได้คำตอบเช่นเดียวกับตัวอย่าง 5.4 โดยใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วน

ตัวอย่าง 5.6 จงหาค่า $\int (x^2+1)\sin 2x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = \sin 2x\,dx$ และ $u = x^2+1$ สร้างตารางได้ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
x^2+1	$\sin 2x$
$2x$	$-\frac{\cos 2x}{2}$
2	$-\frac{\sin 2x}{4}$
0	$\frac{\cos 2x}{8}$

ดังนั้น

$$\int (x^2+1)\sin 2x\,dx = (x^2+1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - 2x\left(-\frac{\sin 2x}{4}\right) + 2\left(\frac{\cos 2x}{8}\right) + c$$

$$= -\frac{x^2+1}{2}(\cos 2x) - \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

ตัวอย่าง 5.7 จงหาค่า $\int x^3 \cos x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = \cos x\,dx$ และ $u = x^3$ สร้างตารางได้ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
x^3	$\cos x$
$3x^2$	$\sin x$
$6x$	$-\cos x$
6	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$\int x^3 \cos x\,dx = x^3 \sin x - 3x^2(-\cos x) + 6x(-\sin x) - 6\cos x + c$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c$$

<u>ข้อสังเกต</u> ในการทำด้วยวิธีลัดนี้ ในการเลือก u ควรจะต้องเป็นฟังก์ชันพหุนาม (หรือที่ติดอยู่ในรูปตัวแปร x) เนื่องจากเมื่อทำการหาอนุพันธ์ไปจนท้ายสุดจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วน dv ควรจะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันในรูปของ $\sin$, $\cos$ หรือ e

ตารางแบบวิธีลัดที่ 1

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
ฟังก์ชันพหุนามตัวแปร x	e หรือ $\sin$ หรือ $\cos$

ตัวอย่าง 5.8 จงหาค่า $\int e^{x}\cos 2x\,dx$

ทั้งวิธีปกติของการหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วนและวิธีลัด

<u>วิธีทำ</u> **วิธีปกติ** เลือก $dv=\cos 2x\,dx$ นำไปหาค่า $v=\int dv$

$$=\int \cos 2x\,dx$$
$$=\int \cos 2x\,d\frac{(2x)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$u=e^{x}$ นำไปหาค่า $du=e^{x}dx$

$$\int u\ \ dv \quad = \quad u \quad v \quad - \int \quad v \quad du$$
$$\int e^{x}\cos 2x\,dx = e^{x}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)-\int \frac{1}{2}\sin 2x\,(e^{x})\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x-\frac{1}{2}\boxed{\int e^{x}\sin 2x\,dx}$$

เนื่องจาก $\int e^{x}\sin 2x\,dx$ ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังนั้นจะต้องนำไปหาปริพันธ์โดยแยกทีละส่วนซ้ำ

เลือก $dv=\sin 2x\,dx$ นำไปหาค่า $v=\int dv=\int \sin 2x\,dx$

$$=\int \sin 2x\,d\frac{(2x)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x)$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos 2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$u=e^{x}$ นำไปหาค่า $du=d\left(e^{x}\right)=e^{x}\,dx$

$$\int u\ \ dv \quad = \quad u \quad v \quad - \int \quad v \quad du$$
$$\int e^{x}\sin 2x\,dx = e^{x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int -\frac{1}{2}\cos 2x\,(e^{x})\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^{x}\cos 2x\,dx$$

นำไปแทนค่าในสมการที่ (1)

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx
\end{aligned}$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\frac{4}{4}\int e^x \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int e^x \cos 2x\,dx &= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x\right) \\
&= \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \cos 2x + c
\end{aligned}$$

วิธีลัด

เลือก dv ที่ดูเป็นฟังก์ชันซับซ้อนหรือดูยุ่งยากกว่า $dv = \cos 2x dx$ และ $u = e^x$ สร้างตารางได้ ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
e^x	$\cos 2x$
e^x	$\frac{\sin 2x}{2}$
e^x	$-\frac{\cos 2x}{4}$

จะเห็นได้ว่าทางด้านซ้ายมือของการหาอนุพันธ์จะไม่มีทางเป็นไปได้ ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ถ้าเกิดในกรณีเช่นนี้

1. ให้ทำการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันทางด้านขวามือจนได้ฟังก์ชันที่ซ้ำเดิมเหมือนโจทย์ กล่าวคือ ทำการหาค่าอนุพันธ์และปริพันธ์เพียง 2 ครั้งเท่านั้น ทางด้านขวามือก็จะให้ค่าซ้ำเช่นเดียวกับโจทย์
2. เพิ่มผลคูณโดยวนกลับจากผลลัพธ์ของการหาปริพันธ์ในขั้นสุดท้ายและทำการวนกลับไปทางด้านขวามือของบรรทัดสุดท้ายเช่นเดียวกัน แต่ต้องมีเครื่องหมาย $+\int \ldots dx$ ไปด้วย แล้วหาผลลัพธ์เป็นคำตอบ

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
e^x	$\cos 2x$
e^x	$+$ $\dfrac{\sin 2x}{2}$
e^x	$-$ $-\dfrac{\cos 2x}{4}$

$+$ $\int \ldots dx$

หยุดหาปริพันธ์เพราะได้

ฟังก์ชันซ้ำเดียวกับโจทย์ที่ให้

ดังนั้น
$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{e^x \sin 2x}{2} - e^x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) + \int e^x\left(\frac{-\cos 2x}{4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x\right)$$

$$= \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x + c$$

<u>ข้อสังเกต</u> ในการทำด้วยวิธีลัดนี้ ในการเลือก u ควรจะต้องเป็นฟังก์ชัน e ส่วน dv ควรจะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันในรูปของ $\sin$, $\cos$ หรือ e สรุปได้ดังนี้

ตารางแบบวิธีลัดที่ 2

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
e	sin หรือ cos

5.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบแน่นอน

(Integrals involving trigonometric functions)

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยปกติทั่วไปทั้งที่อยู่ในรูปแบบของการยกกำลัง ซึ่งเราไม่สามารถนำสูตรปริพันธ์พื้นฐานมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้ จึงจำเป็นต้องใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติเบื้องต้นช่วยในการแปลงรูปแบบของการหาปริพันธ์ เพื่อให้ใช้สูตรพื้นฐานในการหาปริพันธ์ได้ โดยจะพิจารณาการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น 4 รูปแบบ ดังนี้

1. $\int \sin^m u\,du$, $\int \cos^n u\,du$ และ $\int \sin^m u \cos^n u\,du$
2. $\int \sin u \cos v\,dx$, $\int \sin u \sin v\,dx$ และ $\int \cos u \cos v\,dx$
3. $\int \tan^n u\,du$ และ $\int \cot^n u\,du$
4. $\int \sec^n u\,du$ และ $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$

   $\int \tan^m u \sec^n u\,du$ และ $\int \cot^m u \operatorname{cosec}^n u\,du$

โดยที่ฟังก์ชัน u และ v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

5.2.1 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sin^m u\,du$, $\int \cos^n u\,du$ และ $\int \sin^m u \cos^n u\,du$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่บวก ให้ใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ

$$\boxed{\sin^2 u = \frac{1}{2}(1-\cos 2u) \text{ หรือ } \cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า m และ n เป็นจำนวนคี่บวก (อีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้)

- ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก คือ เลขชี้กำลังของ $\sin u$ ให้แปลงจาก $\sin^m u = \sin^{m-1} u \cdot \sin u$ แล้วใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 u = 1-\cos^2 u$
- ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวก คือ เลขชี้กำลังของ $\cos u$ ให้แปลงจาก $\cos^n u = \cos^{n-1} u \cdot \cos u$ แล้วใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos^2 u = 1-\sin^2 u$

ตัวอย่าง 5.9 จงหาค่า $\int \sin^2 3x\, dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \sin^2 3x\, dx = \int \frac{1}{2}[1-\cos 2(3x)]dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\, \frac{d(6x)}{6}$$

$$\int \sin^2 3x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\int \cos 6x\, d(6x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

ตัวอย่าง 5.10 จงหาค่า $\int \frac{\cos^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \frac{\cos^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^4 \sqrt{x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\cos^2 \sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\sqrt{x}\right)\right)^2 dx$$

$$\int \frac{\cos^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \; \frac{1}{4}\left(1+\cos 2\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1+2\cos 2\sqrt{x}+\cos^2 2\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\cos^2 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx+\frac{1}{4}\int \frac{\cos^2 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\int 2\cos 2\sqrt{x}\,d\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2 2\sqrt{x}dx$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\;\frac{1}{2}\left(1+\cos 4\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\cos 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{8}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{8}\int \frac{\cos 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{8}\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\int \cos 4\sqrt{x}\,\frac{d\left(4\sqrt{x}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\sqrt{x}+\frac{1}{16}\sin 4\sqrt{x}+c$$

ตัวอย่าง 5.11 จงหาค่า $\int \sin^4 x\cos^2 x dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\right)^2 \left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}\left(1-\cos 2x\right)^2\right) \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)dx$$

$$\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)(1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (\cos^3 2x-\cos^2 2x+\cos 2x+1) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx-\frac{1}{8}\int \cos^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \cos 2x dx+\frac{1}{8}\int 1 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\cos 2x dx-\frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx+\frac{1}{8}\int \cos 2x dx+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx-\frac{1}{16}\int (1+\cos 4x) dx+\frac{1}{8}\int \cos 2x\frac{d(2x)}{2}+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int (\cos 2x-\sin^2 2x\ \cos 2x) dx-\frac{1}{16}\int (1) dx-\frac{1}{16}\int \cos 4x dx+\frac{1}{16}\int \cos 2x\ \ d(2x)+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos 2x dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\ \ \cos 2x dx-\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\int \cos 4x\frac{d(4x)}{4}+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos 2x\frac{d(2x)}{2}-\frac{1}{8}\int (\sin 2x)^2\ \ \frac{d(\sin 2x)}{2}-\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{x}{8}$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}\frac{(\sin 2x)^3}{3}-\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{x}{8}$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{x}{16}+c$$

$$= -\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{x}{16}+c$$

ตัวอย่าง 5.12 จงหาค่า $\int e^x \sin^3 e^x dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int e^x \sin^3 e^x dx = \int e^x \sin^2 e^x \sin e^x dx$$

$$= \int e^x (1-\cos^2 e^x) \sin e^x dx$$

$$\int e^x \sin^3 e^x dx = \int \left(1-\cos^2 e^x\right)\frac{d\left(\cos e^x\right)}{-1}$$

$$= -\int \left(1-\cos^2 e^x\right) d\left(\cos e^x\right)$$

$$= -\int 1d\left(\cos e^x\right) + \int \left(\cos e^x\right)^2 d\left(\cos e^x\right)$$

$$= -\cos e^x + \frac{\left(\cos e^x\right)^3}{3} + c$$

$$= -\cos e^x + \frac{1}{3}\cos^3 e^x + c$$

ตัวอย่าง 5.13 จงหาค่า $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) d\left(\sin x\right)$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) - \int \left(\sin^4 x\right) d\left(\sin x\right)$$

$$= \frac{\left(\sin x\right)^3}{3} - \frac{\left(\sin x\right)^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

ตัวอย่าง 5.14 จงหาค่า $\int \sin^5 x \cos^{-3} x dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \sin^5 x \cos^{-3} x dx = \int \sin^4 x \sin x \cos^{-3} x dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x \cos^{-3} x dx$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x \cos^{-3} x dx$$

$$= \int \left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\cos^{-3} x \ \sin x dx$$

$$= \int \left(\cos^{-3} x - 2\cos^{-1} x + \cos x\right) \sin x dx$$

$$= \int \left((\cos x)^{-3} - \frac{1}{\cos x} + \cos x \right) \frac{d(\cos x)}{-1}$$

$$= -\int \left((\cos x)^{-3} - \frac{1}{\cos x} + \cos x \right) d(\cos x)$$

$$= -\left(\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} - \ln\left|\cos x\right| - \frac{(\cos x)^{2}}{2} \right) + c$$

$$= (\cos x)^{-2} + \ln\left|\cos x\right| + \frac{\cos^2 x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \ln\left|\cos x\right| + \frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

5.2.2 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sin u \cos v dx$, $\int \sin u \sin v dx$ และ $\int \cos u \cos v dx$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ

1. $\sin u \cos v = \frac{1}{2}\left[\sin(u+v) + \sin(u-v)\right]$
2. $\sin u \sin v = -\frac{1}{2}\left[\cos(u+v) - \cos(u-v)\right]$
3. $\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$

เมื่อใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลงเรียบร้อยแล้ว ให้ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ และใช้สูตร $\int \sin u du$ หรือ $\int \cos u du$ ในการหาค่า

ตัวอย่าง 5.15 จงหาค่า $\int \sin 4x \cos 3x dx$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\sin 4x \cos 3x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}\left[\sin(u+v) + \sin(u-v)\right]$$

$$\therefore \sin 4x \cos 3x = \frac{1}{2}\left[\sin(4x+3x) + \sin(4x-3x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 7x + \sin x\right]$$

$$\int \sin 4x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x \frac{d(7x)}{7} + \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= \frac{1}{14}\int \sin 7x \, d(7x) + \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= \frac{1}{14}(-\cos 7x) + \frac{1}{2}(-\cos x) + c$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + c$$

ตัวอย่าง 5.16 จงหาค่า $\int e^x \sin 5e^x \sin 2e^x dx$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\sin 5e^x \sin 2e^x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sin u \sin v = -\frac{1}{2}\left[\cos(u+v) - \cos(u-v)\right]$$

$$\therefore \sin 5e^x \sin 2e^x = -\frac{1}{2}\left[\cos(5e^x + 2e^x) - \cos(5e^x - 2e^x)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos 7e^x - \cos 3e^x\right]$$

$$\int e^x \sin 5e^x \sin 2e^x dx = \int e^x \left(-\frac{1}{2}(\cos 7e^x - \cos 3e^x)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int (\cos 7e^x)e^x dx + \frac{1}{2}\int (\cos 3e^x)e^x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 7e^x \frac{d(7e^x)}{7} + \frac{1}{2}\int \cos 3e^x \frac{d(3e^x)}{3}$$

$$= -\frac{1}{14}\sin 7e^x + \frac{1}{6}\sin 3e^x + c$$

ตัวอย่าง 5.17 จงหาค่า $\int \frac{\cos(6\ln x)\ \cos(\ln x)}{x}dx$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\cos(6\ln x)\ \cos(\ln x)$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v)+\cos(u-v)\right]$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos(6\ln x)\ \cos(\ln x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(6\ln x+\ln x)+\cos(6\ln x-\ln x)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(7\ln x)+\cos(5\ln x)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(6\ln x)\ \cos(\ln x)}{x}dx &= \int \frac{1}{2}\left[\cos(7\ln x)+\cos(5\ln x)\right]\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(7\ln x)\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int \cos(5\ln x)\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(7\ln x)\frac{d(7\ln x)}{7}+\frac{1}{2}\int \cos(5\ln x)\frac{d(5\ln x)}{5}\\ &= \frac{1}{14}\sin(7\ln x)+\frac{1}{10}\sin(5\ln x)+c\end{aligned}$$

5.2.3 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \tan^n u du$ และ $\int \cot^n u du$

เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 2$

<u>กรณีที่ 1</u> ในการหา $\int \tan^n u du$ ให้แยก $\tan^n u = \tan^{n-2} u\ \tan^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ และใช้หลักการหา $d(\tan u) = \sec^2 u du$

<u>กรณีที่ 2</u> ในการหา $\int \cot^n u du$ ให้แยก $\cot^n u = \cot^{n-2} u\ \cot^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ $\cot^2 u = \cos ec^2 u - 1$ ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ และใช้หลักการหา $d(\cot u) = -\cos ec^2 u du$

ตัวอย่าง 5.18 จงหาค่า $\int e^x \tan^3 e^x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\tan^n u = \tan^{n-2} u \ \tan^2 u$

$$\tan^3 e^x = \tan e^x \ \tan^2 e^x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\tan^2 e^x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$$

$$\tan^2 e^x = \sec^2 e^x - 1$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\tan^3 e^x = \tan e^x \ \left(\sec^2 e^x - 1\right)$

$$= \tan e^x \ \sec^2 e^x - \tan e^x$$

$$\int e^x \tan^3 e^x dx = \int \left(\tan e^x \ \sec^2 e^x - \tan e^x\right) e^x dx$$

$$= \int \left(\tan e^x\right)\left(\sec^2 e^x\right) e^x dx - \int \left(\tan e^x\right) e^x dx$$

$$= \int \left(\tan e^x\right) d\left(\tan e^x\right) - \int \left(\tan e^x\right) d\left(e^x\right)$$

$$= \frac{\left(\tan e^x\right)^2}{2} - \ln\left|\sec e^x\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 e^x - \ln\left|\sec e^x\right| + c$$

ตัวอย่าง 5.19 จงหาค่า $\int \cot^4 3x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\cot^n u = \cot^{n-2} u \ \cot^2 u$

$$\cot^4 3x = \cot^2 3x \ \cot^2 3x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\cot^2 3x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1$$

$$\cot^2 3x = \operatorname{cosec}^2 3x - 1$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\cot^4 3x = \cot^2 3x \ \left(\operatorname{cosec}^2 3x - 1\right)$

$$= \cot^2 3x \ \operatorname{cosec}^2 3x - \cot^2 3x$$

$$\int \cot^4 3x dx = \int \left(\cot^2 3x \ \ cosec^2 3x - \cot^2 3x\right) dx$$

$$= \int \cot^2 3x \ \ cosec^2 3x dx - \int \cot^2 3x dx$$

$$= \int (\cot 3x)^2 \frac{d(\cot 3x)}{-3} - \int \left(cosec^2 3x - 1\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int (\cot 3x)^2 d(\cot 3x) - \int cosec^2 3x \frac{d(3x)}{3} + \int 1 dx$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{(\cot 3x)^3}{3} - \frac{1}{3}(-\cot 3x) + x + c$$

$$= -\frac{1}{9}\cot^3 3x + \frac{1}{3}\cot x + x + c$$

5.2.4 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sec^n u du$, $\int cosec^n u du$ และ

$\int \tan^m u \sec^n u du$, $\int \cot^m u \, cosec^n u du$

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก

- ในกรณี $\sec^n u$ และ $\tan^m u \sec^n u$ ให้แยก $\sec^n u = \sec^{n-2} u \ \sec^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\sec^{n-2} u$ คือ $\boxed{\sec^2 u = 1 + \tan^2 u}$
- ในกรณี $cosec^n u$ และ $\cot^m u \, cosec^n u$ ให้แยก $cosec^n u = cosec^{n-2} u \ \ cosec^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $cosec^{n-2} u$ คือ $\boxed{cosec^2 u = 1 + \cot^2 u}$

ทั้ง 2 กรณีย่อยให้ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ จึงสามารถใช้การหาปริพันธ์ $\int u^n du$ ได้

กรณีที่ 2 ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก

- ในกรณี $\tan^m u \sec^n u$ ให้แยก $\tan^m u \sec^n u = \tan^{m-1} u \cdot \sec^{n-1} u \ (\tan u \ \sec u)$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\tan^{m-1} u$ คือ $\boxed{\tan^2 u = \sec^2 u - 1}$
- ในกรณี $\cot^m u \, cosec^n u$

ให้แยก $\cot^m u \ \ cosec^n u = \cot^{m-1} u \ \ cosec^{n-1} u \ \ (cosec u \ \ \cot u)$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\cot^{m-1} u$ คือ $\boxed{\cot^2 u = cosec^2 u - 1}$

ทั้ง 2 กรณีย่อยให้ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ จึงสามารถใช้การหาปริพันธ์ $\int u^n du$ ได้

ตัวอย่าง 5.20 จงหาค่า $\int \sec^4 \frac{x}{2}dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\sec^n u = \sec^{n-2} u \ \sec^2 u$

$$\sec^4 \frac{x}{2} = \sec^2 \frac{x}{2} \ \sec^2 \frac{x}{2} \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\sec^2 \frac{x}{2}$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sec^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\sec^4 \frac{x}{2} = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \sec^2 \frac{x}{2}$

$$\int \sec^4 \frac{x}{2}dx = \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \sec^2 \frac{x}{2}dx$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) 2d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\int 1d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2\int \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2 d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} + 2\frac{\left(\tan \frac{x}{2}\right)^3}{3} + c$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\tan^3 \frac{x}{2} + c$$

ตัวอย่าง 5.21 จงหาค่า $\int \operatorname{cosec}^6 2x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \ \operatorname{cosec}^2 u$

$$\operatorname{cosec}^6 2x = \operatorname{cosec}^4 2x \ \operatorname{cosec}^2 2x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\operatorname{cosec}^4 2x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\operatorname{cosec}^2 2x = 1 + \cot^2 2x$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\operatorname{cosec}^6 2x = (1 + \cot^2 2x) \ \operatorname{cosec}^2 2x$

$$\int \cos ec^{6} 2x\,dx = \int \left(1+\cot^{2} 2x\right)\cdot \cos ec^{2} 2xdx$$

$$= \int \left(1+2\cot^{2} 2x+\cot^{4} 2x\right)\frac{d\left(\cot 2x\right)}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1+2\cot^{2} 2x+\cot^{4} 2x\right)d\left(\cot 2x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int 1d\left(\cot 2x\right) - \int \left(\cot 2x\right)^{2} d\left(\cot 2x\right) - \frac{1}{2}\int \left(\cot 2x\right)^{4} d\left(\cot 2x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{\left(\cot 2x\right)^{3}}{3} - \frac{1}{2}\frac{\left(\cot 2x\right)^{5}}{5} + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{3}\cot^{3} 2x - \frac{1}{10}\cot^{5} 2x + c$$

ตัวอย่าง 5.22 จงหาค่า $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^{6} x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\sec^{n} u = \sec^{n-2} u \ \sec^{2} u$

$$\sec^{6} x = \sec^{4} x \ \sec^{2} x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\sec^{4} x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sec^{2} x = 1 + \tan^{2} x$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\sec^{6} 2x = \left(1+\tan^{2} x\right)^{2} \ \sec^{2} x$

$$\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^{6} xdx = \int \tan^{\frac{3}{2}} x\left(1+\tan^{2} x\right)^{2} \ \sec^{2} xdx$$

$$= \int \tan^{\frac{3}{2}} x\left(1+2\tan^{2} x+\tan^{4} x\right)\sec^{2} xdx$$

$$= \int \left(\tan^{\frac{3}{2}} x + 2\tan^{\frac{7}{2}} x + \tan^{\frac{11}{2}} x\right)d\left(\tan x\right)$$

$$= \int \left(\tan x\right)^{\frac{3}{2}} d\left(\tan x\right) + 2\int \left(\tan x\right)^{\frac{7}{2}} d\left(\tan x\right) + \int \left(\tan x\right)^{\frac{11}{2}} d\left(\tan x\right)$$

$$= \frac{\left(\tan x\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{\left(\tan x\right)^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + \frac{\left(\tan x\right)^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}} + c$$

$$= \frac{5}{2}\tan^{\frac{5}{2}} x + \frac{4}{9}\tan^{\frac{9}{2}} x + \frac{2}{13}\tan^{\frac{13}{2}} x + c$$

ตัวอย่าง 5.23 จงหาค่า $\int \frac{\cot^3\sqrt{x}\operatorname{cosec}^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2}u\ \operatorname{cosec}^2 u$

$$\operatorname{cosec}^4\sqrt{x} = \operatorname{cosec}^2\sqrt{x}\ \operatorname{cosec}^2\sqrt{x} \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\operatorname{cosec}^4\sqrt{x}$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\operatorname{cosec}^2\sqrt{x} = 1+\cot^2\sqrt{x}$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\operatorname{cosec}^4\sqrt{x} = \left(1+\cot^2\sqrt{x}\right)\operatorname{cosec}^2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cot^3\sqrt{x}\operatorname{cosec}^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{\cot^3\sqrt{x}\left(1+\cot^2\sqrt{x}\right)\operatorname{cosec}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \\
&= \int \left(\cot^3\sqrt{x}+\cot^5\sqrt{x}\right)\frac{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \\
&= \int \left(\cot^3\sqrt{x}+\cot^5\sqrt{x}\right)(-2)d\left(\cot\sqrt{x}\right) \\
&= -2\int \left(\cot^3\sqrt{x}+\cot^5\sqrt{x}\right)d\left(\cot\sqrt{x}\right) \\
&= -2\int \left(\cot\sqrt{x}\right)^3 d\left(\cot\sqrt{x}\right) - 2\int \left(\cot\sqrt{x}\right)^5 d\left(\cot\sqrt{x}\right) \\
&= -2\frac{\left(\cot\sqrt{x}\right)^4}{4} - 2\frac{\left(\cot\sqrt{x}\right)^6}{6} + c \\
&= -\frac{1}{2}\cot^4\sqrt{x} - \frac{1}{3}\cot^6\sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.24 จงหาค่า $\int e^x \tan^5 e^x\ \sec^7 e^x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\tan^m u \sec^n u = \tan^{m-1}u\ \sec^{n-1}u\ (\tan u \cdot \sec u)$

$$\tan^5 e^x\ \sec^7 e^x = \tan^4 e^x\ \sec^6 e^x \cdot \left(\tan e^x\ \sec e^x\right) \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\tan^4 e^x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\tan^2 e^x = \sec^2 e^x - 1$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น

$$\tan^5 e^x\ \sec^7 e^x = \left(\sec^2 e^x - 1\right)^2\ \sec^6 e^x\ \left(\tan e^x\ \sec e^x\right)$$

$$\int e^x \tan^5 e^x \ \sec^7 e^x dx = \int \left(\sec^2 e^x - 1\right)^2 \ \sec^6 e^x \ \left(\tan e^x \ \sec e^x\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^4 e^x - 2\sec^2 e^x + 1\right) \ \sec^6 e^x \ \left(\tan e^x \ \sec e^x\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^{10} e^x - 2\sec^8 e^x + \sec^6 e^x\right) \cdot d\left(\sec e^x\right)$$

$$= \int \left(\sec e^x\right)^{10} d\left(\sec e^x\right) - 2\int \left(\sec e^x\right)^8 d\left(\sec e^x\right) + \int \left(\sec e^x\right)^6 d\left(\sec e^x\right)$$

$$= \frac{\left(\sec e^x\right)^{11}}{11} - 2\frac{\left(\sec e^x\right)^9}{9} + \frac{\left(\sec e^x\right)^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{11}\sec^{11} e^x - \frac{2}{9}\sec^9 e^x + \frac{1}{7}\sec^7 e^x + c$$

5.3 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(Integration by trigonometric function substitutions)

ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบทั้ง 6 คือ $a^2 - u^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $u^2 + a^2$, $\sqrt{u^2 + a^2}$, $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$ และมีนิพจน์อื่น นอกเหนือจากรูปแบบนี้ประกอบอยู่ด้วย เช่น

1. $u^2\sqrt{16 - u^2}$ ซึ่งมีนิพจน์ u^2 ประกอบอยู่ในรูปแบบนอกเหนือทั้ง 6 รูปแบบ
2. $\dfrac{\sqrt{u^2 + 4}}{u^2}$ ซึ่งมีนิพจน์ u^2 ประกอบอยู่ในรูปแบบนอกเหนือทั้ง 6 รูปแบบ
3. $\dfrac{u + 2}{\sqrt{u^2 + 3^2}}$ ซึ่งมีนิพจน์ $u + 2$ ประกอบอยู่ในรูปแบบนอกเหนือทั้ง 6 รูปแบบ

โดยจะแตกต่างจากหัวข้อ 4.2.5 ซึ่งไม่มีพจน์อื่นประกอบอยู่ด้วย

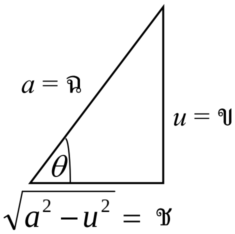
หลักการสำคัญจะต้องสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวได้ และจะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเดิมให้เป็นตัวแปรใหม่ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบ $a^2 - u^2$ หรือ $\sqrt{a^2 - u^2}$

การแทนค่า จะกำหนดให้ $u = a\sin\theta$ โดยที่ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ดังแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $u = a\sin\theta$

หรือ $\sin\theta = \dfrac{u}{a}$



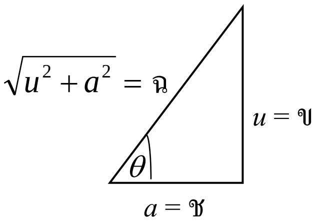
$\sin = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \dfrac{\text{ข}}{\text{ฉ}}$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบ $u^2 + a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 + a^2}$

การแทนค่า จะกำหนดให้ $u = a\tan\theta$ โดยที่ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ดังแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $u = a\tan\theta$

หรือ $\tan\theta = \dfrac{u}{a}$



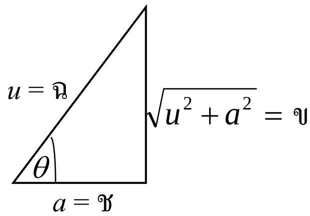
$\tan = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \dfrac{\text{ข}}{\text{ช}}$

<u>กรณีที่ 3</u> ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบ $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$

การแทนค่า จะกำหนดให้ $u = a\sec\theta$ โดยที่ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ หรือ $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ ดังแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $u = a\sec\theta$

หรือ $\sec\theta = \dfrac{u}{a}$



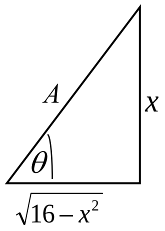
$\sec = \dfrac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \dfrac{\text{ฉ}}{\text{ช}}$

ตัวอย่าง 5.25 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$

<u>วิธีทำ</u> เป็นกรณีที่ 1 รูปแบบ $\sqrt{a^2-u^2}$ จากโจทย์ $a=4$ และ $u=x$

กำหนดให้ $u=a\sin\theta$ ดังนั้น $x=4\sin\theta$

$$dx=4\cos\theta\, d\theta$$



จากโจทย์ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos\theta}{(4\sin\theta)^2\boxed{\sqrt{16-(4\sin\theta)^2}}}d\theta$

$$\sqrt{16-(4\sin\theta)^2} = \sqrt{4^2-4^2\sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{4^2(1-\sin^2\theta)}$$
$$= 4\sqrt{(1-\sin^2\theta)}$$
$$= 4\cos\theta$$

$$= \int \frac{\cancel{4\cos\theta}}{16\sin^2\theta\ (\cancel{4\cos\theta})}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \cos ec^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{16}(-\cot\theta)+c$$

$$= -\frac{1}{16}\cot\theta+c$$

$$= -\frac{1}{16}\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}+c$$

$$\cot = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ช}}{\text{ข}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

ตัวอย่าง 5.26 จงหาค่า $\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $x^2+6x+34$ ให้อยู่ในรูปผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $6x$ เป็นบวก เพื่อให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2

น^2 + 2นล + ล^2

$$x^2+6x+34=\underbrace{(x)^2+2(x)[3]+[3]^2}-[3]^2+34$$

มีการบวกเข้า $[3]^2$ โดยการบังคับจากสูตรจึงต้องทำการ $-[3]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 3

$$x^2+6x+34=(x)^2+2(x)[3]+[3]^2\ -9+34$$

$$=(x+3)^2+25$$

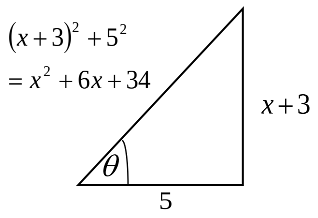
(น + ล)^2

น^2 + 2นล + ล^2 = (น + ล)^2

$$\therefore\ x^2+6x+34=(x+3)^2+5^2$$

จะได้
$$\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx=\int \frac{x}{(x+3)^2+5^2}dx \qquad (1)$$

เป็นกรณีที่ 2 รูปแบบ u^2+a^2 จากโจทย์ $u=x+3$ และ $a=5$



กำหนดให้ $u=a\tan\theta$

$$x+3=5\tan\theta \qquad (2)$$

$$x=5\tan\theta-3$$

ดังนั้น $dx=5\sec^2\theta\, d\theta$

จากสมการที่ (1)
$$\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx=\int \frac{5\tan\theta-3}{\boxed{(5\tan\theta)^2+5^2}}\left(5\sec^2\theta\, d\theta\right)$$

$$\begin{aligned}(5\tan\theta)^2+5^2&=25\tan^2\theta+25\\&=25(\tan^2\theta+1)\\&=25\sec^2\theta\end{aligned}$$

$$=\int \frac{5\tan\theta-3}{\cancel{\sec^2\theta}}\ 5\cancel{\sec^2\theta}\, d\theta$$

$$=5\int(5\tan\theta-3)\,d\theta$$

$$=25\int\tan\theta\, d\theta-15\int 1\, d\theta$$

$$\int \frac{x}{x^2+6x+34}\,dx \quad = 25\ln\left|\sec\theta\right| - 15\theta + c$$

$$\boxed{\sec = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{\text{ฉ}}{\text{ช}} = \frac{x^2+6x+34}{5}}$$

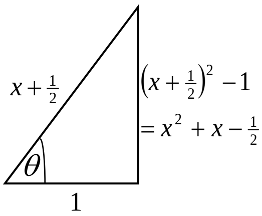
และจากสมการที่ (2) จะได้ $\tan\theta = \dfrac{x+3}{5}$

$$\therefore \theta = \arctan\frac{x+3}{5}$$

ดังนั้น $\displaystyle \int \frac{x}{x^2+6x+34}\,dx = 25\ln\left|\frac{x}{x^2+6x+34}\right| - 15\arctan\frac{x+3}{5} + c$

ตัวอย่าง 5.27 จงหาค่า $\displaystyle \int \frac{x+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เป็นกรณีที่ 3 รูปแบบ u^2-a^2 จากโจทย์ $u = x+\dfrac{1}{2}$ และ $a=1$



กำหนดให้ $u = a\sec\theta$ ดังนั้น $x+\dfrac{1}{2} = \sec\theta$

$$x = \sec\theta - \frac{1}{2}$$

$$dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

จากโจทย์

$$\int \frac{x+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{\left(\sec\theta-\frac{1}{2}\right)+2}{\left[(\sec\theta)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta+\frac{3}{2}}{\left(\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta+\frac{3}{2}}{(\tan\theta)^3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta+\frac{3}{2}}{(\tan\theta)^2}\sec\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta + \frac{3}{2}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$\int \frac{x+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}dx = \int\left(\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}\frac{\cancel{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta}\right)d\theta+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{cosec} &= \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ฉ}}{\text{ข}} \\ &= \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x-\frac{1}{2}} \\ \cot &= \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ช}}{\text{ข}} \\ &= \frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\end{aligned}}$$

$$=\int\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta+\frac{3}{2}\int\operatorname{cosec}\theta\cot\theta\, d\theta$$

$$=-\cot\theta+\frac{3}{2}(-\operatorname{cosec}\theta)+c$$

$$=-\cot\theta-\frac{3}{2}\operatorname{cosec}\theta+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x-\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right)+c$$

5.4 การหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration by partial functions)

วิธีนี้จะเป็นการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรรกยะ

$$Q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

หรืออยู่ในรูป $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

คือ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0$$

เมื่อ $a_n,a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_2,a_1,a_0$ และ

$b_n,b_{n-1},b_{n-2},\ldots,b_2,b_1,b_0$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

โดย $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n ก็ต่อเมื่อ $a_n \neq 0$

และ $g(x)$ จะเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง m ก็ต่อเมื่อ $b_m \neq 0$

- ถ้า $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ (Proper rational function) เมื่อกำลังของ $f(x)$ น้อยกว่ากำลังของ $g(x)$ เช่น $\frac{x^2-5x+1}{x^3-1}, \frac{x-2}{(x+3)^2}$

- ถ้า $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ (Improper rational function) เมื่อกำลังของ $f(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับกำลังของ $g(x)$ เช่น $\frac{x^5}{2x^3-5}, \frac{x^6-5x}{(x^2-1)^2}$

ฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ จะสามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกหรือผลลบของพหุนามกับฟังก์ชันตรรกยะได้เสมอ เช่น $\frac{x^4-x^2+x+5}{x^2-1} = x^2 + \frac{x+5}{x^2-1}$

<u>วิธีการแยกเป็นเศษส่วนย่อย</u>

1. พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะหรือไม่ เนื่องจากวิธีการนี้สามารถทำได้ แต่จะต้องเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้เท่านั้น

   ถ้าเป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ ให้นำ $g(x)$ หาร $f(x)$ โดยการตั้งหารแบบพีชคณิตหารก่อน ถ้าได้ผลลัพธ์ คือ $f_1(x)+\frac{f_2(x)}{g(x)}$ ให้นำพจน์ $\frac{f_2(x)}{g(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้แล้ว ไปทำตามขั้นตอนที่ 2 ต่อไป เช่น $\frac{x^4-x^2+x+5}{x^2-1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้จึงต้องทำการแปลงให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ก่อน

   โดยวิธีการตั้งหาร
   $$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \hline x^2-1 & x^4-x^2+x+5 \\ & \underline{x^4-x^2} \\ & \qquad\quad \underline{\underline{x+5}} \end{array}$$

   ผลลัพธ์ คือ $x^2+\frac{x+5}{x^2-1} = f_1(x)+\frac{f_2(x)}{g(x)}$ และนำ $\frac{x+5}{x^2-1}$

   ซึ่งเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ไปทำการแยกเป็นเศษส่วนย่อยขั้นตอนต่อไป

2. นำ $g(x)$ มาแยกตัวประกอบแบ่งได้เป็น 5 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1</u> ตัวประกอบเชิงเส้น (Linear factor) คือตัวประกอบที่มีกำลังสูงสุดของตัวแปรเท่ากับ 1 เช่น

$$g(x)=(5x+1)(x-2)(3x+4)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{A}{5x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{3x+4}$$ เมื่อ A, B, C คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 2</u> ตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำกัน เช่น

$$g(x)=(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^4}$$ เมื่อ A, B, C, D คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 3</u> ตัวประกอบกำลังสอง (Quadratic factor) คือตัวประกอบที่มีกำลังสูงสุดของตัวแปรเท่ากับ 2 เช่น

$$g(x)=(x^2-5x+1)(x^2+1)(x^2-3)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{Ax+B}{x^2-5x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-3}$$ เมื่อ A, B, C, D, E, F คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 4</u> ตัวประกอบกำลังสองซ้ำกัน เช่น

$$g(x)=(x^2-5)(x^2-5)(x^2-5)(x^2-5)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{Ax+B}{x^2-5}+\frac{Cx+D}{(x^2-5)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2-5)^3}+\frac{Gx+H}{(x^2-5)^4}$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G, H คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 5</u> ตัวประกอบมีหลากหลายกรณีผสมกัน ให้ทำตามหลักการของแต่ละกรณี

เช่น
$$\frac{x^2+5x-9}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^3-5}{(x+1)(x^2+3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}$$

เมื่อ A, B, C, D, E คือ ค่าคงที่ใด ๆ

3. เมื่อทำการแยกเป็นเศษส่วนย่อยแล้ว จะต้องนำไปหาค่าคงที่ $A, B, C, \ldots$ หรือการหาค่าสัมประสิทธิ์ของเศษผลบวกย่อยทางด้านขวามือ โดยการนำ $g(x)$ คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการ จากนั้นให้เลือกใช้วิธีที่เหมาะสม เพื่อหาค่าคงที่หรือสัมประสิทธิ์ดังกล่าว ซึ่งมีวิธีการหาได้หลายวิธี เช่น
   3.1 วิธีการแทนค่าตัวแปรโดยเลือกค่าที่เหมาะสมแล้วแทนใน x ของสมการ
   3.2 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ โดยใช้หลักการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x ที่กำลังเท่ากันของทางด้านซ้ายมือกับขวามือของสมการย่อมมีค่าเท่ากันเสมอ

ตัวอย่าง 5.28 จงหาค่า $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ ดังนั้น

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3} \qquad (1)$$

นำ $(x+1)(x-2)(x+3)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$1=A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2) \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C ได้โดยการแทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (2)

พิจารณาค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (1) คือ $x=-1,\ x=2$ และ $x=-3$

แทนค่า $x=-1$

จะได้ $$1=A(-1-2)(-1+3)+B(-1+1)(-1+3)+C(-1+1)(-1-2)$$

$$1=A(-3)(2)+0+0$$

$$1 = -6A$$

$$\therefore A = -\frac{1}{6}$$

$\boxed{\text{แทนค่า } x = 2}$

จะได้ $$1 = A(2-2)(2+3) + B(2+1)(2+3) + C(2+1)(2-2)$$

$$1 = 0 + B(3)(5) + 0$$

$$1 = 15B$$

$$\therefore B = \frac{1}{15}$$

$\boxed{\text{แทนค่า } x = -3}$

จะได้ $$1 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3+1)(-3+3) + C(-3+1)(-3-2)$$

$$1 = 0 + 0 + C(-2)(-5)$$

$$1 = 10C$$

$$\therefore C = \frac{1}{10}$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{15}$ และ $C = \frac{1}{10}$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{15(x-2)} + \frac{1}{10(x+3)}$$

ดังนั้น $$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \int \frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{15(x-2)} + \frac{1}{10(x+3)} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+1)}d(x+1)+\frac{1}{15}\int \frac{1}{(x-2)}d(x-2)+\frac{1}{10}\int \frac{1}{(x+3)}d(x+3)$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{1}{15}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|x+3|+c$$

ตัวอย่าง 5.29 จงหาค่า $\int \frac{2x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{2x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)^2}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

ดังนั้น $$\frac{2x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

นำ $(x+1)(x-2)^2$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$2x^2-3x+4 = A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1) \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$2x^2-3x+4 = A(x^2-4x+4)+B(x^2-x-2)+C(x+1)$$

$$= (A+B)+(-4A-B+C)x+(4A-2B+C)$$

หาค่า A,B,C จาก

$$A+B = 2 \qquad (3)$$

$$-4A-B+C = -3 \qquad (4)$$

$$4A-2B+C = 4 \qquad (5)$$

นำสมการที่ (4)-(5) เพื่อกำจัด C

$$-8A+B = -7 \qquad (6)$$

นำสมการที่ (3)-(6) เพื่อกำจัด B

$$9A = 9$$

$$\therefore A = 1$$

นำ $A = 1$ แทนในสมการที่ (3)

จะได้ $$1 + B = 2$$

$$\therefore B = 1$$

นำ $A = 1$ และ $B = 1$ แทนในสมการที่ (4) เพื่อหาค่า C

$$-4(1) - 1 + C = -3$$

$$\therefore C = 2$$

แทนค่า $A = 1,\ B = 1$ และ $C = 2$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{2x^2 - 3x + 4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

ดังนั้น $$\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{(x+1)(x-2)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}d(x+1) + \int \frac{1}{x-2}d(x-2) + 2\int (x-2)^{-2}\,d(x-2)$$

$$= \ln|x+1| + \ln|x-2| + 2\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln|x+1| + \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c$$

ตัวอย่าง 5.30 จงหาค่า $\int \frac{2x^2-1}{x^4+x^3}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{2x^2-1}{x^4+x^3}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $x^4+x^3 = x^3(x+1)$ ก่อน

ดังนั้น $$\frac{2x^2-1}{x^4+x^3} = \frac{2x^2-1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1} \qquad (1)$$

นำ $x^3(x+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$2x^2-1 = Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3 \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$2x^2-1 = A(x^3+x^2)+B(x^2+x)+C(x+1)+D(x^3)$$

$$2x^2-1 = (A+D)x^3+(A+B)x^2+(B+C)x+C$$

หาค่า A,B,C และ D จาก

$$A+D = 0 \qquad (3)$$

$$A+B = 2 \qquad (4)$$

$$B+C = 0 \qquad (5)$$

จากสมการที่ (5) จะได้ $\therefore C = -1$

นำ $C = -1$ แทนในสมการที่ (5)

$$B+(-1) = 0$$
$$\therefore B = 1$$

นำ $B = 1$ แทนในสมการที่ (4)

$$A+1 = 2$$
$$\therefore A = -1$$

นำ $A = -1$ แทนในสมการที่ (3)

$$-1+D = 0$$
$$\therefore D = 1$$

แทนค่า $A=-1,\ B=1,\ C=-1$ และ $D=1$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{2x^2-1}{x^4+x^3} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x+1}$$

ดังนั้น
$$\int\frac{2x^2-1}{x^4+x^3}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= -\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-2}dx-\int x^{-3}dx+\int\frac{1}{(x+1)}d(x+1)$$
$$= -\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+\ln|x+1|+c$$
$$= -\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ln|x+1|+c$$

ตัวอย่าง 5.31 จงหาค่า $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $x^4+3x^2+2=(x^2+2)(x^2+1)$ ก่อน

ดังนั้น
$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)} \quad (1)$$

นำ $(x^2+2)(x^2+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้
$$x^3+x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$$
$$= Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D$$
$$= (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+(B+2D) \quad (2)$$

หาค่า A, B, C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$A+C = 1 \quad (3)$$

$$B+D = 1 \quad (4)$$

$$A+2C = 1 \quad (5)$$

$$B+2D = 2 \quad (6)$$

นำสมการที่ (5)-(3) เพื่อกำจัด A

จะได้ $\therefore C = 0$

นำ $C = 0$ แทนในสมการที่ (1)

$$A+0 = 1$$

$$\therefore A = 1$$

นำสมการที่ (6)-(4) เพื่อกำจัด B

$$\therefore D = 1$$

นำ $D=1$ แทนในสมการที่ (4)

$$B+1 = 1$$

$$\therefore B = 0$$

แทนค่า $A=1,\ B=0,\ C=0$ และ $D=1$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+1}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx &= \int\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int\frac{x}{x^2+2}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \int\frac{1}{\left(x^2+2\right)}\frac{d\left(x^2+2\right)}{2}+\int\frac{dx}{x^2+1^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\arctan x+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.32 จงหาค่า $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $(x^2+1)^2$ ก่อน

ดังนั้น
$$\frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \qquad (1)$$

นำ $(x^2+1)^2$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้
$$x^3-4x = (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$x^3-4x = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

$$= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$\therefore\ A = 1 \qquad (3)$$

$$\therefore\ B = 0 \qquad (4)$$

$$A+C = -4 \qquad (5)$$

$$B+D = 0 \qquad (6)$$

นำ $A=1$ แทนในสมการที่ (5)

$$1+C = -4$$

$$\therefore C = -5$$

นำ $B=0$ แทนในสมการที่ (6)

$$0+D = 0$$

$$\therefore D = 0$$

แทนค่า $A=1$, $B=0$, $C=-5$ และ $D=0$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{x^2+1}-\frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^2}dx &= \int\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx \\
&= \int\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx-\int\frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}dx \\
&= \int\frac{1}{x^2+1}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2}-5\int\left(x^2+1\right)^{-2}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{5}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{5}{x^2+1}+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.33 จงหาค่า $\int\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $x^3-9x=x\left(x^2-9\right)$ ก่อน

ดังนั้น
$$\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} = \frac{2x^2-9x-9}{x\left(x^2-9\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-9} \tag{1}$$

นำ $x\left(x^2-9\right)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้
$$2x^2-9x-9 = A\left(x^2-9\right)+\left(Bx+C\right)x \tag{2}$$

หาค่า A, B และ C ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$\begin{aligned}
2x^2-9x-9 &= Ax^2-9A+Bx^2+Cx \\
&= \left(A+B\right)x^2+Cx-9A
\end{aligned}$$

หาค่า A, B และ C จาก

$$A+B = 2 \qquad (3)$$

$$\therefore\ C = -9 \qquad (4)$$

$$-9A = -9 \qquad (5)$$

จากสมการที่ (5)

$$\therefore\ A = 1$$

นำ $A = 1$ แทนในสมการที่ (3)

$$1+B = 2$$

$$\therefore\ B = 1$$

แทนค่า $A=1,\ B=1$ และ $C=-9$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} = \frac{1}{x}+\frac{x-9}{x^2-9}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}dx &= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-9}{x^2-9}\right)dx \\
&= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x-9}{x^2-9}dx \\
&= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2-9}dx-\int\frac{9}{x^2-9}dx \\
&= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2-9}\frac{d\left(x^2-9\right)}{2}-9\int\frac{dx}{x^2-3^2} \\
&= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-9\right|-9\cdot\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c \\
&= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-9\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.34 จงหาค่า $\int \frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{x^3-x^2+x-1}dx$

<u>วิธีทำ</u> ไม่สามารถนำ $\frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{x^3-x^2+x-1}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ จึงจำเป็นต้องตั้งหารแบบพีชคณิตก่อน

$$\begin{array}{r|l} & 2x+4 \\ \hline x^3-x^2+x-1 & 2x^4+2x^3+x^2+3x-6 \\ & \underline{2x^4-2x^3+2x^2-2x} \\ & \quad 4x^3-x^2+5x-6 \\ & \quad \underline{4x^3-4x^2+4x-4} \\ & \qquad \underline{\underline{3x^2+x-2}} \end{array}$$

$$\therefore \frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{x^3-x^2+x-1} = 2x+4 + \frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$$

สามารถนำ $\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$ ก่อน

ดังนั้น $$\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (1)$$

นำ $(x-1)(x^2+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$3x^2+x-2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) \qquad (2)$$

หาค่า A, B และ C ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$\begin{aligned} 3x^2+x-2 &= Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C \\ &= (A+B)x^2+(-B+C)x+A-C \end{aligned}$$

หาค่า A, B และ C จาก

$$A+B = 3 \qquad (3)$$

$$-B+C \;=1 \qquad (4)$$

$$A-C \;=-2 \qquad (5)$$

นำสมการที่ (3)+(4) เพื่อกำจัด B

$$A+C \;=4 \qquad (6)$$

นำสมการที่ (5)+(6) เพื่อกำจัด C

$$2A \;=\; 2$$

$$\therefore\; A \;=1$$

นำ $A=1$ แทนในสมการที่ (3)

$$1+B \;=\; 3$$

$$\therefore\; B \;=\; 2$$

นำ $B=2$ แทนในสมการที่ (4)

$$-2+C \;=1$$

$$\therefore\; C \;=3$$

แทนค่า $A=1,\; B=2$ และ $C=3$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\int\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int\frac{1}{x-1}\,dx+2\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \int\frac{1}{(x-1)}\,d(x-1)+2\int\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{d\left(x^2+1\right)}{2}+3\int\frac{dx}{x^2+1^2} \\
&= \ln|x-1|+\ln\left|x^2+1\right|+3\arctan x+c
\end{aligned}$$

บทสรุป

เทคนิคการหาปริพันธ์ ใช้สำหรับโจทย์อินทิเกรตที่มีความยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากไม่สามารถหาได้จากวิธีใช้สูตรพื้นฐานในบทที่แล้ว โดยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

1. การหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วน
2. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบแน่นอน
3. การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. การหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\int x^2 \sin x\,dx$ 1.2 $\int x^2 \ln x\,dx$

1.3 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ 1.4 $\int (\ln x^3)\,dx$

1.5 $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$ 1.6 $\int x^5 e^{x^3}\,dx$

1.7 $\int x e^{3x}\,dx$ 1.8 $\int (2-5x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

1.9 $\int x^2 e^{-x}\,dx$ 1.10 $\int (1-x^2)e^{3x}\,dx$

1.11 $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ 1.12 $\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

1.13 $\int (x^2+2x)\sin x\,dx$ 1.14 $\int (3x^2-x)e^{2x-1}\,dx$

1.15 $\int \arcsin(-2x)\,dx$ 1.16 $\int e^{(1-x)}\sin(2x+1)\,dx$

1.17 $\int (x-3)^2 e^{-x}\,dx$ 1.18 $\int x\cos(x^2-2)\,dx$

1.19 $\int \cos(\ln x)\,dx$ 1.20 $\int x\sec^2 x\,dx$

2. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $\int \sin^5 x dx$

2.2 $\int \cos^2 x dx$

2.3 $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

2.4 $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

2.5 $\int \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx$

2.6 $\int \sin^3 x \cos^{-6} x dx$

2.7 $\int \sin 5x \cos x dx$

2.8 $\int \cos 3x \cos 2x dx$

2.9 $\int \sin 5x \sin x dx$

2.10 $\int \sin x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

2.11 $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

2.12 $\int \tan^4 4x dx$

2.13 $\int \cot^6 x dx$

2.14 $\int \cot^{-7} 2x \operatorname{cosec}^4 2x dx$

2.15 $\int \tan^{\frac{5}{2}} 3x \sec^4 3x dx$

2.16 $\int \operatorname{cosec}^6\left(\frac{x}{3}\right) dx$

2.17 $\int \sec^4 2x dx$

2.18 $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^5 x dx$

3. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

3.2 $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$

3.3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+8x}}$

3.4 $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

3.5 $\int \frac{\sqrt{\ln^2 x - 25}}{x} dx$

3.6 $\int \sqrt{x^2+16} dx$

3.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+11}}$

3.8 $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$

3.9 $\int \sqrt{8-4x-x^2} dx$

3.10 $\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$

3.11 $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$ 3.12 $\int \frac{dx}{x-x\ln^2 x}$

4. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $\int \frac{3x^2+3x-2}{x^3-x}dx$ 4.2 $\int \frac{7x^2-5x+1}{x(x^2-1)}dx$

4.3 $\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}dx$ 4.4 $\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx$

4.5 $\int \frac{2x^3-x^2-2}{x^4+3x^2+2}dx$ 4.6 $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

4.7 $\int \frac{x^2-10}{2x^4+9x^2+4}dx$ 4.8 $\int \frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{(x-1)(x^2+1)}dx$

4.9 $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$ 4.10 $\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}dx$

เอกสารอ้างอิง

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.

การประยุกต์ของปริพันธ์ บทที่
Application of Integral 6

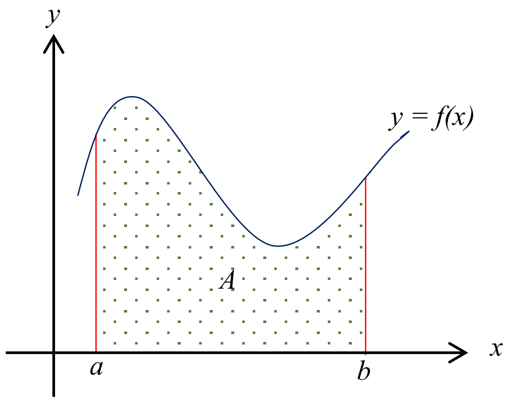
การประยุกต์ของปริพันธ์จะกล่าวถึงการนำไปประยุกต์ใช้ของการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งเกิดประโยชน์เป็นอย่างมากในการใช้งานจริง เช่น การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง การหาปริมาตรของทรงตันที่ไม่สามารถคำนวณหาได้จากสูตรใด ๆ ตามปกติ โดยใช้วิธีจานและวิธีเปลือกทรงกระบอก เป็นส่วนหนึ่งในการแก้ปัญหาเชิงวิศวกรรมหรือฟิสิกส์ ภายใต้การใช้ปริพันธ์แบบจำกัดเขต

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจและสามารถหาปริพันธ์จำกัดเขตได้
2. สามารถหาค่าปริพันธ์ได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ได้

6.1 การหาปริพันธ์จำกัดเขต (Definite integral)

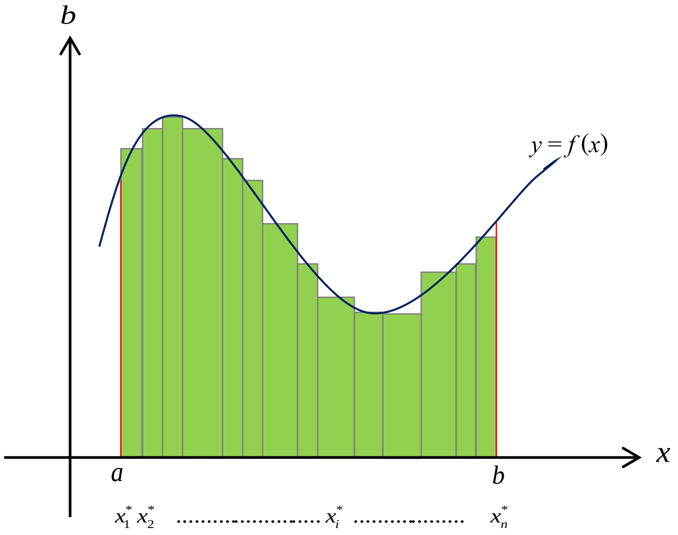
ถ้าต้องการคำนวณหาพื้นที่ A เหนือบนแกน x ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x=a$, $x=b$ และเส้นโค้ง $y=f(x)>0$ จะมีความต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ ดังรูปที่ 6.1 ซึ่งสามารถแบ่งระหว่างช่วงนี้ออกเป็นช่วงย่อย ๆ จำนวน n ช่วง โดยแต่ละช่วงย่อยนั้น ไม่จำเป็นที่จะต้องมีความยาวหรือความกว้างที่เท่ากันทั้งหมด



รูปที่ 6.1 พื้นที่ A ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงและเส้นโค้ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ถ้ากำหนดให้จุดแบ่งช่วงเป็น $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = b$ และเลือกจุดที่อยู่ในแต่ละช่วงย่อย กำหนดให้เป็น $x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*, ..., x_n^*$ โดยที่ $i = 1,2,3,...,n$ ซึ่งสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนช่วงย่อย n เป็นจำนวน n ช่วง ดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 สี่เหลี่ยมมุมฉากบนช่วงย่อย n จำนวน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก ๆ จำนวน n รูป จะเป็นค่าโดยประมาณของพื้นที่ A ดังนี้

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + ... + f(x_i^*)\Delta x_i + ... + f(x_n^*)\Delta x_n \quad \text{หรือ}$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

ซึ่งเรียกผลบวกนี้ว่า ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) ถ้าช่วง $[a,b]$ ถูกแบ่งเป็นช่วงเล็ก ๆ มีจำนวนมากที่สุดเมื่อ $n \to \infty$ ซึ่งจะทำให้ความกว้าง Δx_i ของสี่เหลี่ยมมุมฉากมีค่าเข้าใกล้ 0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Delta x_i \to 0$ และถ้าสามารถหาค่าลิมิตของผลบวกรีมันน์นี้ได้ จะได้พื้นที่ A มีค่าดังนี้

$$A \approx \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

โดยเรียกค่าผลบวกรีมันน์นี้ว่า ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ จากขอบเขต a ไปถึง b และใช้สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ เขียนแทนค่าลิมิตของผลบวกรีมันน์

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

นิยาม ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอยู่ในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น ปริพันธ์จำกัดเขตจาก a ไปถึง b นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

โดยที่ $\int$ คือ เครื่องหมายปริพันธ์

$f(x)$ คือ ตัวถูกปริพันธ์ (Integrand)

dx คือ ปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x

a คือ ลิมิตล่าง (Lower limit) ของการปริพันธ์

b คือ ลิมิตบน (Upper limit) ของการปริพันธ์

เมื่อกำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอยู่ในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ หาค่าได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = f(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ซึ่ง $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ในช่วง $[a,b]$

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอยู่ในช่วง $[a,b]$ และมี c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้วสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขตที่สำคัญมีดังนี้

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ เมื่อ $a < c < b$

ตัวอย่าง 6.1 จงหาค่า $\int_1^2 (4x^3+1)dx$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 (4x^3+1)dx &= \left[\frac{4x^4}{4}+x\right]_1^2 \\
&= \left[x^4+x\right]_1^2 \\
&= (2^4+2)-(1^4+1) \\
&= (16+2)-(1+1) \\
&= 18-2 = 16
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 6.2 จงหาค่า $\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx &= \int_{-1}^0 e^{2x}\,\frac{d(2x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{2x}\,d(2x) \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-1}^0
\end{aligned}
$$

$$\int_{-1}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{2(0)} - e^{2(-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{0} - e^{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2}}$$

ตัวอย่าง 6.3 จงหาค่า $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\left(x^4-2\right)^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\left(x^4-2\right)^2}\,dx = \int_{0}^{2} \left(x^4-2\right)^{-2} x^3 dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left(x^4-2\right)^{-2} \frac{d\left(x^4-2\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{2} \left(x^4-2\right)^{-2} d\left(x^4-2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\left(x^4-2\right)^{-1}}{-1}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^4-2}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4-2} - \frac{1}{0^4-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{14} - \frac{1}{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{8}{14}\right)$$

$$= -\frac{1}{7}$$

ตัวอย่าง 6.4 จงหาค่า $\int_0^4 f(x)dx$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & , 0 \le x < 3 \\ \dfrac{1}{x-2} & , x \ge 3 \end{cases}$

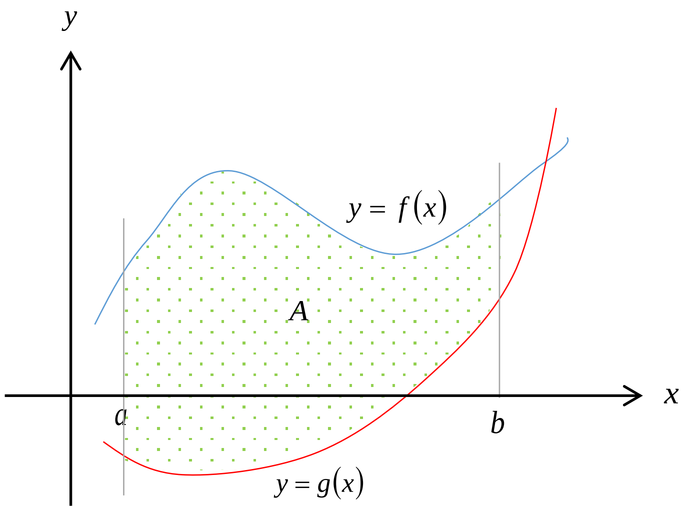
<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2}dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{x+1}\,d(x+1) + \int_3^4 \frac{1}{x-2}d(x-2) \\
&= \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]_0^3 + \left[\ln|x-2|\right]_3^4 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]_0^3 + \left[\ln|x-2|\right]_3^4 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3+1}} - \frac{1}{\sqrt{0+1}}\right) + \left(\ln|4-2| - \ln|3-2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \left(\ln|2| - \ln|1|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\ln 2 - 0\right) \\
&= -\frac{1}{4} + \ln 2
\end{aligned}$$

6.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Area between curves)

ในการหาพื้นที่ซึ่งเป็นการประยุกต์ของการปริพันธ์จำกัดเขต สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ โดยพื้นที่นั้นอาจจะเป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งหรือเส้นตรงต่าง ๆ พิจารณาได้ตามกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $y=f(x)$ และ $y=g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$และ $f(x)\geq g(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้น พื้นที่ A ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(x)$, $y=g(x)$ เส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

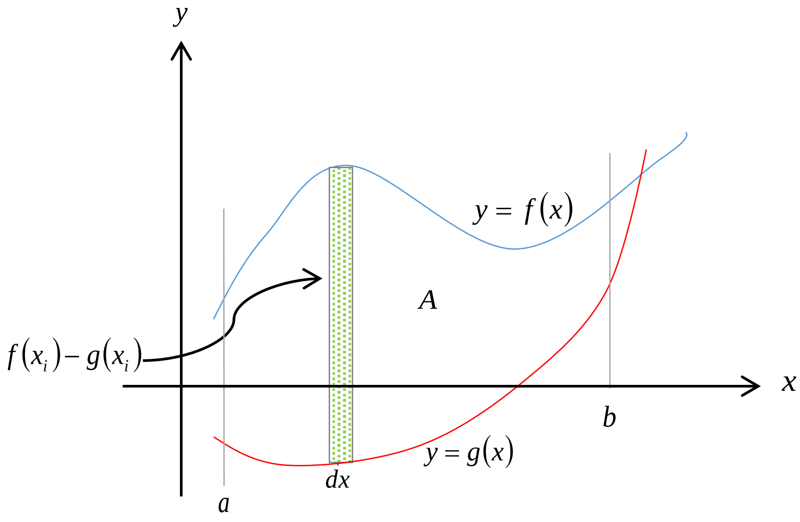
<u>ขั้นตอนการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง</u>

1. เขียนเส้นโค้งของฟังก์ชันและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อให้เห็นพื้นที่ที่ต้องการ ซึ่งจะหาได้อย่างชัดเจนว่าอยู่ในลักษณะแบบใด

2. ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดค่าจำกัดเขตล่างและค่าจำกัดเขตบนของปริพันธ์มาให้ จะต้องทำการพิจารณาเตรียมไว้ เพื่อคำนวณค่าพื้นที่จากการปริพันธ์ของขอบเขตได้

3. สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉาก ลงในบริเวณพื้นที่ A ที่ต้องการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

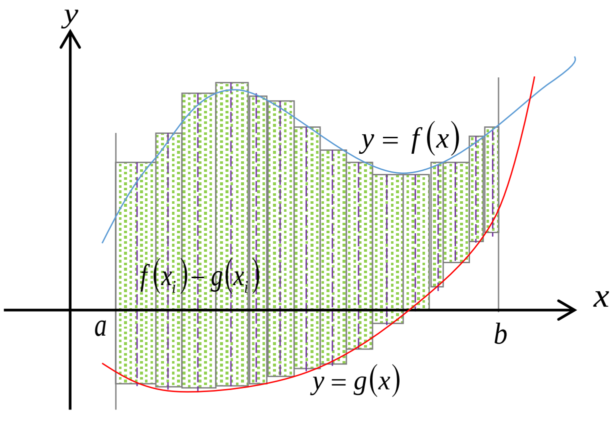
ในกรณีนี้ เมื่อโจทย์กำหนด $y=f(x)$ และ $y=g(x)$ ให้สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน x โดยความกว้างสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น dx และความสูงของสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น $f(x)-g(x)$ ดังรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 การสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อทำการเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน x จะได้เต็มอาณาบริเวณพื้นที่ ซึ่งแสดงว่าสามารถหาพื้นที่ได้ทั้งหมดดังรูปที่ 6.5

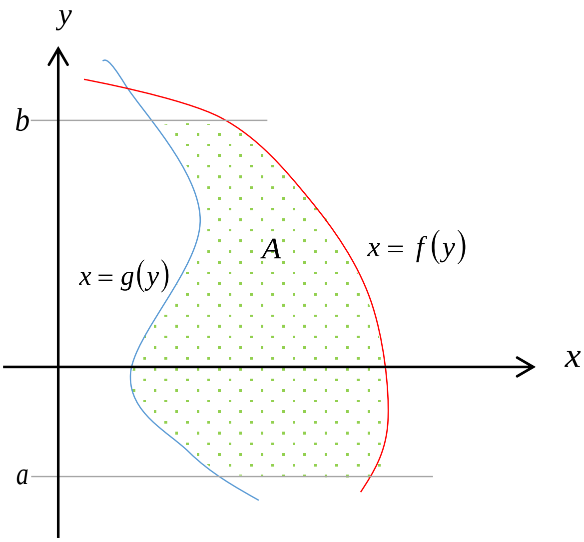


รูปที่ 6.5 การเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น พื้นที่ $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

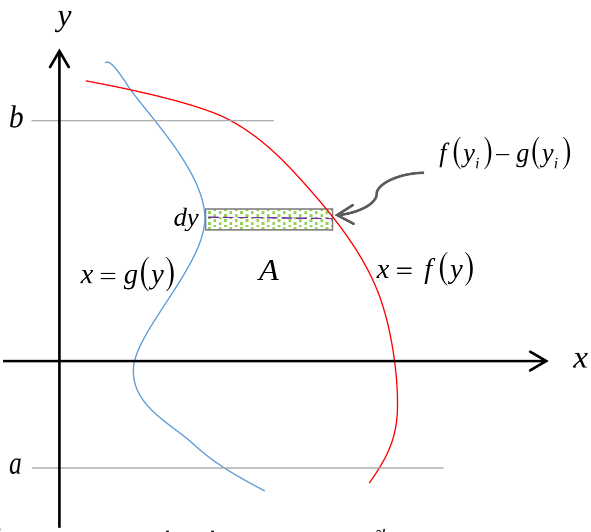
กรณีที่ 2 ถ้า $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(y) \geq g(y)$ สำหรับทุกค่าของ y ดังนั้น พื้นที่ A ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$, $x = g(y)$ เส้นตรง $y = a$ และ $y = b$ ดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

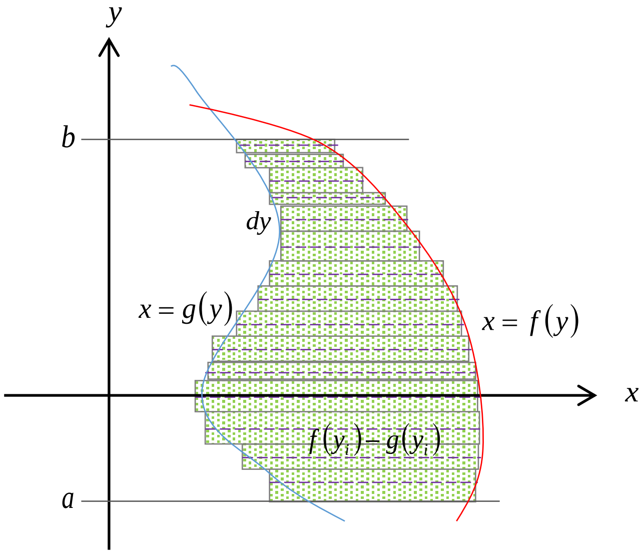
ในกรณีนี้ เมื่อโจทย์กำหนด $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ ให้สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งฉากกับแกน y โดยความกว้างสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น dy และความกว้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น $f(y) - g(y)$ ดังรูปที่ 6.7



รูปที่ 6.7 การสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อทำการเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ไปตามแกน y จะได้เต็มอาณาบริเวณพื้นที่ ซึ่งแสดงว่าสามารถหาพื้นที่ได้ทั้งหมดดังรูปที่ 6.8

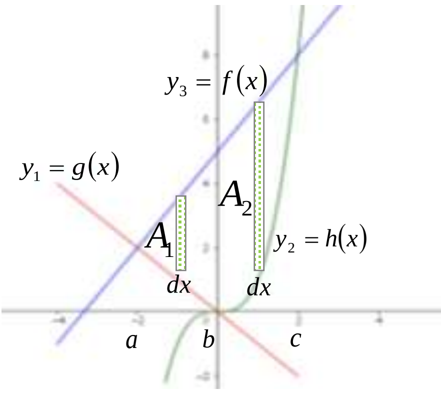


รูปที่ 6.8 การเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น พื้นที่ $A=\int_a^b [f(y)-g(y)]dy=\int_a^b [x_2-x_1]dy$

หมายเหตุ หากเกิดกรณีที่ไม่เป็นไปตาม 2 กรณี ดังที่กล่าวมา มีความจำเป็นจะต้องแบ่งการหาพื้นที่ออกเป็นส่วน ๆ ดังรูปที่ 6.9 และนำพื้นที่ทั้งหมดนั้นมารวมกันตามขั้นตอน เช่น



ดังนั้น จะได้ขนาดพื้นที่ $A=A_1+A_2$

$$A=\int_a^b (y_3-y_1)dx+\int_b^c (y_3-y_2)dx$$

$$A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx+\int_b^c (f(x)-h(x))dx$$

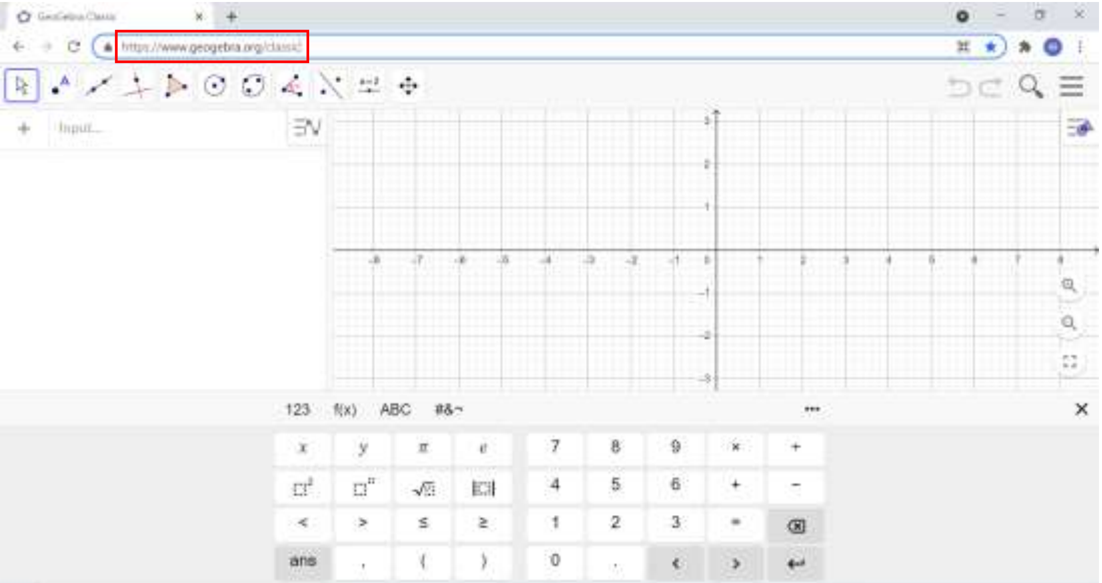
รูปที่ 6.9 พื้นที่ทั้งหมดจากการรวมกันของ A_1 และ A_2

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูปที่ 6.9 เป็นการวาดกราฟแบบออนไลน์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra Classic ใช้สำหรับวาดกราฟฟรี ใช้งานง่าย ไม่จำเป็นต้องติดตั้งในคอมพิวเตอร์ เปิดได้จากที่อยู่เว็บไซต์ https://www.geogebra.org/classic จึงเหมาะแก่การใช้งานสำหรับการศึกษา ควบคู่กับการเรียนทางทฤษฎี เพื่อใช้วาดกราฟจากฟังก์ชันของสมการในรูปแบบต่าง ๆ ได้ เช่น กราฟจากฟังก์ชันเส้นตรง พาราโบลา ฯ จะได้ลักษณะกราฟที่สวยงาม และตั้งค่าสีสันในแต่ละองค์ประกอบของกราฟได้ ทั้งยังมีแอปพลิเคชัน (Application) ของ GeoGebra หรือ GeoGebra Application ที่สามารถดาวน์โหลดตามสัญลักษณ์ เพื่อการใช้งานสะดวกผ่านทางสมาร์ทโฟน (Smartphone) หรือแท็บเล็ต (Tablet) ควบคู่ในระหว่างการศึกษาในห้องเรียน ซึ่งเป็น Open source software เป็นซอฟต์แวร์ที่เปิดเผยต่อสาธารณชน ให้สิทธิเสรีแก่ผู้ที่จะนำไปใช้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ

ขั้นตอนการใช้ GeoGebra บนเว็บไซต์

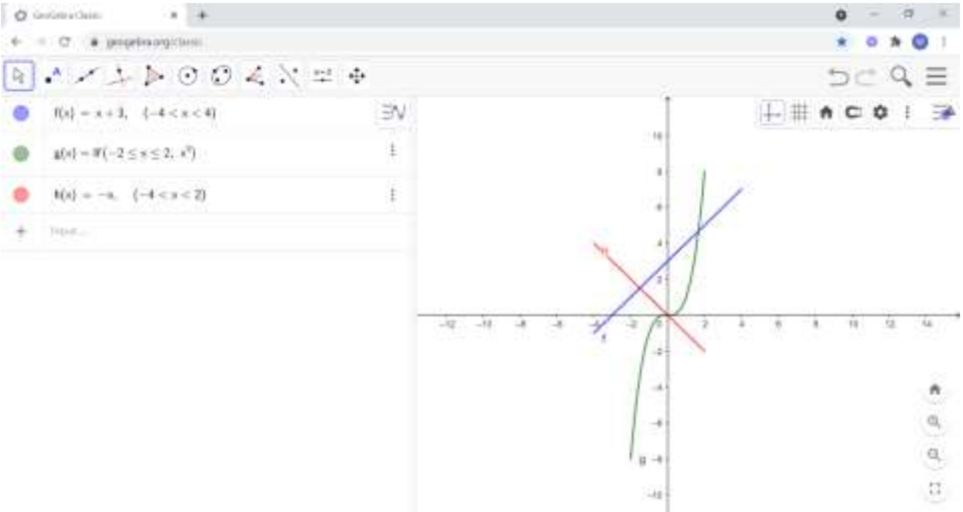
1. เปิด GeoGebra Classic



รูปที่ 6.10 เว็บไซต์ GeoGebra Classic

ที่มา: https://www.geogebra.org/classic (2564)

2. พิมพ์ฟังก์ชันเพื่อวาดกราฟ



รูปที่ 6.11 การวาดกราฟบนเว็บไซต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ขั้นตอนการใช้ GeoGebra Classic Application

1. ค้นหาคำว่า GeoGebra Classic โดยทำการติดตั้งได้ทั้งระบบ Android บนอุปกรณ์ของแบรนด์ทั่วไป หรือระบบ iOS ซึ่งเป็นระบบปิดที่ใช้งานได้เฉพาะกับโทรศัพท์ Apple หรือ Ipad

รูปที่ 6.12 การติดตั้ง GeoGebra Classic Application

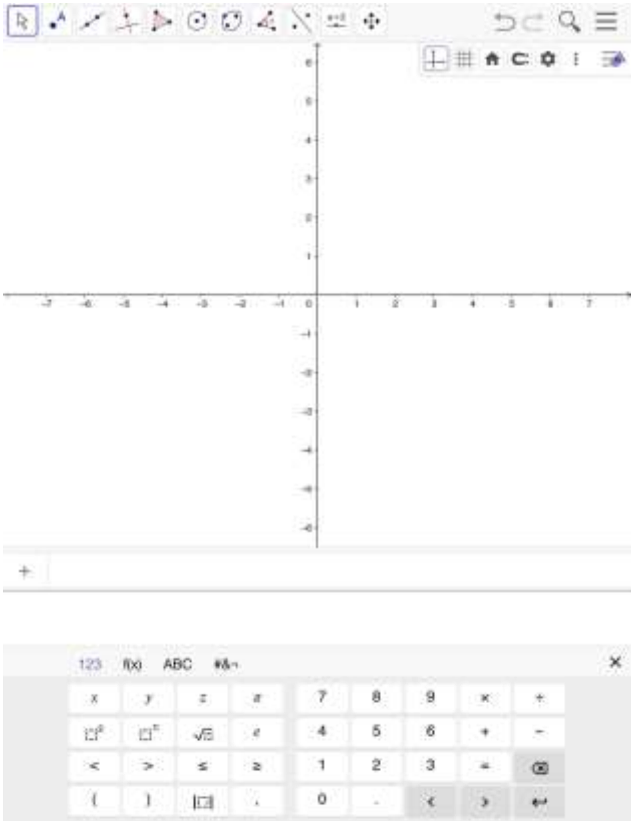
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. เมื่อทำการติดตั้งเสร็จสมบูรณ์ของ GeoGebra Classic Application ดังรูป

รูปที่ 6.13 การติดตั้ง GeoGebra Classic Application เสร็จสมบูรณ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

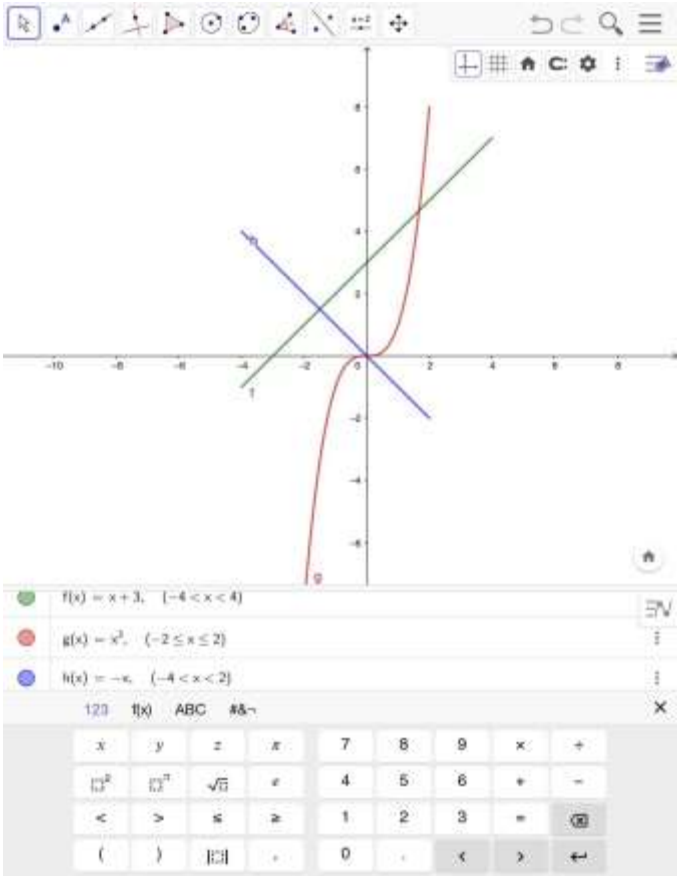
3. สามารถเปิดการใช้งาน GeoGebra Classic Application ได้ดังรูป



รูปที่ 6.14 GeoGebra Classic Application

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. พิมพ์ฟังก์ชันเพื่อวาดกราฟได้ดังรูปบน GeoGebra Classic Application



รูปที่ 6.15 การวาดกราฟบน GeoGebra Classic Application

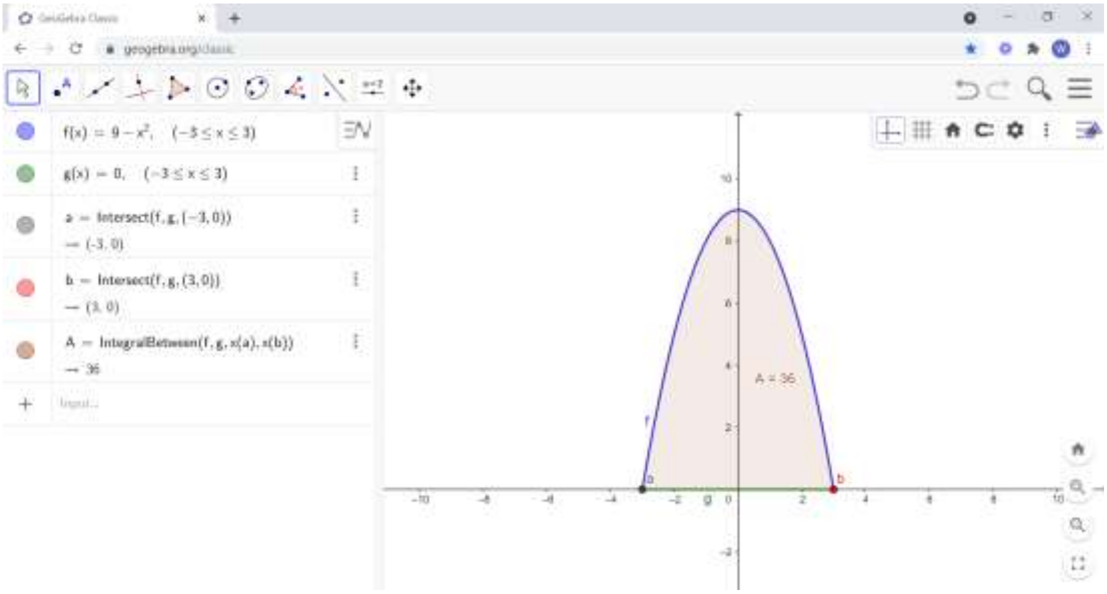
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 6.5 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=9-x^2$ และแกน x โดย $-3\le x\le 3$

<u>วิธีทำ</u> ทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y=9-x^2$ ได้รูปพาราโบลาคว่ำ
  มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,9)$
- แกน x โดย $-3\le x\le 3$



รูปที่ 6.16 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ และแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

$$\text{พื้นที่} \quad A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$$

$$= \int_{-3}^{3} (9 - x^2 - 0)dx$$

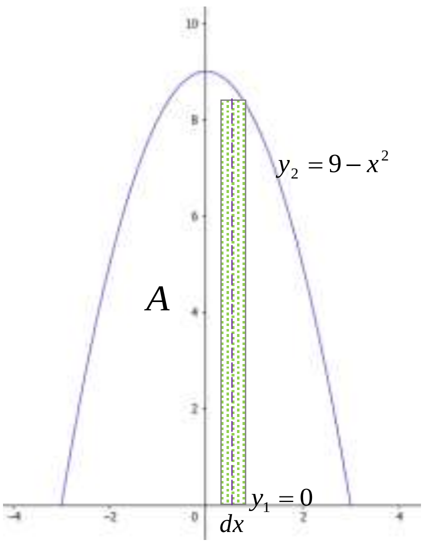
$$= \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx$$

$$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

$$= \left(9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$$= (27 - 9) - (-27 + 9) = 18 - (-18)$$

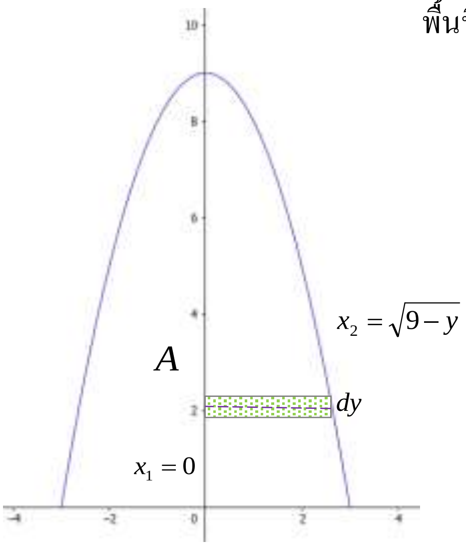
$$= 36 \text{ ตารางหน่วย}$$



รูปที่ 6.17 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

วิธีที่ 2



รูปที่ 6.18 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y} - 0\right)dy$$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y}\right)dy = 2\int_0^9 (9-y)^{\frac{1}{2}} \frac{d(9-y)}{-1}$$

$$= -2\left[\frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = -\frac{4}{3}\left[(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$= -\frac{4}{3}\left((9-9)^{\frac{3}{2}} - (9-0)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(0 - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(27)$$

$= 36$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.6 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ เส้นตรง $y = 4x$ และอยู่ในจตุภาคที่ 1

<u>วิธีทำ</u> สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = x^3$ (1)
- เส้นตรง $y = 4x$ (2)

หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (2)

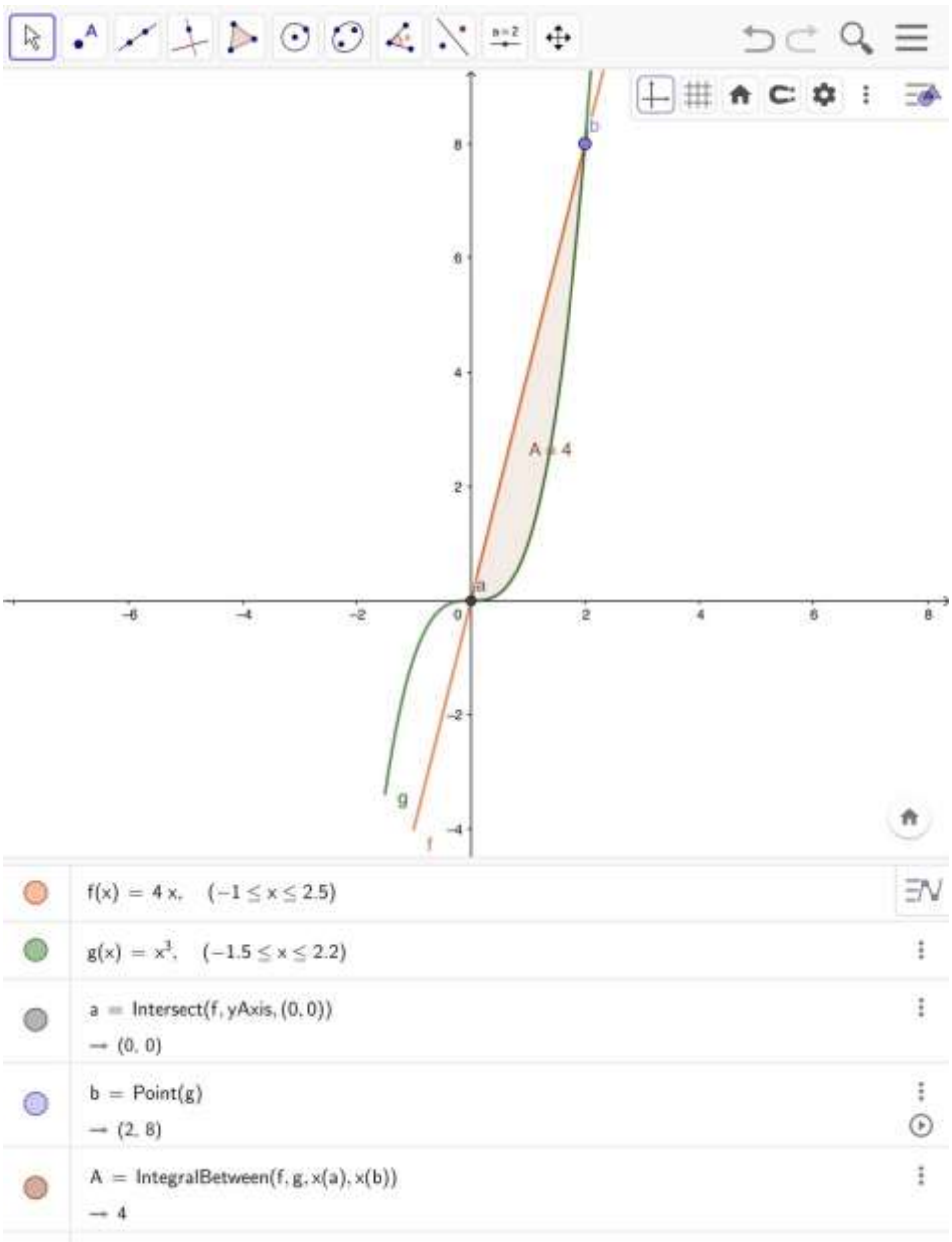
$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

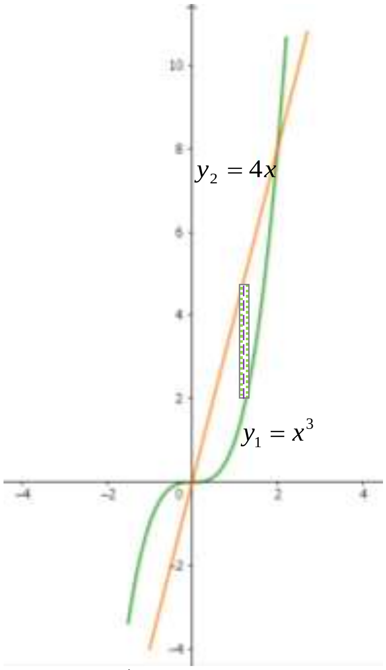
$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore\ x = 0, 2$$



รูปที่ 6.19 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และเส้นตรง $y = 4x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)



รูปที่ 6.20 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เนื่องจาก $x = -2$ ไม่ได้อยู่ในจตุภาคที่ 1

และมีจุดตัดอยู่ที่ $(0,0)$ และ $(2,8)$

วิธีที่ 1

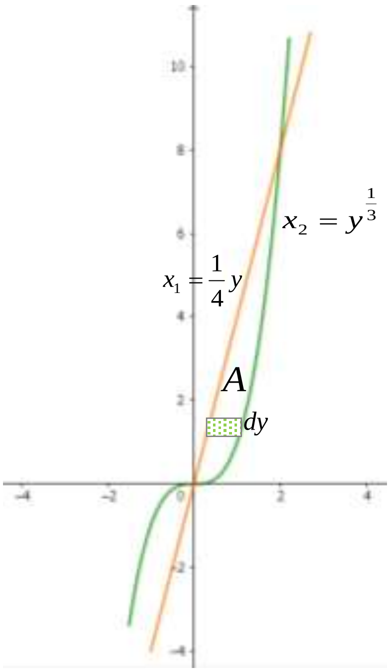
พื้นที่ $A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

$$= \int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \left(2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right) - \left(2(0)^2 - \frac{(0)^4}{4}\right)$$

$= (8-4) - 0 = 4$ ตารางหน่วย



รูปที่ 6.21 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

วิธีที่ 2

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= \int_0^8 \left(y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}y\right)dy$$

$$= \left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}y^2\right]_0^8$$

$$= \left(\frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(8)^2\right) - \left(\frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(0)^2\right)$$

$= (12-8) - 0 = 4$ ตารางหน่วย

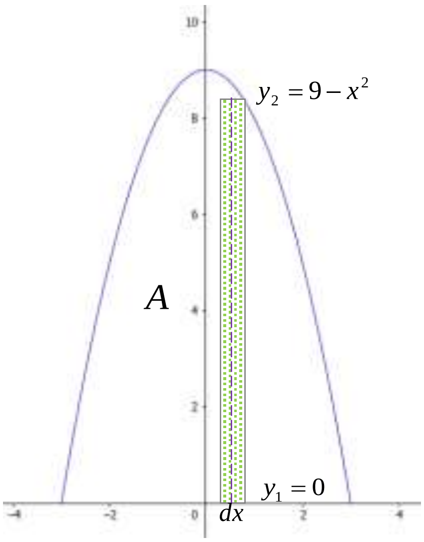
ตัวอย่าง 6.5 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=9-x^2$ และแกน x จาก $x=-3$ ถึง $x=3$

<u>วิธีทำ</u> สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1

วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y=9-x^2$ ได้รูปพาราโบลาคว่ำ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,9)$
- แกน x จาก $x=-3$ ถึง $x=3$



รูปที่ 6.22 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A=\int_a^b [y_2-y_1]dx$

$$=\int_{-3}^{3}\left(9-x^2-0\right)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx$$

$$=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

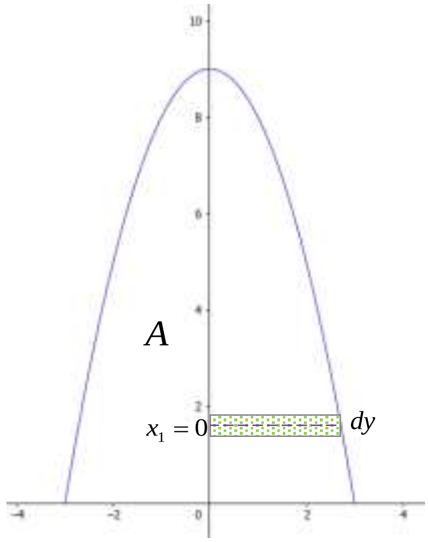
$$=\left(9(3)-\frac{(3)^3}{3}\right)-\left(9(-3)-\frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$$=(27-9)-(-27+9)$$

$$=18-(-18)$$

$=36$ ตารางหน่วย

วิธีที่ 2



รูปที่ 6.23 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1] dy$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y} - 0\right) dy$$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y}\right) dy = 2\int_0^9 (9-y)^{\frac{1}{2}} \frac{d(9-y)}{-1}$$

$$= -2\left[\frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = -\frac{4}{3}\left[(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$= -\frac{4}{3}\left((9-9)^{\frac{3}{2}} - (9-0)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(0 - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}\right)$$

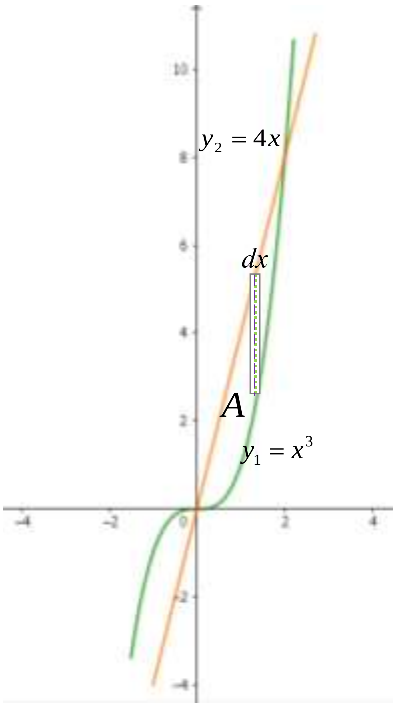
$$= \frac{4}{3}(27)$$

$= 36$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.6 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$, เส้นตรง $y = 4x$ และอยู่ในจตุภาคที่ 1

<u>วิธีทำ</u> สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1



รูปที่ 6.24 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = x^3$ (1)
- เส้นตรง $y = 4x$ (2)

หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (2)

$$x^3 = 4x$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$\therefore\ x = 0,\ 2$$

เนื่องจาก $x = -2$ ไม่ได้อยู่ในจตุภาคที่ 1

และมีจุดตัดอยู่ที่ $(0,0)$ และ $(2,8)$

พื้นที่ $$A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$$

$$= \int_0^2 (4x - x^3)dx$$

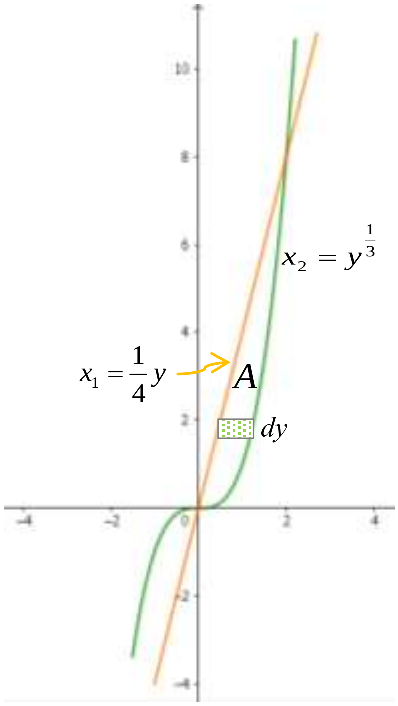
$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \left(2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right) - \left(2(0)^2 - \frac{(0)^4}{4}\right)$$

$$= (8-4) - 0$$

$= 4$ ตารางหน่วย

วิธีที่ 2



รูปที่ 6.25 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= \int_0^8 \left(y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}y \right) dy$$

$$= \left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}y^2 \right]_0^8$$

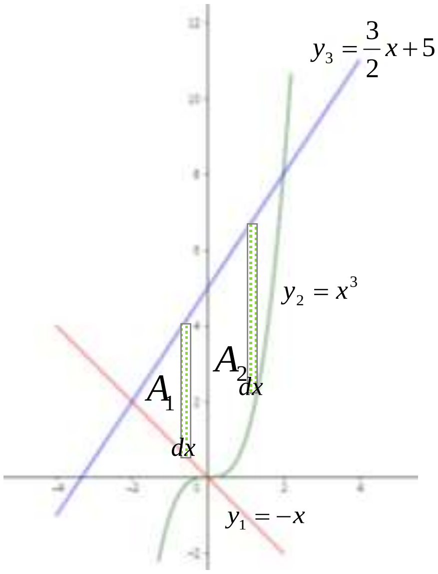
$$= \left(\frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(8)^2 \right) - \left(\frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(0)^2 \right)$$

$$= (12-8) - 0$$

$= 4$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.7 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$, เส้นตรง $y = -x$ และเส้นตรง $y = \frac{3}{2}x + 5$

<u>วิธีทำ</u>



วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = x^3$ (1)
- เส้นตรง $y = -x$ (2)
- เส้นตรง $y = \frac{3}{2}x + 5$ (3)

รูปที่ 6.26 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1. หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (2)

$$x^3 = -x$$

$$x^3 + x = 0$$

$$x(x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore\ x = 0$$

แทน $x = 0$ ในสมการที่ (1) หรือ (2) จะได้จุดตัดที่ $(0,0)$

2. หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (3)

$$x^3 = \frac{3}{2}x + 5$$

$$\therefore\ x = 2$$

แทน $x = 2$ ในสมการที่ (1) หรือ (3) จะได้จุดตัดที่ $(2,8)$

3. หาจุดตัดได้จากสมการที่ (2) และ (3)

$$-x = \frac{3}{2}x + 5$$

$$\therefore\ x = -2$$

แทน $x = -2$ ในสมการที่ (2) หรือ (3) จะได้จุดตัดที่ $(-2, 2)$

ดังนั้น จะได้ขนาดพื้นที่ $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_a^b (y_3 - y_1)\,dx + \int_b^c (y_3 - y_2)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0}\left[\left(\frac{3}{2}x + 5\right) - (-x)\right]dx + \int_{0}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x + 5\right) - \left(x^3\right)\right]dx$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{5}{2}x + 5\right)dx + \int_{0}^{2}\left(-x^3 + \frac{3}{2}x + 5\right)dx$$

$$= \left[\frac{5}{4}x^2 + 5x\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x^2 + 5x\right]_0^2$$

$$= \left(0 - \left(\frac{5}{4}(-2)^2 + 5(-2)\right)\right) + \left(\left(-\frac{(2)^4}{4} + \frac{3}{4}(2)^2 + 5(2)\right) - 0\right)$$

$$= 0 - (5 - 10) + ((3 + 10 - 4) - 0)$$

$$= 5 + 9$$

$$= 14$$ ตารางหน่วย

6.3 ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน (Volume of solid of revolutions)

ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน หมายถึง ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกนหนึ่ง (แกน x หรือ แกน y)

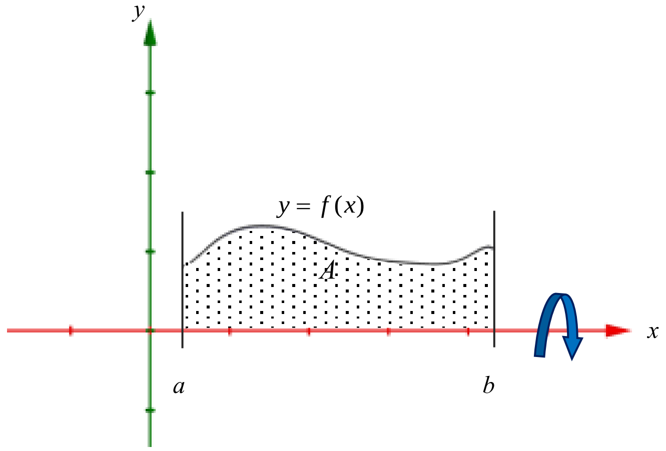
การหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนมี 2 วิธี คือ วิธีจาน (Disk method) และวิธีเปลือกทรงกระบอก (Cylindrical shell method)

6.3.1 การหาปริมาตรของทรงตันโดยใช้วิธีจาน

เป็นวิธีการหาปริมาตรของทรงตันโดยตัดทรงตันเป็นแผ่น ๆ ให้ตั้งฉากกับแกนหมุน ซึ่งจะได้พื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมเสมอ และมีลักษณะคล้ายจาน โดยที่จานจะมีขนาดต่างกันไปในแต่ละแผ่น แต่ขอบของจานยังคงเป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งเส้นเดิมตลอด

<u>กรณีที่ 1</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x

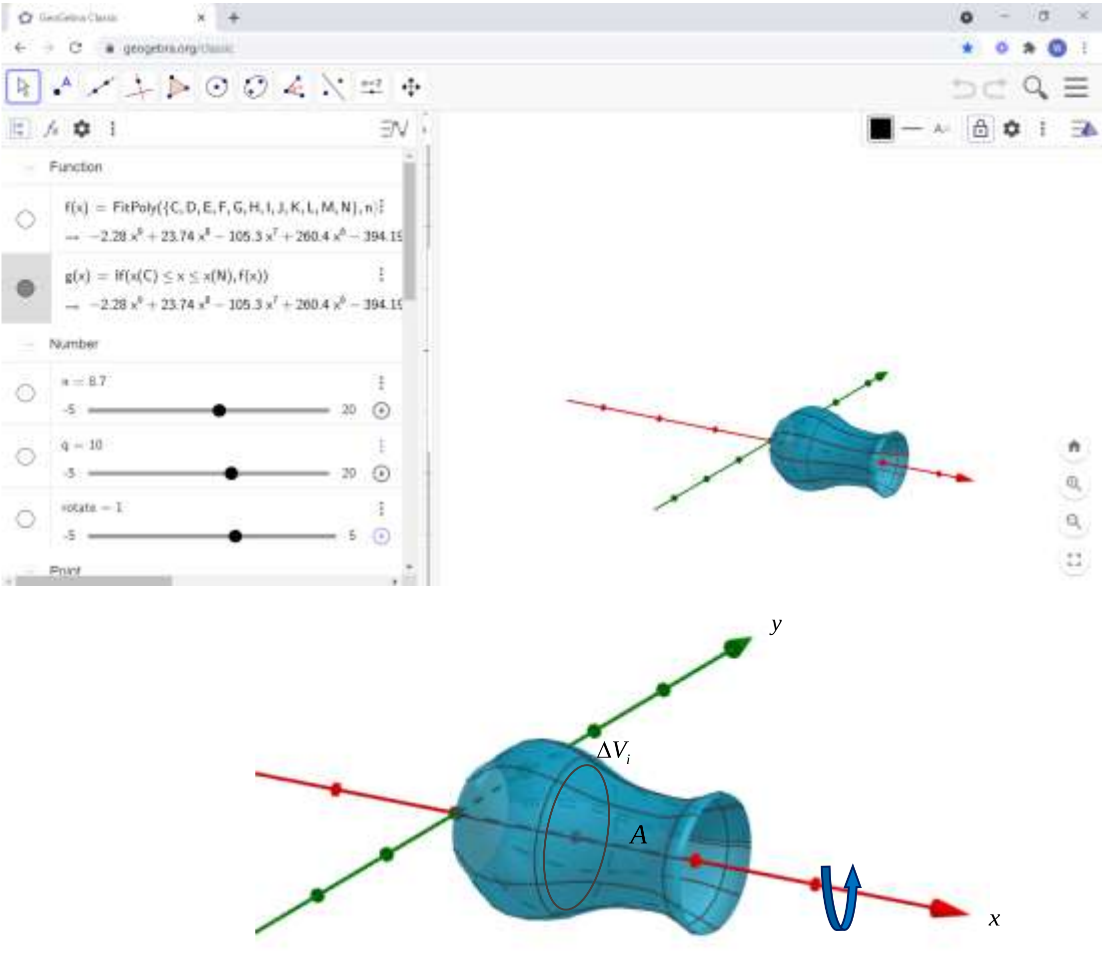
ให้ $y=f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ เส้นตรง $y=0$ หรือแกน x ซึ่งเป็นแกนการหมุน และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ ดังรูปที่ 6.27



รูปที่ 6.27 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง โดย x เป็นแกนการหมุน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

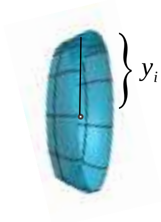
ให้ V เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ A รอบแกน x (แกน x คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x ดังรูปที่ 6.28



รูปที่ 6.28 ปริมาตรของรูปทรงตัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

โดยแต่ละแผ่นของพื้นที่หน้าตัดทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน x เป็นวงกลม และรัศมี $y = f(x)$ ดังรูปที่ 6.29



รูปที่ 6.29 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อถูกแบ่งจากทรงตันเป็น n แผ่นบาง ๆ โดยที่ $i = 1, 2, ..., n$ รอบแกน x และมีความกว้างหรือความหนาเป็น Δx_i ของแต่ละส่วนเท่า ๆ กัน นั่นคือ $\Delta x_i = \dfrac{b_i - a_i}{n}$ ซึ่งหาปริมาตรส่วนที่ i คือ

$$\Delta V_i = \pi y_i^2 \Delta x_i$$

สูตรปริมาตรทรงกระบอก = (พื้นที่หน้าตัด) $\times$ (ความกว้างหรือความหนา)

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

ในกรณีที่แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น n ส่วน และให้ $n \to \infty,\ \Delta x_i \to 0$ จะได้

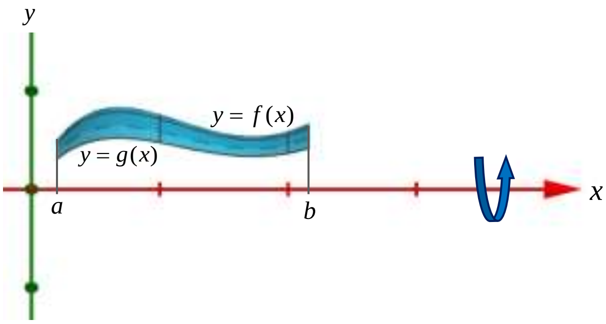
$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

$$= \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

$$\therefore V = \int_a^b \pi \big(f(x)\big)^2 \, dx$$

<u>**กรณีที่ 2**</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบ แต่แกนหมุนไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของขอบพื้นที่ โดยยึดแกนหมุนกับแกน x

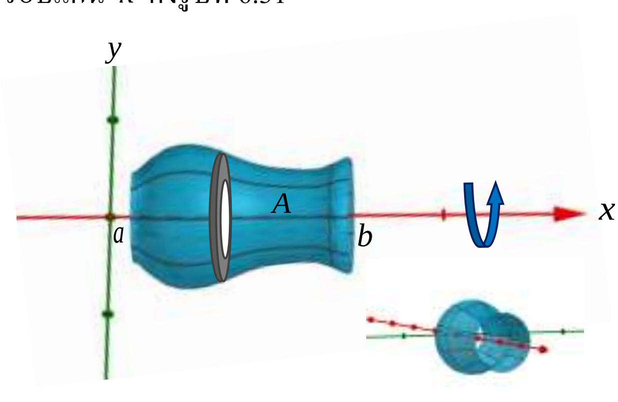
ให้ $y = f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 6.30



รูปที่ 6.30 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

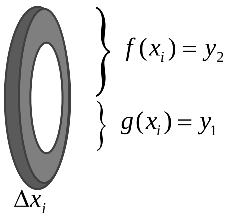
เมื่อหมุนพื้นที่ A รอบแกน x (แกน x คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x ดังรูปที่ 6.31



รูปที่ 6.31 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สูตรพื้นที่ของวงแหวน = π (รัศมีวงนอก)$^2 - \pi$ (รัศมีวงใน)^2 ดังรูปที่ 6.32



รูปที่ 6.32 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะเห็นได้ว่าแต่ละพื้นที่หน้าตัดของทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน x เป็นวงกลม คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi(y_2)^2 - \pi(y_1)^2 \\ &= \pi(f(x))^2 - \pi(g(x))^2 \end{aligned}$$

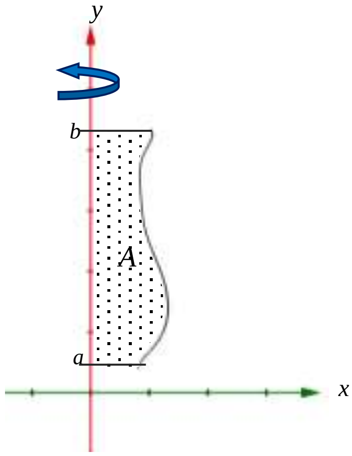
ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V = \int_a^b \left[(y_2)^2 - (y_1)^2\right] dx$$

$$\therefore V = \int_a^b \left(\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2\right) dx$$

กรณีที่ 3 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน y

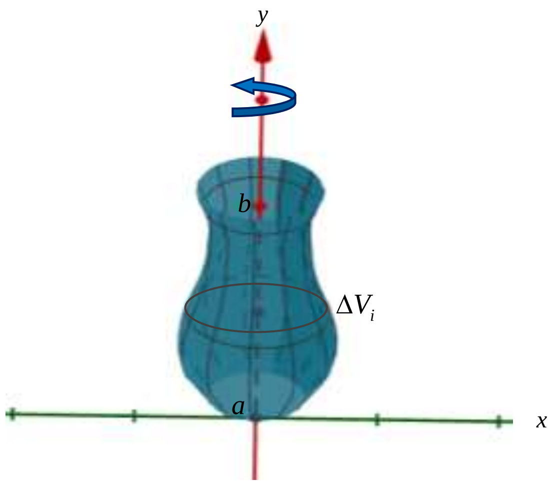
ให้ $x=f(y)$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x=f(y)$ เส้นตรง $x=0$ หรือแกน y ซึ่งเป็นแกนการหมุน และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $y=a$ และ $y=b$ ดังรูปที่ 6.33



รูปที่ 6.33 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง โดย y เป็นแกนการหมุน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อหมุนพื้นที่ A รอบแกน y (แกน y คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y ดังรูปที่ 6.34



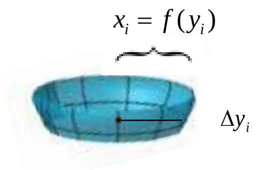
รูปที่ 6.34 ปริมาตรของรูปทรงตัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

โดยแต่ละพื้นที่หน้าตัดของทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน y คือ

$$A(y)=\pi[f(y)]^2$$

ดังแสดงรูปที่ 6.35



รูปที่ 6.35 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

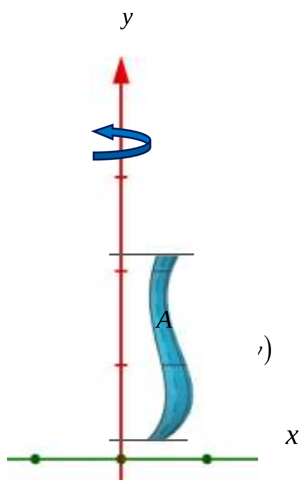
ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V=\int_a^b \pi x^2 dy$$

$$\therefore V=\int_a^b \pi(f(y))^2 dy$$

กรณีที่ 4 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบ แต่แกนหมุนไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของขอบพื้นที่ โดยยึดแกนหมุนกับแกน y

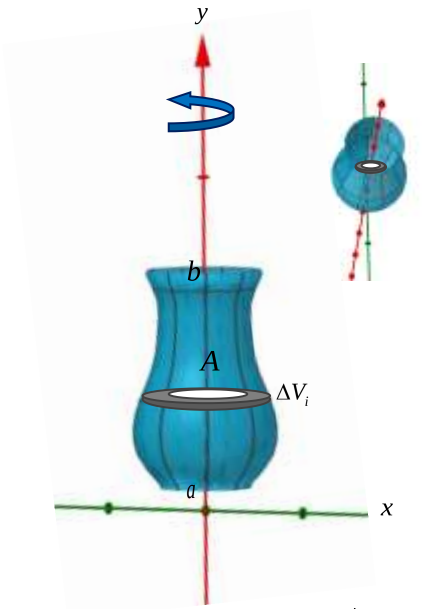
ให้ $x=f(y)$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $x=f(y)$, $x=g(y)$, $y=a$ และ $y=b$ ดังรูปที่ 6.36



รูปที่ 6.36 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อหมุนพื้นที่ A รอบแกน y (แกน y คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y ดังรูปที่ 6.37



รูปที่ 6.37 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y

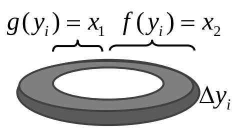
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะเห็นได้ว่าแต่ละพื้นที่หน้าตัดของทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน y เป็นวงแหวน คือ

$$A(y) = \pi(x_2)^2 - \pi(x_1)^2$$

$$= \pi(f(y))^2 - \pi(g(y))^2$$

ดังแสดงรูปที่ 6.38



รูปที่ 6.38 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V = \int_a^b \left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] dy$$

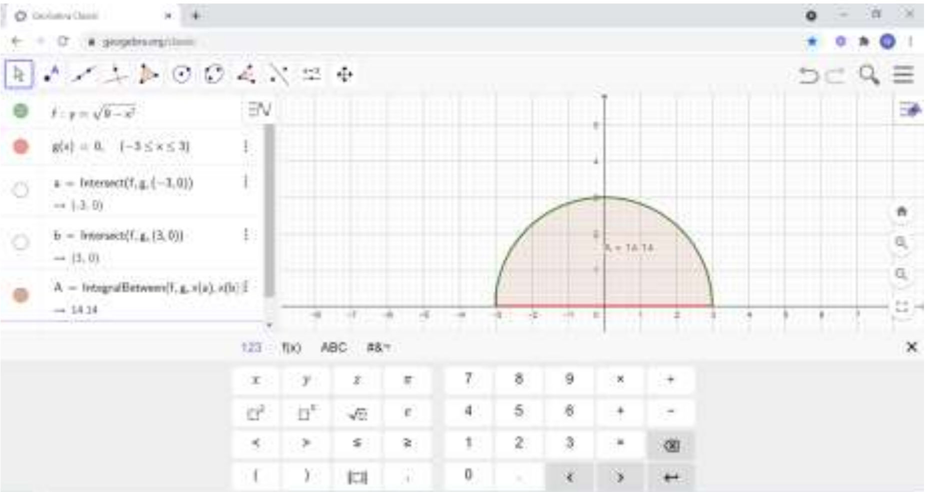
$$\therefore V = \int_a^b \left(\pi[f(y)]^2 - \pi[g(y)]^2\right) dy$$

<u>สรุปขั้นตอนในการหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน</u>

1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้
2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่
3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i
4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V
5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทนค่าของการจำกัดขอบเขต

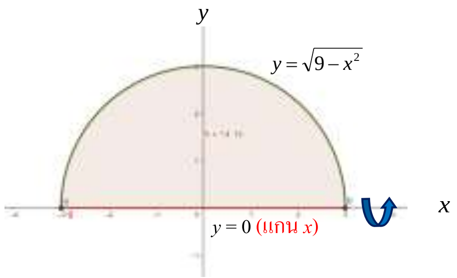
ตัวอย่าง 6.8 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{9 - x^2}$ และแกน x โดยหมุนรอบแกน x

<u>วิธีทำ</u> 1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้



รูปที่ 6.39 รูปพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน x โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

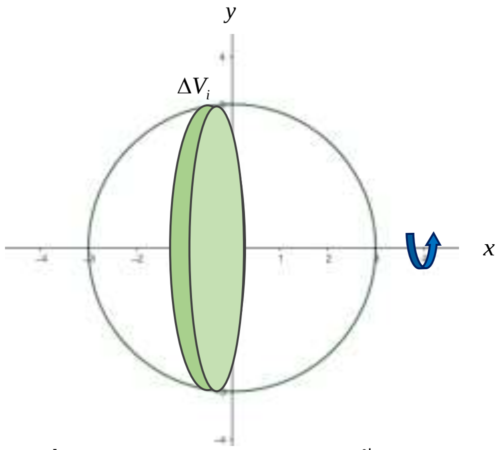
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)



รูปที่ 6.40 รูปพื้นที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

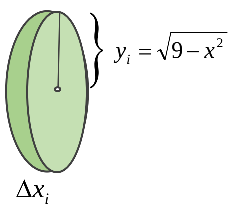
2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่



รูปที่ 6.41 การตัดของการหมุนพื้นที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i



รูปที่ 6.42 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V

$$V = \int_{-3}^{3} \pi y^2 dx$$

5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทน

$$V = \int_{-3}^{3} \pi\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \pi(9-x^2)\,dx$$

$$= \pi\int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

$$= \pi\left[\left(9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(27 - \frac{27}{3}\right) - \left(-27 - \frac{(-27)}{3}\right)\right]$$

$$= \pi\left[(27-9) - (-27+9)\right]$$

$$= \pi\left[18 - (-18)\right]$$

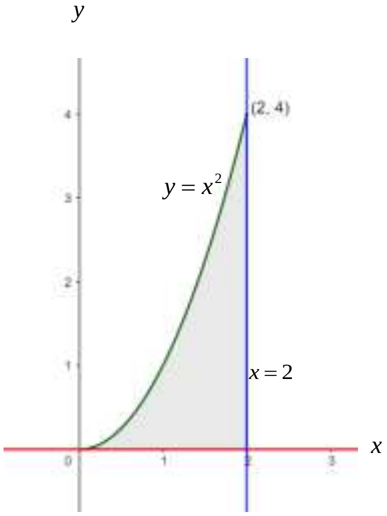
$$= \pi(18+18)$$

$= 36\pi$ ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 6.9 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=x^2$ เส้นตรง $x=2$ และแกน x โดย 1) หมุนรอบแกน x และ 2) หมุนรอบเส้นตรง $x=2$

1) หมุนรอบแกน x

<u>วิธีทำ</u> 1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้



การหาจุดตัดของเส้นโค้งและเส้นตรง

จากสมการเส้นโค้ง $y=x^2$ (1)

เส้นตรง $x=2$ (2)

แทนค่า $x=2$ ในสมการที่ (1)

ดังนั้น $y=(2)^2$

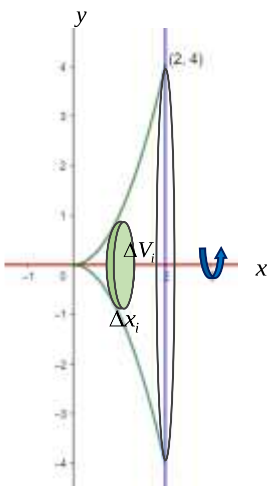
$y=4$

จุดตัดของเส้นโค้งและเส้นตรงคือ $(2,4)$

รูปที่ 6.43 รูปพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=x^2$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

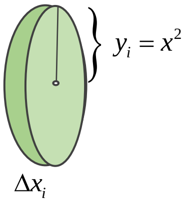
2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่



รูปที่ 6.44 การตัดของการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i



รูปที่ 6.45 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด

$$V = \int_0^2 \pi y^2 dx$$

5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทน

$$V = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{2^5}{5} - 0 \right]$$

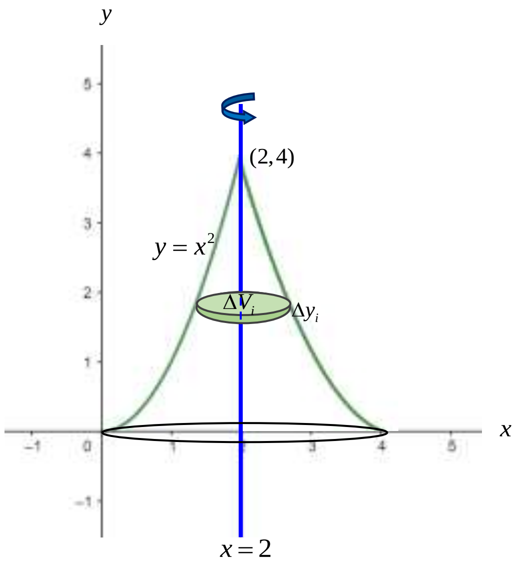
$$= \pi \left(\frac{32}{5} \right)$$

$$= \frac{32}{5}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

2) หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$

<u>วิธีทำ</u> 1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้

2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่

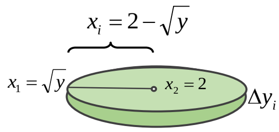


รูปที่ 6.46 การตัดของการหมุนพื้นที่ที่หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i

จากสมการเส้นโค้ง $y = x^2$

ดังนั้น $x = \sqrt{y}$



รูปที่ 6.47 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ที่หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด

$$V = \int_0^4 \pi (x_2 - x_1)^2 dy$$

$$= \int_0^4 \pi (2 - x)^2 dy$$

5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทน

$$V = \int_0^4 \pi (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \int_0^4 \pi \left(2^2 - 2(2)\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2\right) dy$$

$$= \int_0^4 \pi \left(4 - 4\sqrt{y} + y\right) dy$$

$$= \int_0^4 \pi \left(4 - 4y^{\frac{1}{2}} + y\right) dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{4y^{\frac{3}{2}}}{3}(2) + \frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[4y - \frac{8y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi \left(\left(4(4) - \frac{8(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4^2}{2}\right) - \left(4(0) - \frac{8(0)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{0^2}{2}\right) \right)$$

$$= \pi \left(16 - \frac{8(\sqrt{4^3})}{3} + \frac{16}{2}\right)$$

$$= \pi \left(16 - \frac{8(\sqrt{4 \times 4 \times 4})}{3} + 8\right)$$

$$= \pi \left(24 - \frac{64}{3}\right)$$

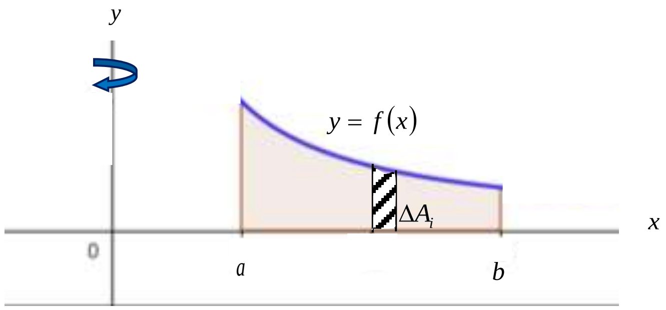
$$= \frac{8}{3}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

6.3.2 การหาปริมาตรของทรงตันโดยใช้วิธีเปลือกทรงกระบอก

เป็นวิธีการหาปริมาตรของทรงตัน โดยตัดทรงตันให้เป็นทรงกระบอกกลวง ให้ขนานกับแกนหมุน โดยแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนขนานกับแกน x โดยหมุนรอบแกน y

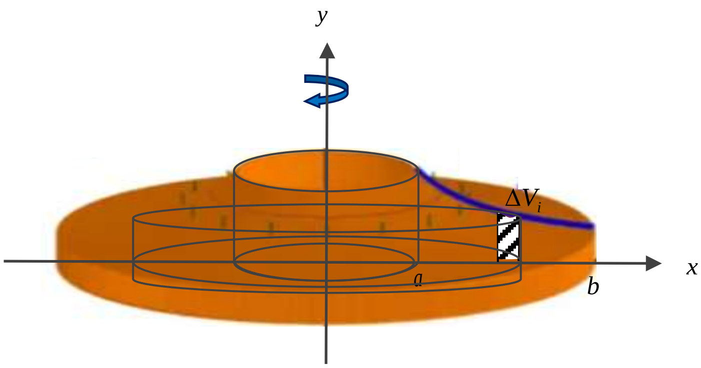
ให้ $y=f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y=f(x)$ แกน x $x=a$ และ $x=b$ รอบแกน y ดังรูปที่ 6.48



รูปที่ 6.48 พื้นที่ A

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ให้ V เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ A รอบแกน y (แกน y คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของรูปทรงกระบอกที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y ซึ่งเป็นลักษณะทรงกระบอกกลวง ดังรูปที่ 6.49



รูปที่ 6.49 ปริมาตร V

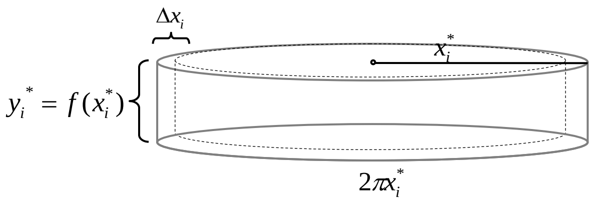
ที่มา: ดัดแปลงมาจาก https://www.storyofmathematics.com/ (2564)

การหาปริมาตรทรงตันทั้งหมด V โดยการแบ่งทรงตันออกเป็น n ส่วนย่อย ๆ โดยกำหนดให้ x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางของแต่ละส่วน และสร้างสี่เหลี่ยมบนส่วนย่อย คือ ΔA_i จะมีฐานกว้างเท่ากับ $x_i - x_{i-1}$ และส่วนสูง $f\left(x_i^*\right)$ ที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

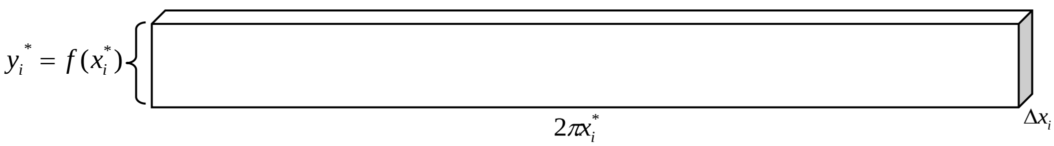
กรณีที่แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น n ส่วน และให้ $n \to \infty$ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \to V$ สามารถพิจารณา ΔV_i ได้จากสูตรปริมาตรของลูกบาศก์ที่มีความกว้างเท่ากับ y_i^*, ความยาวเท่ากับ $2\pi x_i^*$ และความหนาเท่ากับ Δx_i ดังรูปที่ 6.50



รูปที่ 6.50 ปริมาตร ΔV_i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หากคลี่แผ่นเส้นรอบวงออก ซึ่งคล้ายกับการตัดม้วนริบบิ้น ดังรูปที่ 6.50



รูปที่ 6.51 ปริมาตร ΔV_i โดยคลี่แผ่นเส้นรอบวงออก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตร $\Delta V_i = 2\pi x_i^* y_i^* \Delta x_i$

$$= 2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right) \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

$$\therefore V = \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)dx$$

<u>กรณีที่ 2</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนขนานกับแกน y โดยหมุนรอบแกน x ในทำนองเดียวกัน

ให้ $x = f(y)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $x = f(y)$, แกน y , $y = a$ และ $y = b$ รอบแกน x จะได้

$$\therefore V = \int_a^b 2\pi\, y\, f(y)dy$$

หรือในการหาสูตรปริมาตรของทรงตัน เขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$V = \int_a^b 2\pi\, r\, h \times \text{ความหนา}$$

โดยที่ r คือ รัศมี และ h คือ ความสูง

ตัวอย่าง 6.10 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$ รอบแกน y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u> หมุนรอบแกน y จะได้จุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองเส้น คือ $(0,0)$ และ $(2,4)$

หาจุดตัดของเส้นโค้งทั้ง 2 เส้น

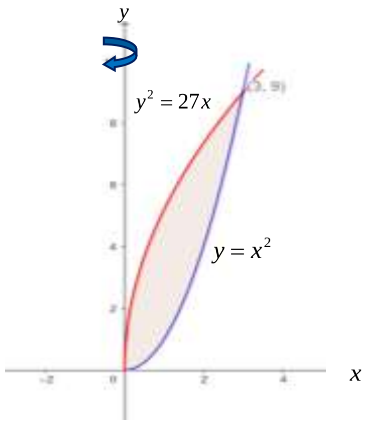
จากสมการเส้นโค้ง $y = x^2$ (1)

$y^2 = 27x$ (2)

แทนค่า $y = x^2$ ในสมการที่ (2)

ดังนั้น $(x^2)^2 = 27x$	$x=0$ หรือ $x^3-27=0$
$x^4 = 27x$	$x^3 = 27$
$x^4 - 27x = 0$	$x = 3$
$x(x^3-27) = 0$	

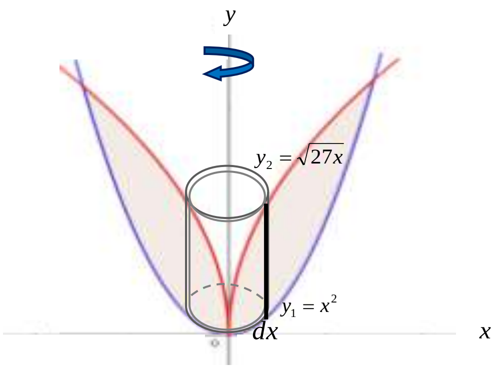
แทน $x=0$ ในสมการที่ (1) จะได้ $y=0$ และแทน $x=3$ ในสมการที่ (1) จะได้ $y=9$



รูปที่ 6.52 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จุดตัดของเส้นโค้งทั้ง 2 เส้น คือ (0, 0) และ (3, 9)



รูปที่ 6.53 ปริมาตรของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตร $V = \int_0^3 2\pi x(y_2 - y_1)\,dx$

$$= 2\pi \int_0^3 x(\sqrt{27x} - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (x\sqrt{27}\sqrt{x} - x \cdot x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (3\sqrt{3}x(x)^{\frac{1}{2}} - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (3\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}} - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \left[3\sqrt{3}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}\,2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3$$

$$= 2\pi \left(3\sqrt{3}\,\frac{(3)^{\frac{5}{2}}}{5}\,2 - \frac{3^4}{4} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{162}{5} - \frac{81}{4} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{648 - 405}{20} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{243}{10} \right) = \frac{243}{10}\pi$$ ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 6.11 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ เส้นตรง $y = 3 - x$ และแกน x รอบเส้นตรง $y = -1$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ และเส้นตรง $y = 3 - x$

จากสมการเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ (1)

และเส้นตรง $y = 3 - x$ (2)

แทนค่า $y = 3 - x$ ในสมการที่ (1)

$$(3-x)^2 = x-1$$

$$(3)^2 - 2(3)x + x^2 = x-1$$

$$9 - 6x + x^2 = x-1$$

$$x^2 - 6x + 9 = x-1$$

$$x^2 - 6x + 9 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

ดังนั้น $x = 2,\ 5$

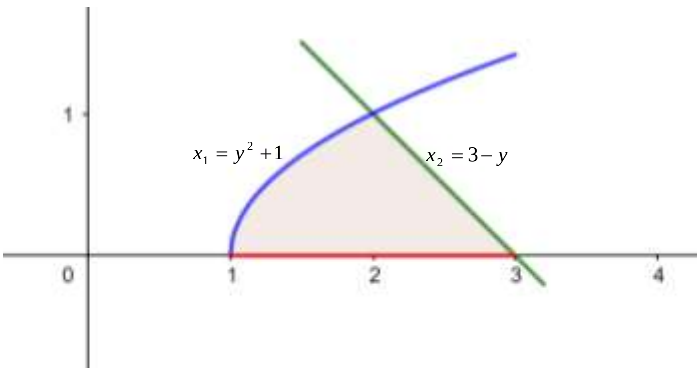
แทน $x=2$ ในสมการที่ (2) จะได้ $y=1$ และแทน $x=5$ ในสมการที่ (1) จะได้ $y=-2$

จากสมการเส้นโค้ง $y^2 = x-1$

$\therefore\ x_1 = y^2 + 1$

และเส้นตรง $y = 3-x$

$\therefore\ x_2 = 3-y$



รูปที่ 6.54 พื้นที่ของเส้นโค้ง $y^2 = x-1$ เส้นตรง $y = 3-x$ และแกน x

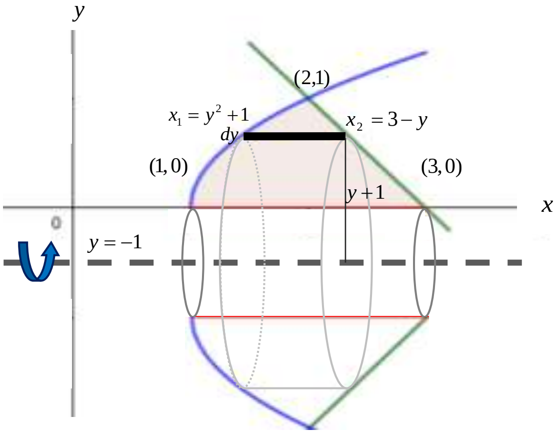
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หาจุดตัดของเส้นตรง $y = 3-x$ และแกน x (หรือ $y=0$)

จากสมการเส้นตรง $y = 3-x$ (1)

และเส้นตรง $y = 0$ (2)

แทน $y=0$ ในสมการที่ (1) จะได้ $x=3$



รูปที่ 6.55 ปริมาตรของเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ เส้นตรง $y = 3 - x$ และแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตร

$$V = \int_0^1 2\pi(y+1)(x_2 - x_1)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)(x_2 - x_1)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)((3-y)-(y^2+1))\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)(3-y-y^2-1)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)(2-y-y^2)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2y-y^2-y^3+2-y-y^2)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (-y^3-2y^2+y+2)\,dy$$

$$= 2\pi\left[-\frac{y^4}{4}-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_0^1$$

$$V = 2\pi\left(\left(-\frac{1^4}{4}-\frac{2(1)^3}{3}+\frac{1^2}{2}+2(1)\right)-0\right)$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+2\right)$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6}+2\cdot\frac{12}{12}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{-3-8+6+24}{12}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{19}{12}\right)$$

$$= \frac{19}{16}\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

บทสรุป

การประยุกต์ของปริพันธ์มีความสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างแท้จริง เช่น การหาพื้นที่ พื้นผิว ไม่ว่าจะเป็นระหว่างเส้นตรงกับเส้นโค้ง หรือเส้นโค้งกับเส้นโค้งของรูปแบบ 2 มิติ หรือในรูปลักษณะของเส้นแบบอื่น ๆ และในการหาปริมาตรของทรงตัน 3 มิติ ที่ไม่สามารถคำนวณหาได้จากสูตรใด ๆ ได้ตามปกติ แก้ปัญหาโดยใช้วิธีจานและวิธีเปลือกทรงกระบอก ภายใต้การใช้ปริพันธ์แบบจำกัดเขตจากการวาดกราฟ ทั้งยังมีการอธิบายจากการใช้โปรแกรม GeoGebra Classic หรือ GeoGebra Application แบบออนไลน์เบื้องต้น ควบคู่ในระหว่างการศึกษาเรียนรู้เพิ่มเติมนอกจากทฤษฎีเท่านั้น จึงเหมาะแก่การใช้งานสำหรับนักศึกษาหรือบุคคลทั่วไปที่สนใจ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\int_0^1 2x\left(4-x^2\right)dx$ 1.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$

1.3 $\int_{-1}^2 x^2 e^{x^3+1}\,dx$ 1.4 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

1.5 $\int_0^4 \frac{x}{x^2+1}dx$ 1.6 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

1.7 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$ 1.8 $\int_0^2 x^3\sqrt{16-x^4}\,dx$

1.9 $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{\cos x+2}dx$ 1.10 $\int_1^2 \frac{4}{9x^2+6x+1}dx$

2. จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งหรือเส้นตรงที่กำหนดให้

1. $y=x^2$ และ $y=\sqrt{x}$
2. $x=y^2$ และ $x=2-y^2$
3. $y^2-2x=0$ และ $y^2+4x-12=0$
4. $y=x^3-6x^2+8x$ และแกน x

5. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $x = 0$ และ $x = 2$
6. $y = x^2 + 4$, $y = 10 - x$, แกน x และแกน y
7. $y = 6x - x^2$ และ $y = x^2 - 2x$
8. $y = 3 - x$ และ $y = x^2 - 9$
9. $x = y^2$, $x = y^2 + 2$, $y = -3$ และ $3y - x = 0$
10. $y = x^3$, $y = -x$ และ $3x - 2y + 10 = 0$

3. จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

1. $y = x^2$, $x = 0$ และ $y = 1$ หมุนรอบแกน x
2. $y = x$ และ $y = x^2$ หมุนรอบแกน y
3. $x = y^2$, $y = 2$ และ $x = 0$ หมุนรอบแกน y
4. $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 0$ และ $x = 1$ หมุนรอบแกน y
5. $y = x^2 - x$ และ $y = 0$ หมุนรอบแกน x
6. $y = x^2$ และ $y = x$ หมุนรอบแกน y
7. $y^2 = 2x$ และ $2y = x$ หมุนรอบแกน x
8. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$ และ $y = 2$ หมุนรอบแกน y
9. $y = x^2$ และ $y = \sqrt[3]{x}$ หมุนรอบแกน y
10. $y = x^3$ และ $y = x^2$ หมุนรอบแกน x
11. $y = \dfrac{1}{4}x^3 + 2$, $y = 2 - x$ และ $x = 2$ หมุนรอบแกน y
12. $y = x^2$ และ $y = x$ หมุนรอบแกน x
13. $y = x^3$, $x = 0$ และ $y = 1$ โดยหมุนรอบเส้นตรง

    1) $x = 1$ 2) $y = 1$

3) $x=-1$ 4) $y=2$

14. $y=\sqrt{x}$, $x=0$ และ $y=1$ โดยหมุนรอบเส้นตรง

1) $x=1$ 2) $y=1$

3) $x=-1$ 4) $y=2$

15. $y^2=x^3$, $x=4$ และแกน x โดยหมุนรอบเส้นตรง

1) $x=4$ 2) $y=8$

เอกสารอ้างอิง

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2546). **พจนานุกรมศัพท์คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพมหานคร: ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

GeoGebra for Teaching and Learning Math., **GeoGebra Classic**. https://www.geogebra.org/classic (2564)

Story of Mathematics., **Calculus**. https://www.storyofmathematics.com. (2564)

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1.1	-3	1.2	-1
1.3	3	1.4	a^2+3a-1
1.5	b^4+3b^2-1	1.6	$a^2+2ab+b^2+3a+3b-1$
1.7	$3x-3h-2$	1.8	$3x-5$
1.9	$6x+1$	1.10	3

2.1	0	2.2	3
2.3	0	2.4	5
2.5	1	2.6	1
2.7	2	2.8	0
2.9	1	2.10	1

3.1	x^2+x-3	3.2	x^2-x+5
3.3	x^3-4x^2+x-4	3.4	$\dfrac{x^2+1}{x-4}$; $x-4\neq 0$
3.5	$-\dfrac{9}{4}$	3.6	11
3.7	-4	3.8	26

4.1	2^{x^2}	2^{2x}
4.2	$4\sqrt{x-2}-3$	$\sqrt{4x-5}$
4.3	x	$4-\sqrt{4-x}$
4.4	x	$\lvert x\rvert$
4.5	$\dfrac{1-2x}{x}$	$\dfrac{1-x}{-1-2x}$
4.6	$\lvert x\rvert$	x

4.7	$\dfrac{1}{\lvert x+1\rvert}$		$\left\lvert \dfrac{1}{x}+1\right\rvert$
5.	$\dfrac{1}{(x^2+1)^2+2}$		$\dfrac{1}{4}$
6.1	$f(x)=x^3$	6.2	27 ลูกบาศก์หน่วย
7.1	$f(x)=\dfrac{x-32}{1.8}$	7.2	22.22 องศาเซลเซียส
8.1	$f(x)=70x+800{,}000$	8.2	$R(x)=300x$
8.3	$P(x)=230x-800{,}000$	8.4	580,000 บาท

9.1	-1	9.2	-1
9.3	3	9.4	$\dfrac{1}{2}$
9.5	$\dfrac{2}{5}$	9.6	-6
9.7	5	9.8	-2
9.9	-1	9.10	$\dfrac{5}{6}$
9.11	3	9.12	0
9.13	$-4b$	9.14	0
9.15	$\dfrac{7}{8}$	9.16	6
9.17	0	9.18	0
9.19	หาค่าไม่ได้	9.20	0
9.21	4	9.22	$\dfrac{1}{2}$
9.23	$-\dfrac{1}{2}$	9.24	∞

9.25	0	9.26	∞
9.27	16	9.28	0
9.29	$\frac{4}{3}$		

10.	ต่อเนื่อง	11.	ต่อเนื่อง
12.	ต่อเนื่อง	13.	ไม่ต่อเนื่อง
14.	ต่อเนื่อง	15.	ไม่ต่อเนื่อง

16.1	$x=-1,1$	16.2	ไม่มี
16.3	$x=2$	16.4	$x=1$
16.5	ไม่มี	16.6	$x=-1,0,1$
16.7	ทุกค่า	16.8	ทุกค่ายกเว้น 0

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1.1	-5	1.2	$4x$
1.3	$2x+1$	1.4	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
1.5	$2x+3$	1.6	$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
1.7	$-\frac{2}{(x+1)^2}$	1.8	-5
1.9	$2x-6$	1.10	$-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$
1.11	$-2x$	1.12	x^3+3x^2+2x
1.13	$4x-1$	1.14	$\frac{3}{2}\sqrt{x}$
1.15	$3x^2+6x$	1.16	$-\frac{5}{x^2}$
1.17	1	1.18	19

1.19	-2	1.20	2
1.21	$\frac{3}{4}$	1.22	$\frac{3}{2}$
1.23	-4	1.24	3
1.25	-2		

2.1	$-35(2-7x)^2$	2.2	$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$
2.3	$2x(3x^2-4)^{\frac{-2}{3}}$	2.4	$\frac{-12}{(3x-2)^5}$
2.5	$15x^2-4x+5$	2.6	$27x^4+8x^3-54x^2-24x+27$
2.7	$9x^2-34x-32$	2.8	$\frac{-7x^2-2x-21}{(x^2-3)^2}$
2.9	$\frac{87(x+7)^2}{(8-3x)^8}$	2.10	0
2.11	-2	2.12	-9
2.13	3	2.14	10
2.15	0		

3.1	e^{e^x+x}	3.2	$6^{7x}\ln^2 6$
3.3	$2\log x$	3.4	$2e^{2x}5^{x^3}+3x^2e^{2x}5^{x^3}\ln 5$
3.5	$2x(x^2-3)^{x^2-3}(\ln(x^2-3)+1)$	3.6	$5^{\log x}e^x+\frac{1}{x}5^{\log x}e^x\ln 5\log e$
3.7	$\frac{\log e}{x\log x}$	3.8	$\frac{x\log e}{2(x-1)}+\log\sqrt{x-1}$
3.9	$2xe^{x^2}2^{\ln x}+\frac{e^{x^2}2^{\ln x}\ln 2}{x}$	3.10	$e^{x\log x}(\log e+\log x)$
3.11	$\frac{5}{3\ln 3}$	3.12	0
3.13	$\frac{1}{3}$	3.14	$-\frac{1}{2}\log e$

3.15 $\frac{7}{6}$

4.1 $2x\cos x^2 - 4x\sec^2 x^2$

4.2 $e^{\log(\sin x)} \log e \cot x$

4.3 $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{6}\right)\cos^2\left(\frac{x}{6}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{x}{6}\right)$

4.4 $\frac{\sin x + \cos x}{2\sqrt{\sin x - \cos x}}$

4.5 $\frac{\sin x \sec^2 \sqrt{\cos x}\sin(\tan\sqrt{\cos x})}{2\sqrt{\cos x}}$

4.6 $8\tan x \sec^2 x(1-\tan^2 x)^3$

4.7 $\frac{\sec x \tan x}{2x} - \frac{\sec x}{2x^2}$

4.8 $2\sin x \operatorname{cos}ec^2(\cos x)\cot(\cos x)$

4.9 $5^{\ln(\sin x)} \ln 5 \cot x$

4.10 $\frac{\sec^2(\sqrt{1-\sin x})\sqrt{-\cos x}}{2\sqrt{1-\sin x}}$

4.11 $2\cos x + 2x\cos^3 x - 3x^2 \sin x \cos^2 x$

4.12 $\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

4.13 6

4.14 1

4.15 -2

5.1 $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

5.2 $-\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

5.3 $\frac{3}{x^2+9}$

5.4 $-\frac{(\cot^{-1}\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

5.5 $\frac{e^{\sec^{-1}2x}}{x\sqrt{4x^2-1}}$

5.6 $\frac{x^2}{1+\ln^2 x} + 3x^2\tan^{-1}(\ln x)$

5.7 $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

5.8 $\frac{\sec^{-1} x + \operatorname{cos}ec^{-1} x}{x\sqrt{x^2-1}}$

5.9 $\frac{\log x}{x^2+1} + \frac{\log e \cdot \tan^{-1} x}{x}$

5.10 $\frac{-1}{\sqrt{x}(x^2+1)} - \frac{\cot^{-1}\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$

5.11 $\frac{\sec^2 x}{\sin^{-1}(\tan x)\sqrt{1-\tan x}}$

5.12 $\frac{1}{x^3+x} + \frac{\tan^{-1} x}{x^2}$

5.13 $\frac{-\sqrt{x}}{x+1} + \frac{\cot^{-1} x}{2\sqrt{x}}$

5.14 $-\frac{3}{5}$

5.15 1

6.1 $\dfrac{(5x-1)^4\sqrt{x-7}}{\sqrt[3]{x}(2x+9)^5}\left(\dfrac{20}{5x-1}+\dfrac{1}{2x-7}-\dfrac{1}{3x}-\dfrac{10}{2x+9}\right)$

6.2 $(2x^3+4)^3\sqrt{4x^4+4}\sqrt[3]{1-x^3}\left(\dfrac{18x^2}{2x^3+4}+\dfrac{8x+1}{8x^2+2x}-\dfrac{x^2}{1-x^3}\right)$

6.3 $\dfrac{e^x\sin x}{x^x}(\cos x-\ln x)$

6.4 $\dfrac{\sin^{-1}x\cdot\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1}{\sin^{-1}x}-\dfrac{1}{\cos^{-1}x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

6.5 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right)$

6.6 $x^2e^{3x}\tan^3x(2\tan x+3x\tan x+3x\sec^2 x)$

6.7 $\dfrac{x^2\cos 5x}{(x^2+1)^3(x-1)^2}\left(\dfrac{2}{x}-5\tan 5x-\dfrac{6x}{x^2+1}-\dfrac{2}{x-1}\right)$

6.8 $\dfrac{x^4\sin^2 x}{\sqrt{x+1}}\left(\dfrac{4}{x}+2\cot x-\dfrac{1}{2(x+1)}\right)$

7.1	22	7.2	-4	7.3	1
7.4	$\dfrac{1}{t^2-2t+1}$	7.5	$-\dfrac{6}{(x-1)^3}$	7.6	$\dfrac{8}{25}$
7.7	$\dfrac{32}{147}$	7.8	$\dfrac{21}{25}$	7.9	1

8.1	$\dfrac{y+2}{1-x}$	8.2	$\dfrac{2x-y^2-2xy}{2y+x^2+2xy}$
8.3	$\dfrac{1}{2}$	8.4	$\dfrac{1}{e+1}$
8.5	0		

9.1	$\dfrac{1}{(4x+4)\sqrt{x+1}}+2$	9.2	$360x^2+72$

9.3	$\frac{15}{8}t^{-\frac{5}{2}}-8e^{2t}$	9.4	$x^{-2}-4\cos 2x$
9.5	$2\cos x-x\sin x-6$	9.6	2
9.7	$\frac{5}{4y}$	9.8	$\sin x$
9.9	$(-1)^n n!(2x-1)^{-(n+1)}$	9.10	xe^x+ne^x

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1.1	$\min\left(\frac{2}{3},1\right)$	$\max(-2,-1)$	1.2	$\min(0,0)$	$\max(-2,0)$
1.3	$\min(0,1)$		1.4	$\min\left(6,-\frac{321}{2}\right)$	$\max(-1,11)$
1.5	$\min(0,-4)$	$\max(1,-2)$	1.6	$\min(2,4)$	$\max(-2,-4)$
1.7	$\min(-1,0)$	$\max(1,2)$			

2. 44.31 เมตร

3. $\frac{5}{3}$ เซนติเมตร และ 74 ลูกบาศก์เซนติเมตร

4. 22,500 บาท

5. 40 เซนติเมตร

6. 21 หน่วยต่อนาที และ 12 หน่วยต่อนาที^{2}

7. ณ t = 1 นาที จะได้ระยะทาง คือ 8 กิโลเมตร และความเร่ง คือ -6 กิโลเมตรต่อนาที^{2}
   ณ t = 3 นาที จะได้ระยะทาง คือ 4 กิโลเมตร และความเร่ง คือ 6 กิโลเมตรต่อนาที^{2}

8. $\frac{3}{2}$ เมตรต่อนาที

9. $\frac{1}{12\pi}$ ฟุตต่อวินาที

10. $\frac{30}{\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

11.1	1	11.2	$-\frac{1}{4}$	11.3	-1
11.4	1	11.5	1	11.6	2
11.7	$\ln a$	11.8	$\frac{1}{6}$	11.9	$-\frac{1}{4}$
11.10	0	11.11	1	11.12	$\frac{1}{e}$
11.13	1	11.14	1	11.15	0

11.16	3	11.17	1	11.18	$\frac{1}{6}$
11.19	1	11.20	3	11.21	$-\frac{1}{2}$
11.22	1				

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1.1	$x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} + c$	1.2	$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$
1.3	$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + x + c$	1.4	$x - \frac{2}{x} + c$
1.5	$6x^{\frac{11}{6}} - 4x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$	1.6	$4x^2 + 8x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{3}} + c$
1.7	$\frac{3}{4}\left(x^2 - 4x\right)^{\frac{2}{3}} + c$	1.8	$-\frac{\left(1 - 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} + c$
1.9	$-\frac{3\left(2 - x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{2} + c$	1.10	$-\sqrt{2x-1} + c$
1.11	$\ln^5 5x + c$	1.12	$-\frac{\cos^4 x}{4} + c$
1.13	$\frac{\left(\arcsin x^2\right)^2}{4} + c$	1.14	$\frac{1}{\log e \cdot \log x} + c$

2.1	$-2\ln\lvert 3 - x\rvert + c$	2.2	$\frac{1}{4}\ln\lvert 3x^4 + 1\rvert + c$
2.3	$-\frac{1}{2}\ln\lvert 5 - e^{2x}\rvert + c$	2.4	$\ln\lvert \ln x\rvert + c$
2.5	$6x^{\frac{11}{6}} - 4x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$	2.6	$4x^2 + 8x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{3}} + c$
2.7	$-3\ln\lvert arc\cot x\rvert + c$	2.8	$\frac{(2x-3)^{20}}{40} + c$
2.9	$\frac{\ln^3 x}{3\ln 5} + c$	2.10	$-x^2 - 2x - 3\ln\lvert x - 2\rvert + c$
2.11	$\frac{1}{10}e^{5x^2-1} + c$	2.12	$-\frac{1}{9\left(x^3+4\right)^3} + c$

2.13 $\frac{(4x^2+5x-1)^4}{4}+c$

2.14 $-\frac{1}{6}(x^4+3x^2-5)^{-3}+c$

2.15 $-\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

2.16 $e^{e^x}+c$

2.17 $\ln|x+\cos x|+c$

2.18 $-\ln|\ln(\cos x)|+c$

2.19 $-\frac{3^{\cos x}}{\ln 3}+c$

2.20 $\frac{1}{2}e^{x^2-2x+5}+c$

3.1 $\frac{1}{20}\ln\left|\sec(5x^4-1)\right|+c$

3.2 $-\ln\left|\cos ec\, x^{-1}-\cot x^{-1}\right|+c$

3.3 $\cos(arc\cot x)+c$

3.4 $\ln|\sin(\ln x)|+c$

3.5 $\frac{1}{5}\sec 5x+c$

3.6 $2\sin(\ln(\sqrt{x}-2))+c$

3.7 $-\cos ec\, e^x+c$

3.8 $-\cos ec\sqrt{x}+c$

3.9 $-\cos ecx+\cot x+c$

3.10 $\ln|\sec(\arctan 2x)|+c$

4.1 $\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c$

4.2 $\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{4}+c$

4.3 $\frac{1}{4}arc\sec\frac{x^2}{2}+c$

4.4 $\arctan e^x+c$

4.5 $\frac{x}{2}\sqrt{4x^2-9}-\frac{9}{4}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+c$

4.6 $\frac{x}{2}\sqrt{3x^2+5}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+5}\right|+c$

4.7 $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sin 2x}{2\sqrt{2}-\sin 2x}\right|+c$

4.8 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right|+c$

4.9 $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x+5}{\sqrt{5}}\right)+c$

4.10 $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+c$

4.11 $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{2}+c$

4.12 $\frac{1}{3}\ln\left|3x-3+\sqrt{9x^2-18x+13}\right|+c$

4.13 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+3}{2\sqrt{3}}+c$

4.14 $\frac{e^x+1}{2}\sqrt{15-2e^x-e^{2x}}+8\arcsin\frac{e^x+1}{4}+c$

4.15 $-\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+9}\right|+c$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1.1 $-x\cos x-\sin x+c$

1.2 $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$

1.3 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

1.4 $3x\ln x-3+c$

1.5 $-\frac{x^2}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c$

1.6 $\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

1.7 $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+c$

1.8 $(4-10x)\sin\frac{x}{2}+10\cos\frac{x}{2}+c$

1.9 $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$

1.10 $\frac{1}{3}(1-x^2)e^{3x}+\frac{2}{9}xe^{3x}-\frac{2}{27}e^{3x}+c$

1.11 $-\frac{x}{e^x+1}+x-\ln(e^x+1)+c$

1.12 $\frac{2}{5}e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x+c$

1.13 $-(x^2+2x)\cos x+(2x+2)\sin x+2\cos x+c$

1.14 $\frac{1}{2}(3x^2-x)e^{2x-1}-\frac{1}{4}(6x-1)e^{2x-1}+\frac{3}{8}e^{2x-1}+c$

1.15 $x\arcsin(-2x)-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+c$

1.16 $-\frac{2}{5}e^{(1-x)}\cos(2x+1)-\frac{1}{5}e^{(1-x)}\sin(2x+1)+c$

1.17 $-(x-3)^2e^{-x}-2(x-3)e^{-x}-2e^{-x}+c$

1.18 $\frac{1}{2}x\sin(x^2-2)+\frac{1}{4}\cos(x^2-2)+c$

1.19 $x\cos(\ln x)-\cos(\ln x)+c$

1.20 $x\tan x-\ln\left|\sec x\right|+c$

2.1 $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c$

2.2 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

2.3 $-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{2}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+c$

2.4 $\frac{1}{16}x-\frac{1}{24}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$

2.5 $\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x+c$

2.6 $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{1}{3}\sec^3 x+c$

2.7 $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 4x+c$

2.8 $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+c$

2.9 $\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x+c$

2.10 $-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+c$

2.11 $\frac{1}{6}\sec^6 x-\frac{1}{4}\sec^4 x+c$

2.12 $\frac{1}{12}\tan^3 4x-\frac{1}{4}\tan 4x+x+c$

2.13 $-\frac{1}{5}\cot^5 x+\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x-x+c$

2.14 $\frac{1}{12}\tan^6 2x+\frac{1}{8}\tan^4 2x+c$

2.15 $\frac{2}{21}\tan^{\frac{7}{2}} 3x+\frac{2}{33}\tan^{\frac{11}{2}} 3x+c$

2.16 $-\frac{3}{5}\cot^5\left(\frac{x}{3}\right)-2\cot^3\left(\frac{x}{3}\right)-3\cot\left(\frac{x}{3}\right)+c$

2.17 $\frac{1}{6}\tan^3 2x+\frac{1}{2}\tan 2x+c$

2.18 $-\frac{1}{9}\cos ec^9 x+\frac{2}{7}\cos ec^7 x-\frac{1}{5}\cos ec^5 x+c$

3.1 $-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}+\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+c$

3.2 $\sqrt{x^2-25}-5arc\sec\left(\frac{x}{5}\right)+c$

3.3 $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3+8x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+8x}+\sqrt{3}}\right|+c$

3.4 $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3}+c$

3.5 $\frac{1}{2}\ln x\sqrt{\ln^2 x-25}-\frac{25}{2}\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-25}\right|+c$

3.6 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+16}+8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|+c$

3.7 $\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+11}\right|+c$

3.8 $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+c$

3.9 $\frac{x+2}{2}\sqrt{8-4x-x^2}+6\arcsin\frac{x+2}{2\sqrt{3}}+c$

3.10 $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\ln\sqrt{x})+c$

3.11 $\dfrac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+c$

3.12 $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}\right|+c$

4.1 $\ln\left|\dfrac{x^2(x-1)^2}{x+1}\right|+c$

4.2 $4\ln|x|+\dfrac{1}{x}+3\ln|x-1|+c$

4.3 $\ln|x|-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+c$

4.4 $2\ln|x+2|+\dfrac{3}{2}\ln|x^2+2x+5|-\dfrac{7}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2}+c$

4.5 $2\ln|x^2+2|-\ln|x^2+1|-\arctan x+c$

4.6 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)+\arctan x+c$

4.7 $\arctan\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}x+c$

4.8 $x^2+4x+\ln|(x-1)(x^2+1)|+3\arctan x+c$

4.9 $\ln(x^2+1)+\dfrac{1}{x^2+1}+c$

4.10 $-\dfrac{7}{15}\ln|3x-1|+\dfrac{2}{5}\ln|x^2+1|+\dfrac{3}{5}\arctan x+c$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1.1 $\dfrac{7}{2}$

1.2 $\dfrac{1}{3}$

1.3 $\dfrac{e^9-1}{3}$

1.4 $\sqrt{2}-1$

1.5 $\dfrac{\ln 17}{2}$

1.6 $\dfrac{1}{3}$

1.7 $\dfrac{3}{4}(4-\sqrt[3]{9})$

1.8 $\dfrac{32}{3}$

1.9 $-\ln 3$

1.10 $\dfrac{1}{7}$

2.1 $\frac{1}{3}$ ตารางหน่วย
2.2 $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย
2.3 8 ตารางหน่วย
2.4 8 ตารางหน่วย
2.5 4 ตารางหน่วย
2.6 $\frac{128}{3}$ ตารางหน่วย
2.7 $\frac{64}{3}$ ตารางหน่วย
2.8 $\frac{343}{6}$ ตารางหน่วย
2.9 $\frac{149}{6}$ ตารางหน่วย
2.10 14 ตารางหน่วย

3.1 $\frac{4\pi}{5}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.2 $\frac{\pi}{6}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.3 $\frac{32\pi}{5}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.4 $\frac{4\pi}{5}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.5 $\frac{\pi}{30}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.6 $\frac{\pi}{6}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.7 $\frac{64\pi}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.8 $\frac{\pi}{2}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.9 $\frac{5\pi}{14}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.10 $\frac{2\pi}{35}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.11 $\frac{128\pi}{15}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.12 $\frac{2\pi}{15}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.13 1) $\frac{9\pi}{10}$ ลูกบาศก์หน่วย 2) $\frac{9\pi}{14}$ ลูกบาศก์หน่วย
3) $\frac{21\pi}{10}$ ลูกบาศก์หน่วย 4) $\frac{15\pi}{7}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.14 1) $\frac{7\pi}{15}$ ลูกบาศก์หน่วย 2) $\frac{\pi}{6}$ ลูกบาศก์หน่วย
3) $\frac{13\pi}{15}$ ลูกบาศก์หน่วย 4) $\frac{11\pi}{6}$ ลูกบาศก์หน่วย
3.15 1) $\frac{1024\pi}{35}$ ลูกบาศก์หน่วย
2) $\frac{704\pi}{5}$ ลูกบาศก์หน่วย

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). **แคลคูลัสและเทคนิคการใช้ Graphing Calculator.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. (2540). **แคลคูลัส I**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ประสานมิตร.

จินดา อาจริยะกุล. (2545). **อนุพันธ์และการประยุกต์**. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2547). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

พรชัย สารทวาหา. (2550). **สมการเชิงอนุพันธ์.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.

เพ็ญนภา สุวรรณบำรุง. (2549). **แคลคูลัส 1-1.** มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร.

ไพโรจน์ ตีรณธนากุล. (2549). **แคลคูลัส.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

มนัส ประสงค์. (2535). **แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1.** กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. (2540). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

ภิรดี ฤทธิเดช. (2560). **แคลคูลัสพื้นฐาน.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2546). **พจนานุกรมศัพท์คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพมหานคร: ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร: ราชบัณฑิตยสถาน.

วรรณา ไชยวิโน. (2535). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2.** กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

วัชรพงษ์ อนันต์ชื่น. (2547). **เอกสารการสอนชุดวิชาคณิตศาสตร์สำหรับสังคมศาสตร์**. สาขาวิชาศิลปศาสตร์. มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. นนทบุรี: โรงพิมพ์ชวนพิมพ์.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วีริยะ ศิริชานนท์. (มปป). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

ศรัณย์ ว่องไว. (2553). **แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพมหานคร: ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา, อนัญญา อภิชาตบุตร และอรุณี เจริญราช. (2553). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 12). กรุงเทพมหานคร: วิทยพัฒน์.

สุธรรม ขนาบศักดิ์. (2555). **แคลคูลัสสำหรับนักเศรษฐศาสตร์**. คณะเศรษฐศาสตร์: มหาวิทยาลัยทักษิณ.

สุรวิทย์ ตันเต่งผล และคณะ. (2541). **แคลคูลัส1.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุวรรณ ถังมณี และบุษราพร เหลืองมาลาวัฒน์. (2558). **แคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับผู้เริ่มเรียน.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์.

Edmond C. Tomastik. (2005). **Calculus: Applications and Technology.** (3rd ed.). Belmont, CA: Thomson Brooks.

Find my soft., **A faster download experience**. https://www.freemat.findmysoft.com. (2564)

Frank Jr. Ayres. and Elliott Mendelson. (2000). **Calculus**. (4th ed.). London: McGraw-Hill International Edition.

Geoffrey C. Berresford. (1996). **Brief Applied Calculus**. USA: Houghton Mifflin Company.

GeoGebra for Teaching and Learning Math., **GeoGebra Classic**. https://www.geogebra.org/classic (2564)

Google Technology Company., **Google website**. https://www.google.com. (2564)

James B. Stewart. (2010). **Calculus: Concepts and Contexts.** (4th ed.). USA: Brooks/Cole Learning.

John C. Peterson. (1997). Technical Mathematics with Calculus. (2nd ed.). New York: Delmar.

Larry J. Goldstein, David C. Lay and David I. Schneider. (1987). **Calculus and Its Applications**. (4th ed). USA: Prentice Hall International, Inc.

Marvin L. Bittinger. (2004). **Calculus and its Applications.** (8th ed.). Boston: Pearson Educations, Inc.

Monty J. Strauss, Karl J. Smith. and Gerald L. Bradley. (2002). **Calculus**. (3rd ed.). Upper Suddle River, NJ: Pearson Prentic Hall.

Paul A. Foerster. (2005). **Calculus Concepts and Applications**. (2nd ed.). USA: Key Curriculum Press.

John C. Peterson. (1997). **Technical Mathematics with Calculus**. New York: Delmar.

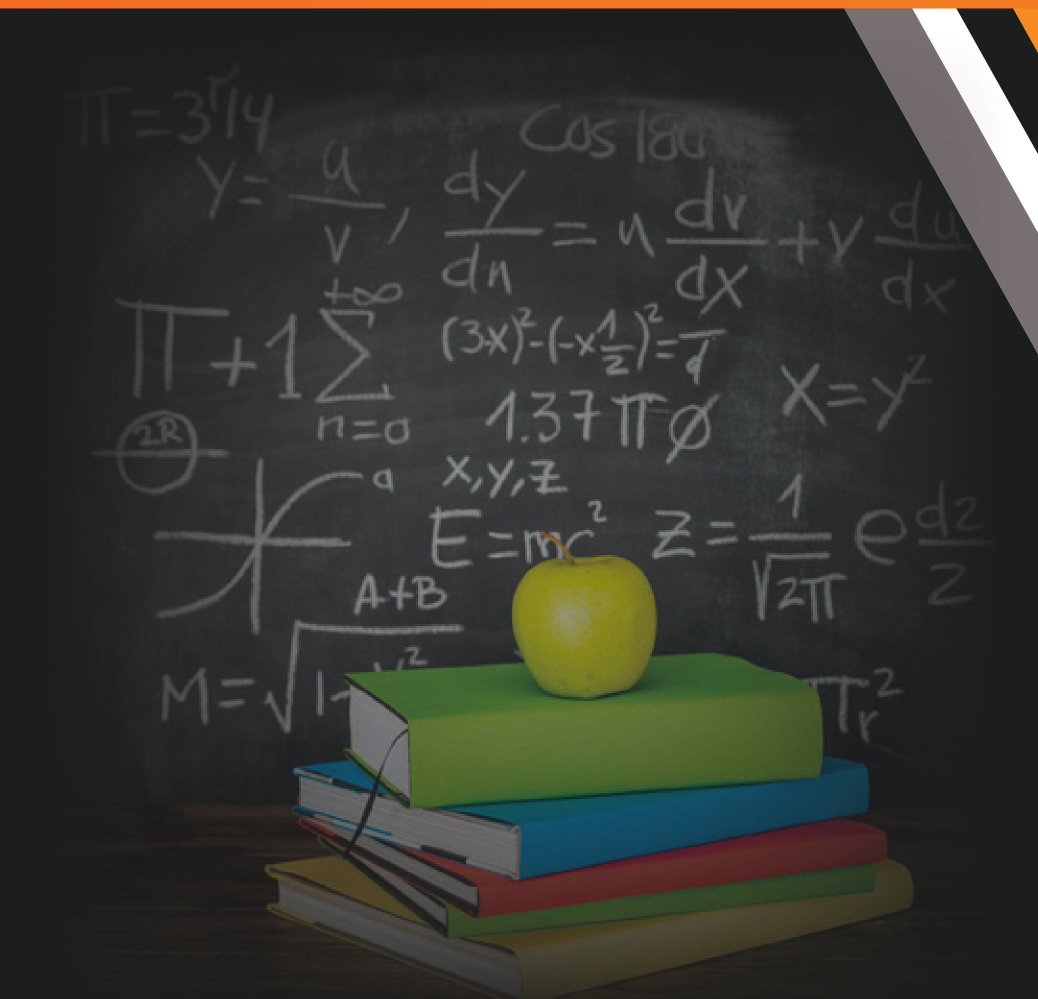
Robert T. Smith and Roland B. Minton. (2002). **Calculus**. (2nd ed.). Boston: McGraw-Hill.

Story of Mathematics., **Calculus**. https://www.storyofmathematics.com. (2564)

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.

ดัชนี

หน้า



ตำราแคลคูลัส 1 (Calculus I) เล่มนี้ใช้ประกอบการเรียนการสอน มุ่งเน้นเพื่อให้นักศึกษาหรือผู้สนใจทั่วไปสามารถนำไปศึกษาให้เกิดความเข้าใจได้ด้วยตนเอง ตั้งแต่ระดับพื้นฐานรวมถึงการใช้โปรแกรม FreeMat เบื้องต้นในการวาดรูปได้

Division of Mathematics, Faculty of Science and Technology

Rajamangala University of Technology Krungthep

2 Nanglinjee Road, Thungmahamek, Sathorn, Bangkok, 10120