สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+12)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ

On the Diophantine Equation $p^x + (p+12)^y = z^2$ where p and $p+12$ are prime numbers

ศิริจันทร์ เวสารัชศาต*, ชานนท์ เอี่ยมรอด, สลิลวสุ เที่ยงธรรม และ อารีวรรณ มุงคุณ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Sirichan Vesarachasart*, Chanon Eiemrawd, Salinwasu Thiengtham and Arreewon Mungkun

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,Thammasat University.

Received: March 13, 2020 ; Revisions: March 20, 2020 ; Accepted: January 18, 2021

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+12)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ จากการศึกษาพบว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลย x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ $p \neq 11$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

Abstract

In this research, we study the Diophantine equation $p^x + (p+12)^y = z^2$ where p and $p+12$ are prime numbers. The result of this study showed that this equation has no positive integer solution x, y and z when $p \neq 11$.

Keywords: Diophantine equation, positive integer solution

1. บทนำ

ในหลายปีที่ผ่านมา การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นหนึ่งในหัวข้อที่มีผู้วิจัยจำนวนมากให้ความสนใจศึกษา ผู้วิจัยส่วนใหญ่ได้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ โดยกำหนด p และ q ให้มีเงื่อนไขแตกต่างกันออกไป

Corresponding author: sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th

ในปี ค.ศ.2007 Acu ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ (x, y, z) เพียงแค่ 2 ผลเฉลย คือ $(3,0,3)$ และ $(2,1,3)$ ต่อมาในปี ค.ศ.2012 Sroysang ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบเพียงผลเฉลยเดียว นั่นคือ $(x, y, z) = (1,0,2)$ จากนั้นปี ค.ศ.2013 เขายังได้ศึกษาเพิ่มเติมว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียง 3 ผลเฉลย ได้แก่ $(x, y, z) = (0,1,2), (3,0,3)$ และ $(4,2,5)$ นอกจากนี้เขายังได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์อื่น ๆ อีกมากมาย แต่เมื่อไม่นานมานี้ในปี ค.ศ.2018 Burshtein ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+4)^y = z^2$ ซึ่งเขาพบว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ $p > 3$ และ $p+4$ เป็นจำนวนเฉพาะ ต่อมาเขายังได้ทำการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+6)^y = z^2$ เมื่อ $p, p+6$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยเขาได้แบ่งการพิจารณาออกเป็น 6 กรณี เขาพบว่ากรณีที่ $x = y = 1$ สมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมด 7 ผลเฉลย ส่วนกรณี $x = 2$ และ $y = 1$ สมการนี้มีเพียงแค่ผลเฉลยเดียว ส่วนกรณีอื่น ๆ สมการนี้จะไม่มีผลเฉลย นอกจากนี้ในปีเดียวกันนี้ Fernando ยังได้แสดงให้เห็นว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+8)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ $p > 3$ และ $p+8$ เป็นจำนวนเฉพาะ

สำหรับในงานวิจัยนี้ เราสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + (p+12)^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยเราได้แสดงให้เห็นว่าสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ยกเว้นกรณีที่ p มีค่าเป็น 11 เท่านั้น

2. วิธีการ

ในการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) เราได้อาศัยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน และทฤษฎีบทที่ได้ทำการพิสูจน์ไว้แล้ว ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 (Sroysang B., 2014) สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 19^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2 ถ้า z เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $z^2 \equiv 0,1,4,9 \pmod{12}$

พิสูจน์ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มบวก จึงได้ว่า $z = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \pmod{12}$ ซึ่งทำให้ $z^2 \equiv 0,1,4,9 \pmod{12}$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.3 ถ้า L เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วสำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ $(12L+1)^k$ สามารถเขียนได้ในรูปของ $12A+1$ เมื่อ A เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายด้วยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ สมมติ $(12L+1)^k = 12A+1$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก A จะได้ว่า

$$(12L+1)^{k+1} = (12L+1)^k (12L+1) = (12A+1)(12L+1) = 12(12AL + A + L) + 1$$

เมื่อ $12AL+A+L$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k จะได้ $(12L+1)^k=12A+1$ เมื่อ A เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทประกอบ 2.4 กำหนดให้ L เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

$$(12L+5)^k=\begin{cases}12A+1 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}\\ 12B+5 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}\end{cases}$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก A และ B

พิสูจน์ แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 1</u> ให้ k เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงให้ $k=2m$ สำหรับ m เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติ $\left(12L+5\right)^{2m}=12A+1$ เมื่อ A เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(12L+5)^{2(m+1)}&=(12L+5)^{2m}(12L+5)^2\\&=(12A+1)(144L^2+120L+25)\\&=12[A(12L+5)^2+12L^2+10L+2]+1\end{aligned}$$

เมื่อ $A(12L+5)^2+12L^2+10L+2$ เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ $k>0$ ใด ๆ $\left(12L+5\right)^k=12A+1$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก A

<u>กรณี 2</u> ให้ k เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงให้ $k=2m+1$ สำหรับ m เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $\left(12L+5\right)^{2m+1}=12B+5$ เมื่อ B เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(12L+5)^{2(m+1)+1}&=(12L+5)^{2m+1}(12L+5)^2\\&=(12B+5)(144L^2+120L+25)\\&=12[B(12L+5)^2+60L^2+50L+10]+5\end{aligned}$$

เมื่อ $B(12L+5)^2+60L^2+50L+10$ เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ $k>0$ ใด ๆ $\left(12L+5\right)^k=12B+5$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก B

ในทำนองเดียวกันอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้เช่นกัน

ทฤษฎีบทประกอบ 2.5 กำหนดให้ L เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

$$(12L+7)^k=\begin{cases}12A+1 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}\\ 12B+7 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}\end{cases}$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก A และ B

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบทประกอบ 2.4

ทฤษฎีบทประกอบ 2.6 กำหนดให้ L เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

$$(12L+11)^k=\begin{cases}12A+1 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}\\ 12B+11 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}\end{cases}$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก A และ B

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบทประกอบ 2.4

3. ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ผลจากการศึกษาเราพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะโดยที่ $p \neq 11$ ในการพิสูจน์เราได้แบ่งกรณีพิจารณาจำนวนเฉพาะ p ออกเป็น 4 กรณีและอาศัยผลที่ได้จากทฤษฎีบท 2.1 และทฤษฎีบทประกอบ 2.2 – 2.6 มาช่วยในการพิสูจน์ด้วย

สำหรับกรณีที่ p เป็น $2,3$ จะได้ $p+12$ เป็น $14,15$ ตามลำดับ ซึ่งทำให้ $p+12$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $p \geq 5$ แล้ว $p \equiv 1,3,5,7,9,11 \pmod{12}$ แต่ในกรณี $p \equiv 3 \pmod{12}$ และ $p \equiv 9 \pmod{12}$ ทำให้ p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เราจึงพิจารณาเพียง 4 กรณีที่เหลือ ได้แก่ $p \equiv 1 \pmod{12}$, $p \equiv 5 \pmod{12}$, $p \equiv 7 \pmod{12}$ และ $p \equiv 11 \pmod{12}$ ซึ่งได้ทำการพิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบท 3.1 – 3.4

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 1 \pmod{12}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สมมติ (x, y, z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ (1) และให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 1 \pmod{12}$ จึงได้ $p = 12M+1$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก M ดังนั้น $p+12 = 12(M+1)+1$ โดยที่ $M+1$ เป็นจำนวนเต็มบวก จากทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จะได้ $p^x = 12A+1$ และ $(p+12)^y = 12B+1$ โดยที่ A และ B เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ว่า

$$z^2 = p^x + (p+12)^y = (12A+1) + (12B+1) = 12(A+B) + 2$$

ดังนั้น $z^2 \equiv 2 \pmod{12}$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สมมติให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $p = 12M+5$ เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ถ้า $M = 0$ แล้ว $p = 5$ และ $p+12 = 17$ สมมติให้ (x, y, z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 17^y = z^2$ เนื่องจาก $z \equiv 0,1,2,3 \pmod{4}$ ได้ว่า $z^2 \equiv 0,1 \pmod{4}$ เพราะว่า $5^x \equiv 1 \pmod{4}$ และ $17^y \equiv 1 \pmod{4}$ ดังนั้น $z^2 = 5^x + 17^y \equiv 2 \pmod{4}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

สมมติ $M > 0$ และ (x, y, z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ (1) เนื่องจาก $p = 12M+5$ จึงได้ $p+12 = 12(M+1)+5$ โดยที่ $M+1$ เป็นจำนวนเต็มบวก แบ่งการพิจารณาออก 4 กรณี ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ อาศัยทฤษฎีบทประกอบ 2.4 จะได้ $p^x = 12A+1$ และ $(p+12)^y = 12B+1$ โดยที่ A, B ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$z^2 = (12A+1)+(12B+1) = 12(A+B)+2$$

นั่นคือ $z^2 \equiv 2(\mathrm{mod}12)$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

<u>กรณี 2</u> สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ อาศัยทฤษฎีบทประกอบ 2.4 จะได้ $p^x = 12A+5$ และ $(p+12)^y = 12B+5$ โดยที่ A,B ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$z^2 = (12A+5)+(12B+5) = 12(A+B)+10$$

นั่นคือ $z^2 \equiv 10(\mathrm{mod}12)$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

<u>กรณี 3</u> สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ อาศัยทฤษฎีบทประกอบ 2.4 จะได้ $p^x = 12A+1$ และ $(p+12)^y = 12B+5$ โดยที่ A,B ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$z^2 = (12A+1)+(12B+5) = 12(A+B)+6$$

นั่นคือ $z^2 \equiv 6(\mathrm{mod}12)$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

<u>กรณี 4</u> สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ ทำนองเดียวกันกับกรณี 3 เราจะได้ $z^2 \equiv 6(\mathrm{mod}12)$ ซึ่งเกิดขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2 เช่นกัน

จากทั้ง 4 กรณี จึงได้ว่าสมการ (1) ไม่มีผลเฉลย สำหรับกรณี p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 5(\mathrm{mod}12)$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 7(\mathrm{mod}12)$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สมมติให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $p = 12M+7$ เมื่อ M เป็นจำนวนเต็มที่ $M \ge 0$ ถ้า $M = 0$ จะได้ $p = 7$ และ $p+12 = 19$ โดยทฤษฎีบท 2.1 ได้พิสูจน์แล้วว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 19^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

สมมติ $M > 0$ และให้ (x,y,z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ (1) เนื่องจาก $p = 12M+7$ จึงได้ว่า $p+12 = 12(M+1)+7$ โดยที่ $M+1$ เป็นจำนวนเต็มบวก อาศัยทฤษฎีบทประกอบ 2.5 เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2 ทำให้ได้ว่า $z^2 \equiv 2,8(\mathrm{mod}12)$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า $p \ne 11$ และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 11(\mathrm{mod}12)$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 11(\mathrm{mod}12)$ จึงได้ว่า $p+12 \equiv 11(\mathrm{mod}12)$ สมมติ (x,y,z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) แบ่งพิจารณา 4 กรณีต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ อาศัยทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $p^x = 12A+1$ และ $(p+12)^y = 12B+1$ โดยที่ A,B ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$z^2 = (12A+1)+(12B+1) = 12(A+B)+2$$

นั่นคือ $z^2 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\, 12\right)$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2

<u>กรณี 2</u> สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ อาศัยทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $p^x = 12A+11$ และ $(p+12)^y = 12B+11$ โดยที่ A, B ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$z^2 = (12A+11)+(12B+11) = 12(A+B+1)+10$$

นั่นคือ $z^2 \equiv 10 \left(\mathrm{mod}\, 12\right)$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 2.2 เช่นกัน

<u>กรณี 3</u> สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2k$ และ $y = 2s+1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k > 0$ และ $s \geq 0$ เมื่อแทนลงใน (1) ทำให้ $z^2 = p^{2k} + (p+12)^{2s+1}$ ดังนั้น

$$(p+12)^{2s+1} = z^2 - p^{2k} = (z-p^k)(z+p^k)$$

ให้ $z + p^k = (p+12)^{\alpha}$ และ $z - p^k = (p+12)^{\beta}$ โดยที่ α, β เป็นจำนวนเต็มที่ $\alpha > \beta \geq 0$ และ $\alpha + \beta = 2s+1$ ทำให้ได้ $2p^k = (p+12)^{\alpha} - (p+12)^{\beta} = (p+12)^{\beta}\left[(p+12)^{\alpha-\beta} - 1\right]$ ถ้า $\beta \neq 0$ แล้ว $(p+12) \mid 2$ หรือ $(p+12) \mid p^k$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\beta = 0$ เราจึงได้

$$2p^k = (p+12)^{\alpha} - 1 = (p+12)^{2s+1} - 1 \qquad (2)$$

จาก (2) ถ้า $s = 0$ แล้ว $2p^k = (p+12) - 1 = p+11$ ถ้า $k = 1$ แล้ว $2p = p+11$ ทำให้ได้ $p = 11$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $k \geq 2$ เราพบว่าค่า p ที่สอดคล้องกับสมการ $2p^k - p - 11 = 0$ คือ ± 1, ± 11, $\pm \dfrac{1}{2}$, $\pm \dfrac{11}{2}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ได้ว่า $s \geq 1$ จาก (2) จะได้

$$2p^k = (p+12)^{2s+1} - 1 = (p+11)\left[(p+12)^{2s} + (p+12)^{2s-1} + \cdots + (p+12)^1 + 1\right] \qquad (3)$$

จาก (3) จะได้ว่า $(p+11) \Big| 2p^k$ และจาก $p+11$ เป็นจำนวนเต็มคู่ เราจึงได้ $p+11 = 2p^j$ โดยที่ j เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq j < k$ ถ้า $j = 0$ แล้ว $p = -9$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง จึงให้ $0 < j < k$ ทำให้ได้ว่าค่าของ p ที่สอดคล้องสมการ $2p^j - p - 11 = 0$ ได้แก่ ± 1, $\pm 11, \pm \dfrac{1}{2}, \pm \dfrac{11}{2}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

<u>กรณี 4</u> สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $x = 2m+1$ และ $y = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ $n > 0$ แทนลงใน (1) ทำให้ได้ $z^2 = p^{2m+1} + (p+12)^{2n}$ ดังนั้น

$$p^{2m+1} = z^2 - (p+12)^{2n} = \left[z - (p+12)^n\right]\left[z + (p+12)^n\right]$$

ให้ $z - (p+12)^n = p^{\beta}$ และ $z + (p+12)^n = p^{\alpha}$ โดยที่ α, β เป็นจำนวนเต็มที่ $\alpha > \beta \geq 0$ และ $\alpha + \beta = 2m+1$ เราจึงได้

$$2(p+12)^n = p^{\alpha} - p^{\beta} = p^{\beta}(p^{\alpha-\beta} - 1) \qquad (4)$$

ถ้า $\beta \neq 0$ แล้ว $p \mid 2$ หรือ $p \mid (p+12)^s$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\beta = 0$ จาก (4) ทำให้

$$2(p+12)^n = p^{\alpha} - 1 = p^{2m+1} - 1 \qquad (5)$$

แบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณีย่อย ดังนี้

กรณี 4.1 ถ้า $m = 0$ จาก (5) จะได้ $2(p+12)^n = p-1$ ถ้า $n = 1$ แล้ว $2(p+12) = p-1$ จะได้ $p = -25$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $n \geq 2$ ทำให้ได้ว่าค่าของ $p+12$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$2(p+12)^n-(p+12)+13=0$ ได้แก่ ± 1 , ± 13 , $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{13}{2}$ แต่เนื่องจาก $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ $p+12=13$ ทำให้ $p=1$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 4.2 ถ้า $m\geq 1$ จาก (5) จะได้

$$2(p+12)^n = p^{2m+1}-1=(p-1)[p^{2m}+p^{2m-1}+...+p^1+1] \qquad (6)$$

จาก (6) ได้ว่า $(p-1)\mid 2(p+12)^n$ และเนื่องจาก $p-1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงทำให้ $p-1=2(p+12)^j$ โดยที่ j เป็นจำนวนเต็มที่ $0\leq j<n$ ถ้า $j=0$ และจาก $p-1=2(p+12)^j$ จะทำให้ $p=3$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ $0<j<n$ เนื่องจาก $p-1=2(p+12)^j$ เราได้ว่า $2(p+12)^j-(p+12)+13=0$ ถ้า $j=1$ แล้ว $2(p+12)-(p+12)+13=0$ ซึ่งทำให้ $p=-25$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $j\geq 2$ ทำให้ค่าของ $p+12$ ที่สอดคล้องกับสมการ $2(p+12)^j-(p+12)+13=0$ ได้แก่ ± 1 , ± 13 ,$\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{13}{2}$ แต่เนื่องจาก $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ ทำให้ $p+12=13$ นั่นคือ $p=1$ จึงเกิดข้อขัดแย้งเช่นกัน

จากทั้ง 4 กรณีจึงสรุปว่า สมการ (1) ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ผลจากทฤษฎีบท 3.1 – 3.4 ทำให้สามารถสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x+(p+12)^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะโดยที่ $p\neq 11$ ซึ่งผลที่ได้จากทฤษฎีบทข้างต้นทำให้ได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.5 สมการไดโอแฟนไทน์ $61^x+73^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 3.1

บทแทรก 3.6 สมการไดโอแฟนไทน์ $5^x+17^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 3.2

บทแทรก 3.7 สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x+19^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 3.3

บทแทรก 3.8 สมการไดโอแฟนไทน์ $167^x+179^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลย x,y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 3.4

สำหรับกรณี $p=11$ จะได้ $p+12=23$ เราพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+23^y=z^2$ มี $(x,y,z)=(2,1,12)$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้

4.สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x+(p+12)^y=z^2$ เมื่อ p และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลย (x,y,z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ยกเว้นกรณีที่ $p=11$

5. References

D.Acu, 2007, On a Diophantine equation $2^x+5^y=z^2$, Gen. Math., 15 : 145-148.

B. Sroysang, 2012, On the Diophantine equation $3^x+5^y=z^2$, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 81 : 605-608.

B. Sroysang, 2013, More on the Diophantine equation $2^x+3^y=z^2$, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84 : 133-137.

Sroysang B., 2014, On two Diophantine equations $7^x+19^y=z^2$ and $7^x+91^y=z^2$, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 92(1): 113-116.

N.Burshtein, 2018, All the solutions of the Diophantine Equation $p^x+(p+4)^y=z^2$ when $p>3$, $p+4$ are Primes and $x+y=2,3,4$, Annals of Pure and Applied Mathematics, 16(1) : 241-244.

N.Burshtein, 2018, Solutions of the Diophantine Equation $p^x+(p+6)^y=z^2$ when p, $p+6$ are Primes and $x+y=2,3,4$, Annals of Pure and Applied Mathematics, 17(1) : 101-106.

Fernando Neres de Oliveira, 2018, On the Solvability of the Diophantine Equation $p^x+(p+8)^y=z^2$ when $p>3$ and $p+8$ are Primes, Annals of Pure and Applied Mathematics, 18(1) : 9-13.