

แผนภูมิควบคุมตัวแปรเชิงพหุสำหรับกระบวนการผลิตที่มีหลายตัวแปร และการประยุกต์ใช้

วิโรจน์ ตันติภัทร*

สถาบันการจัดการปัญญาภิวัฒน์ ถ.แจ้งวัฒนะ ต.บางตลาด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120

* Corresponding Author: virojanat@gmail.com

อาจารย์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี

ข้อมูลบทความ

บทคัดย่อ

ประวัติบทความ :

รับเพื่อพิจารณา : 9 พฤษภาคม 2566

แก้ไข : 11 ตุลาคม 2566

ตอบรับ : 20 ตุลาคม 2566

DOI: 10.14456/kmuttrd.2023.20

คำสำคัญ : คุณลักษณะทางคุณภาพ /

ข้อมูลแบบหลายตัวแปร /

แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปร /

แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเดียว /

สัญญาณออกนอกการควบคุม /

สัญญาณเตือนผิดพลาด

โดยปกติแล้วคุณภาพของผลิตภัณฑ์แต่ละหน่วยที่ผลิตจากกระบวนการผลิตใดก็ตาม จะมีมากกว่าหนึ่งคุณลักษณะ ดังนั้น วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลแบบหลายตัวแปรจึงเหมาะสมสำหรับข้อมูลประเภทนี้ อย่างไรก็ตาม กลับไม่พบเห็นว่ามีการใช้วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลแบบหลายตัวแปรโดยทั่วไปในสภาพแวดล้อมทางอุตสาหกรรม ยกตัวอย่างเช่น การใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปรเพื่อวิเคราะห์สถานะของกระบวนการผลิต แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณที่ค่อนข้างซับซ้อนจึงเป็นอุปสรรคต่อผู้ปฏิบัติงานที่มักจะชอบวิธีการแบบตัวแปรเดียวที่ง่ายกว่า แม้ว่าจะมีประสิทธิภาพน้อยกว่าก็ตาม บทความนี้มีจุดประสงค์ที่จะแสดงการทดลองประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปร โดยอาศัยกรณีศึกษา พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเดียวกับกรณีศึกษาเดียวกัน ผลจากการเปรียบเทียบ พบว่า การใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปรกับกระบวนการผลิตที่มีหลายตัวแปรจะให้ผลการวิเคราะห์สถานะของกระบวนการผลิตได้ถูกต้องมากกว่าการใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเดียว นอกจากนี้ ยังได้แสดงวิธีการวิเคราะห์เพื่อระบุว่าตัวแปรใดบ้างที่มีส่วนทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุมบนแผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปร

Multivariate Control Charts for Manufacturing Processes with Multivariate Data and Their Applications

Virojana Tantibadaro*

Punyapiwat Institute of Management, Chaengwattana, Bang-Talat, Pakkred, Nonthaburi 11120

* Corresponding Author: virojanat@gmail.com

Lecturer, Faculty of Engineering and Technology.

Article Info

Article History:

Received: May 9, 2023

Revised: October 11, 2023

Accepted: October 20, 2023

DOI: 10.14456/kmuttrd.2023.20

Keywords : Quality Characteristics / Multivariate Data / Multivariate Control Charts / Univariate Control Charts / Out-Of-Control Signal / False Alarm

Abstract

Quality of individual units of a product from any given production process usually consists of more than one characteristics, which are considered to be a set of multivariate data in nature. Multivariate data analysis therefore seems to be more appropriate for this type of data. However, its use is not common in industrial settings. For example, implementation of multivariate control charts to analyze the status of a production process involves relatively complex computations, thus creating a barrier to practitioners who normally prefer simpler univariate control charts even when the latter is less efficient. This article aimed to present an experimental implementation of multivariate control charts by relying on case studies for illustrating the tools and to compare the results of using univariate control charts in the same case studies. The results of the comparison revealed that the use of multivariate control charts for multivariate processes provided a more accurate analysis of the state of the processes than using univariate control charts. In addition, a practical method to determine which of the monitored variables exhibited responsibility for out-of-control signals on the multivariate control charts is presented.

1. บทนำ

ทุกวันนี้ความต้องการของตลาดเกิดการเปลี่ยนแปลงขึ้นอย่างรวดเร็วท่ามกลางการแข่งขันที่รุนแรงมากกว่าในอดีตที่ผ่านมา ส่งผลให้ผู้ประกอบการในภาคอุตสาหกรรมการผลิตต้องปรับปรุงและควบคุมระบบการผลิตของตนให้ได้สินค้าที่มีคุณภาพสามารถตอบสนองต่อปริมาณความต้องการของตลาดที่มีความผันผวนได้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัดทรัพยากรที่ต้องใช้เพื่อให้ได้มาซึ่งความได้เปรียบในการแข่งขันเชิงธุรกิจอย่างยั่งยืน สถานการณ์การแข่งขันที่รุนแรงดังกล่าวทำให้คุณภาพกลายเป็นหนึ่งในหลายปัจจัยที่สำคัญสำหรับผู้ประกอบการเพื่อให้สินค้าของตนสามารถแข่งขันได้มากขึ้นในตลาดโลก อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าจะออกแบบสินค้ามาดีเพียงใด สินค้าแต่ละชิ้นที่ผลิตได้ย่อมมีความแตกต่างกัน (variability) ในระดับหนึ่งเสมอ กล่าวคือ ในทางปฏิบัติจะพบว่าไม่มีสินค้าสองชิ้นที่ผลิตออกมาแล้วจะเหมือนกันทุกประการ เพื่อให้แน่ใจว่าสินค้าเป็นไปตามข้อกำหนดที่ได้ออกแบบไว้ล่วงหน้า ผู้ผลิตจำเป็นต้องดำเนินกิจกรรมที่รู้จักกันดีที่เรียกว่าการควบคุมคุณภาพ (quality control) หรือกิจกรรม QC

หนึ่งในเครื่องมือหลักที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในกิจกรรม QC คือ แผนภูมิควบคุมลักษณะทางคุณภาพที่เป็นค่าต่อเนื่อง (variables control charts) เช่น แผนภูมิ R สำหรับควบคุมค่าพิสัย แผนภูมิ \bar{x} สำหรับควบคุมค่าเฉลี่ย และแผนภูมิ S สำหรับควบคุมค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็นต้น โดยแผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการควบคุมคุณภาพจะต้องใช้ควบคุมทั้งค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนไปพร้อมกัน ดังนั้นในทางปฏิบัติจะมีการใช้แผนภูมิ \bar{x} ร่วมกับแผนภูมิ R หรือใช้แผนภูมิ \bar{x} ร่วมกับแผนภูมิ S เสมอ อย่างไรก็ตามแผนภูมิควบคุมดังกล่าวข้างต้นใช้ในการตรวจติดตามและควบคุมกระบวนการที่พิจารณาเพียงคุณลักษณะทางคุณภาพเดียวเท่านั้น แต่ในทางปฏิบัติการตรวจติดตามและควบคุมกระบวนการส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับหลายคุณลักษณะทางคุณภาพซึ่งจำเป็นต้องทำการตรวจติดตามและควบคุมทุกคุณลักษณะพร้อมกัน เนื่องจากในสถานการณ์จริงจะพบเสมอว่าคุณลักษณะทางคุณภาพต่างๆ ที่กำลังตรวจติดตามและควบคุมอยู่นั้นไม่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นหากใช้แผนภูมิควบคุมที่ละคุณลักษณะทางคุณภาพแยกออกจากกันอาจทำให้ผลสรุปที่ได้เกี่ยวกับสถานะของกระบวนการผลิตคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อจำนวนตัวแปรเพิ่มมากขึ้น [1]

บทความนี้มีเป้าหมายที่จะเสนอแนวทางการประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปรหรือแผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุ (multivariate control charts) โดยจะเริ่มต้นด้วยการอธิบายโดยสังเขปเกี่ยวกับแผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุ จากนั้นจะยกตัวอย่างกรณีศึกษาเพื่อแสดงวิธีการประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุมเชิงพหุ พร้อมทั้งวิธีการวิเคราะห์สัญญาณบ่งชี้การออกนอกการควบคุม (out-of-control signal) เพื่อระบุว่าตัวแปรใดบ้างที่กำลังถูกตรวจติดตามและควบคุมอยู่นั้นเป็นตัวแปรที่ทำให้เกิดสัญญาณบ่งชี้การออกนอกการควบคุม และปิดท้ายด้วยบทสรุปและข้อเสนอแนะ

2. ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุ (Multivariate Control Charts)

การควบคุมคุณภาพสำหรับตัวแปรเชิงพหุ (multivariate quality control) เป็นเทคนิคการตรวจติดตามกระบวนการผลิตประเภทหนึ่งสำหรับสินค้าที่ผลิตออกมามีหลายคุณลักษณะเชิงคุณภาพ (multi-quality characteristics) ที่เกี่ยวข้องหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า สินค้ามีตัวแปรที่ใช้แสดงคุณลักษณะเชิงคุณภาพหลายตัวแปร ยกตัวอย่างเช่น การตรวจติดตามและควบคุมความกว้าง ความยาว และความหนาของแผ่นอลูมิเนียมที่ใช้ในการปั๊มขึ้นรูปเป็นชิ้นส่วนประกอบ ความกว้าง ความยาว และความหนาของแผ่นอลูมิเนียมจำเป็นต้องถูกควบคุมไปพร้อมกัน หากใช้แผนภูมิสำหรับตัวแปรเดียวควบคุมทีละตัวแปรอาจทำให้ได้ชิ้นงานอลูมิเนียมเกิดปัญหาค่าความคลาดเคลื่อนสะสม (tolerance stack-up) กับชิ้นงานประกอบอื่น

แม้ว่าการควบคุมคุณภาพสำหรับตัวแปรเชิงพหุจะมีความซับซ้อนมากกว่าการควบคุมคุณภาพตัวแปรเดียว แต่การควบคุมคุณภาพสำหรับตัวแปรเชิงพหุจะมีความเหมาะสมมากกว่าเพราะเป็นการพิจารณากระบวนการซึ่งมักจะมีย้อมที่ประกอบด้วยตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวและอาจมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระดับหนึ่ง ผู้บุกเบิกงานในเรื่องการควบคุมคุณภาพสำหรับตัวแปรเชิงพหุคือ Hotelling [2] ความคิดริเริ่มของเขาได้วางรากฐานในเรื่องของหลักการประยุกต์ใช้งานและปูทางให้นักวิจัยคนอื่นๆ ดำเนินการวิจัยเพิ่มเติมเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุในอุตสาหกรรมต่าง ๆ เช่น การใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุร่วมกับเทคนิคฟูเรียร์ทรานส์

ฟอร์มอินฟราเรดสเปกโตรสโคปีเพื่อตรวจจับกระบวนการเกิดออกซิเดชันของน้ำมันถั่วเหลือง [3] การใช้แผนภูมิควบคุมตัวแปรเชิงพหุในงานบำบัดน้ำเสีย [4] นอกจากนี้ยังมีการพัฒนาแผนภูมิควบคุมชนิดใหม่สำหรับตัวแปรเชิงพหุซึ่งมีข้อมูลหรือสถานการณ์ที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้เบื้องต้น เช่น แผนภูมิควบคุมสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงไม่ปกติหลายตัวแปร [5] แผนภูมิควบคุมชนิดใหม่สำหรับตัวแปรเชิงพหุซึ่งมีข้อมูลแบบอัตโนมัติสัมพันธ์ (autocorrelated data) [6-7] เป็นต้น

2.2 แผนภูมิควบคุม Hotelling T²

แผนภูมิ Hotelling T² เป็นแผนภูมิควบคุมตัวแปรเชิงพหุสำหรับตรวจติดตามค่าเฉลี่ยของกระบวนการ โดยมีข้อสมมติเบื้องต้น (assumption) ว่ามีจำนวนคุณลักษณะทางคุณภาพหรือจำนวนตัวแปร *p* ตัวซึ่งมีการแจกแจงอิสระต่อกันและมีการแจกแจงปกติ (*p*-variate normal distribution) ด้วยค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนแทนด้วยเวกเตอร์ **μ** ขนาด *p* × 1 และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม **Σ** ขนาด *p* × *p* ตามลำดับ ขนาดกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มจากกระบวนการเท่ากับ *n* ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ *i* แทนด้วยเวกเตอร์ \bar{X}_i

$$\bar{X}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_{i1} \\ \bar{x}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{ip} \end{bmatrix} \quad (1)$$

โดย *i* = 1, 2, 3, ..., *n* และในการศึกษานี้จะพิจารณาเฉพาะกรณี *n* > 1 เท่านั้น

สมมติว่ามีกลุ่มตัวอย่างจำนวน *m* กลุ่ม ดังนั้นค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างคำนวณจากสมการ (2) และสมการ (3) ตามลำดับ

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad (2)$$

$$s_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad (3)$$

โดย *x_{ijk}* เป็นตัวแปรที่ *j* ในกลุ่มตัวอย่างที่ *k* ของข้อมูล (observation) ที่ *i* ซึ่งเก็บได้จากกระบวนการ โดยที่ *j* = 1, 2, ..., *p* และ *k* = 1, 2, ..., *m*

ในส่วนของค่าความแปรปรวนร่วม (covariance) ระหว่างตัวแปรที่ *j* กับตัวแปรที่ *h* ในกลุ่มตัวอย่างที่ *k* คำนวณจากสมการ (4)

$$s_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad , j \neq h \quad (4)$$

ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของตัวแปรที่ *j* คำนวณจากสมการ (5) และสมการ (6) ตามลำดับ

$$\bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad (5)$$

$$s_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_{jk}^2 \quad (6)$$

ค่าความแปรปรวนร่วมโดยเฉลี่ยระหว่างตัวแปรที่ *j* กับตัวแปรที่ *h* คำนวณจากสมการ (7)

$$\bar{s}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_{jhk} \quad , j \neq h \quad (7)$$

ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างสามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

ค่าเฉลี่ยของค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างสามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11}^2 & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22}^2 & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp}^2 \end{bmatrix}$$

ค่าสถิติที่จะนำไปพล็อตลงในแผนภูมิควบคุมคือค่า Hotelling T² ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (8)

$$T_k^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}) \quad (8)$$

สำหรับในส่วนของขีดจำกัดควบคุม (Control Limits) ของแผนภูมิควบคุมสามารถจำแนกออกเป็นสองระยะ (phase) กล่าวคือ ขีดจำกัดควบคุมในระยะที่ 1 (Phase I) เป็นขีดจำกัดควบคุมสำหรับคัดกรองกลุ่มตัวอย่างชุดแรก (preliminary samples) ที่เก็บรวบรวมได้ให้เหลือเพียงกลุ่มตัวอย่างเมื่อกระบวนการอยู่ในการควบคุมเชิงสถิติ (in statistical control) เพื่อใช้สำหรับคำนวณหาขีดจำกัดควบคุมในระยะที่ 2 (Phase II) ซึ่งเป็นขีดจำกัดควบคุมสำหรับใช้ตรวจติดตามกระบวนการในอนาคต โดยขีดจำกัดควบคุมบน (Upper Control Limit: UCL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (Lower Control Limit: LCL) ในระยะที่ 1 ของแผนภูมิ Hotelling T² คำนวณจากสมการ (9) และสมการ (10) ตามลำดับ

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (9)$$

$$LCL = 0 \quad (10)$$

โดย $F_{\alpha,p,mn-m-p+1}$ เป็นค่าที่เปิดจากตารางการแจกแจง F ที่มีค่าความน่าจะเป็นของความเสียหายในการตัดสินใจผิดพลาดของผู้ผลิตคือ α และมีค่าระดับความเป็นอิสระ (degrees of freedom) คือ p และ $mn-m-p+1$ ขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (LCL) ในระยะที่ 2 ของแผนภูมิ Hotelling T^2 คำนวณจากสมการ (11) และสมการ (12) ตามลำดับ

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (11)$$

$$LCL = 0 \quad (12)$$

ในกรณีที่ทราบค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวน Σ ของกระบวนการหรือค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวหาได้จากกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดจำนวนมากเราสามารถใส่ค่า $\chi^2_{\alpha,p}$ เป็นขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) ได้ทั้งในระยะที่ 1 และระยะที่ 2

2.3 แผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไป (Generalized Variance Chart)

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่าแผนภูมิควบคุมจะต้องใช้ควบคุมทั้งค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนไปพร้อมกัน สำหรับในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการตรวจติดตามค่าความแปรปรวนของกระบวนการด้วยแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไป (generalized variance chart) ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นโดย Alt [8]

ค่าสถิติที่จะนำไปพล็อตลงในแผนภูมิควบคุมคือค่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่าง $|S_p|$ และพารามิเตอร์ที่สำคัญที่ใช้ในการหาค่าขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไป ได้แก่ ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ค่าเฉลี่ยของความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่างซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $|S|$ และค่าพารามิเตอร์ b_1 และ b_2 โดยคำนวณจากสมการ (13) และสมการ (14) ตามลำดับ

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i) \quad (13)$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) [\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j)] \quad (14)$$

โดย p เป็นจำนวนคุณลักษณะทางคุณภาพหรือจำนวนตัวแปร และ n เป็นขนาดกลุ่มตัวอย่าง ค่าขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปคำนวณจากสมการ (15) - (17)

$$UCL = \frac{|S|}{b_1} (b_1 + 3b_2^{1/2}) \quad (15)$$

$$CL = |S| \quad (16)$$

$$LCL = \frac{|S|}{b_1} (b_1 - 3b_2^{1/2}) \quad (17)$$

ในกรณีที่ผลการคำนวณค่าขีดจำกัดควบคุมล่าง (LCL) มีค่าเป็นลบจะต้องปรับค่า LCL ให้เป็นศูนย์ก่อนเสมอเนื่องจากค่า $|S|$ มีค่าไม่เป็นลบ (non-negative) และในกรณีที่เรารู้ค่าความแปรปรวน Σ ของกระบวนการค่าขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปคำนวณจากสมการ (18) - (20)

$$UCL = |\Sigma| (b_1 + 3b_2^{1/2}) \quad (18)$$

$$CL = b_1 |\Sigma| \quad (19)$$

$$LCL = |\Sigma| (b_1 - 3b_2^{1/2}) \quad (20)$$

3. กรณีศึกษา

ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีการประยุกต์ใช้แผนภูมิ Hotelling T^2 และแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปโดยใช้ข้อมูลจากโรงงานอุตสาหกรรมการผลิต 2 ประเภทเป็นตัวอย่างกรณีศึกษา สำหรับในงานวิจัยนี้จะใช้ชื่อสมมติของโรงงานกรณีศึกษาเพื่อรักษาความลับทางการค้าและการพัฒนาทางธุรกิจ ในอนาคตของบริษัททั้งสองแห่ง

3.1 กรณีศึกษาที่ 1

กรณีศึกษาแรกคือบริษัท MedTek เป็นผู้ผลิตวัสดุและกลุ่มครุภัณฑ์ทางการแพทย์ ข้อมูลที่ใช้ในกรณีศึกษานี้ได้จากกระบวนการผลิตเส้นใยโพลีเอสเตอร์ชนิดหนึ่งที่ใช้ในงานศัลยกรรมเย็บแผลซึ่งคุณลักษณะทางคุณภาพที่สำคัญของเส้นใยโพลีเอสเตอร์คือ คุณสมบัติความทนต่อแรงดึง โดยเส้นใยโพลีเอสเตอร์ที่มีคุณภาพจะต้องสามารถยืดแผลให้ติดกันได้เป็นอย่างดีและต้องมีความยืดหยุ่นที่เหมาะสมเพื่อความสะดวกในการเย็บแผล โดยคุณลักษณะทางคุณภาพของเส้นใยโพลีเอสเตอร์วัดได้จาก 2 ตัวแปรคือ

x_1 = ค่าความทนต่อแรงดึง (kgf) ของเส้นใยโพลีเมอร์
 และ x_2 = ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (mm) ของเส้นใยโพลีเมอร์

ซึ่งทั้ง 2 ตัวแปรจะต้องทำการควบคุมไปพร้อมกัน โดยกลุ่มตัวอย่างเส้นใยโพลีเมอร์ที่ได้จากกระบวนการผลิตถูกสุ่มออกมาทดสอบมีจำนวน 25 กลุ่ม แต่ละกลุ่มตัวอย่างมีขนาด 4 เส้น ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าความทนต่อแรงดึงและขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นใยโพลีเมอร์

กลุ่มตัวอย่าง	ค่าความทนต่อแรงดึง (kgf)				ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (mm)			
1	1.76	1.72	1.83	1.75	0.25	0.28	0.16	0.26
2	1.76	1.81	1.78	1.76	0.24	0.18	0.22	0.24
3	1.67	1.69	1.81	1.69	0.33	0.31	0.19	0.32
4	1.75	1.78	1.75	1.78	0.25	0.23	0.25	0.22
5	1.77	1.73	1.75	1.71	0.23	0.27	0.26	0.29
6	1.75	1.80	1.75	1.73	0.25	0.19	0.25	0.28
7	1.76	1.75	1.72	1.83	0.24	0.25	0.28	0.16
8	1.75	1.76	1.81	1.78	0.26	0.24	0.19	0.22
9	1.76	1.68	1.69	1.81	0.24	0.33	0.31	0.19
10	1.69	1.75	1.77	1.75	0.32	0.25	0.23	0.25
11	1.77	1.77	1.73	1.74	0.22	0.23	0.27	0.27
12	1.73	1.75	1.80	1.75	0.27	0.25	0.19	0.25
13	1.73	1.75	1.74	1.75	0.28	0.24	0.26	0.25
14	1.78	1.76	1.79	1.81	0.22	0.24	0.21	0.20
15	1.81	1.80	1.79	1.85	0.20	0.20	0.19	0.14
16	1.73	1.76	1.79	1.75	0.27	0.24	0.26	0.25
17	1.82	1.77	1.78	1.76	0.17	0.23	0.22	0.24
18	1.76	1.79	1.78	1.78	0.24	0.20	0.23	0.23
19	1.76	1.74	1.74	1.79	0.25	0.26	0.26	0.20
20	1.77	1.80	1.80	1.77	0.23	0.19	0.20	0.23
21	1.73	1.79	1.76	1.78	0.27	0.20	0.24	0.22
22	1.74	1.80	1.77	1.76	0.26	0.20	0.23	0.25
23	1.74	1.73	1.77	1.81	0.26	0.28	0.23	0.19
24	1.79	1.80	1.71	1.78	0.21	0.20	0.30	0.21
25	1.75	1.77	1.74	1.79	0.25	0.22	0.26	0.21

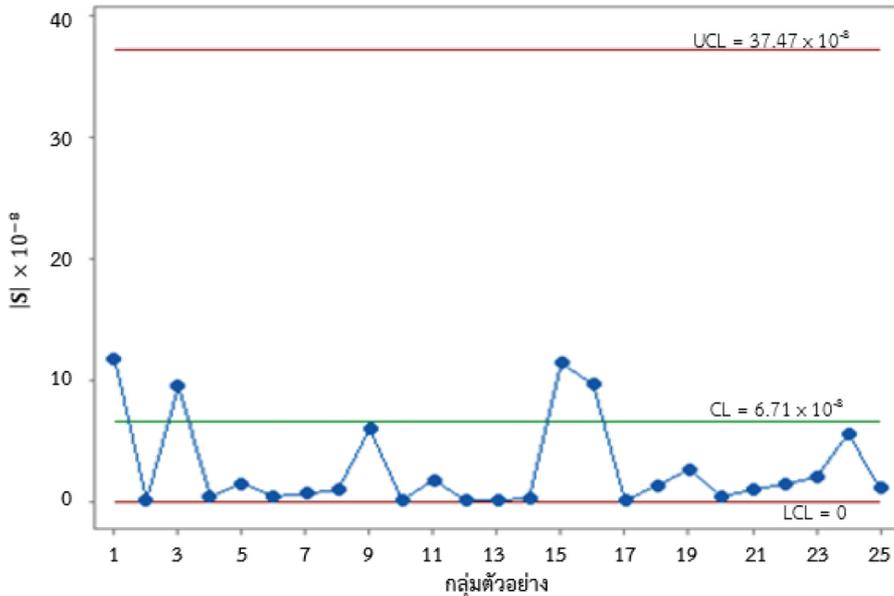
เมื่อนำข้อมูลในตารางที่ 1 มาคำนวณหาค่าเฉลี่ย ค่า และ $|S_k|$ ของแต่ละกลุ่มตัวอย่างเพื่อใช้ในการสร้างแผนภูมิ ความแปรปรวน และค่าความแปรปรวนร่วม รวมทั้งค่า T_k^2 ควบคุมระยะที่ 1 ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ผลการคำนวณค่าสถิติจากการใช้ข้อมูลในตารางที่ 1

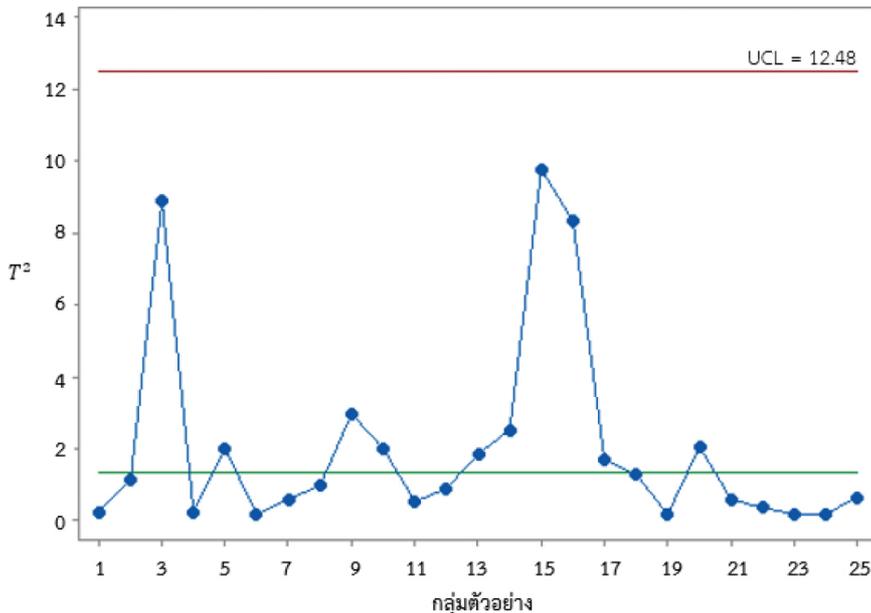
กลุ่มตัวอย่าง k	ค่าเฉลี่ย		ค่าความแปรปรวน และค่าความแปรปรวนร่วม			ค่าสถิติ บนแผนภูมิควบคุม	
	ความทนต่อแรงดึง (\bar{X}_{1k})	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (\bar{X}_{2k})	S_{1k}^2 (10^{-4})	S_{2k}^2 (10^{-4})	S_{12k} (10^{-4})	T_k^2	$ S_k $ (10^{-8})
1	1.767	0.233	21.70	28.48	-24.59	0.25	11.83
2	1.778	0.220	5.58	8.00	-6.67	1.13	0.22
3	1.715	0.288	41.00	42.90	-41.83	8.88	9.56
4	1.765	0.238	3.00	2.25	-2.50	0.25	0.50
5	1.740	0.263	6.67	6.25	-6.33	2.01	1.56
6	1.758	0.243	8.92	14.25	-11.25	0.18	0.50
7	1.765	0.233	21.67	26.25	-23.83	0.60	0.72
8	1.775	0.228	7.00	8.92	-7.83	0.98	1.06
9	1.735	0.268	37.67	41.58	-39.50	2.98	6.06
10	1.740	0.263	12.00	15.58	-13.67	2.01	0.22
11	1.753	0.248	4.25	6.92	-5.25	0.53	1.83
12	1.758	0.240	8.92	12.00	-10.33	0.90	0.22
13	1.743	0.258	0.92	2.92	-1.58	1.85	0.17
14	1.785	0.218	4.33	2.92	-3.50	2.53	0.39
15	1.813	0.183	6.92	8.25	-6.75	9.78	11.50
16	1.758	0.255	6.25	1.67	-0.83	8.32	9.72
17	1.783	0.215	6.92	9.67	-8.17	1.70	0.17
18	1.778	0.225	1.58	3.00	-1.83	1.29	1.39
19	1.758	0.243	5.58	8.25	-6.58	0.18	2.72
20	1.785	0.213	3.00	4.25	-3.50	2.06	0.50
21	1.765	0.233	7.00	8.92	-7.83	0.06	1.06
22	1.768	0.235	6.25	7.00	-6.50	0.36	1.50
23	1.763	0.240	12.92	15.33	-14.00	0.20	2.06
24	1.770	0.230	16.67	22.00	-19.00	0.20	5.67
25	1.763	0.235	4.92	5.67	-5.17	0.65	1.17

จากข้อมูลในตารางที่ 2 คำนวณได้ค่าเฉลี่ย $\bar{x}_1 = 1.763$ $\bar{x}_2 = 0.238$ $\bar{s}_1^2 = 0.00104648$ $\bar{s}_2^2 = 0.00125293$ และ $\bar{s}_{12} = -0.00111537$ เมื่อนำค่า $|S_i|$ และ T_k^2 มาพล็อตลงในแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปและแผนภูมิควบคุม Hotelling T^2 จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยขีดจำกัด

ควบคุมของแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปคำนวณจากสมการ (15) – (17) และขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) ของแผนภูมิ T^2 ที่ค่าความน่าจะเป็นของความเสี่ยงในการตัดสินใจผิดพลาดของผู้ผลิตคือ $\alpha = 0.0027$ คำนวณจากสมการ (9)



(ก) แผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไป

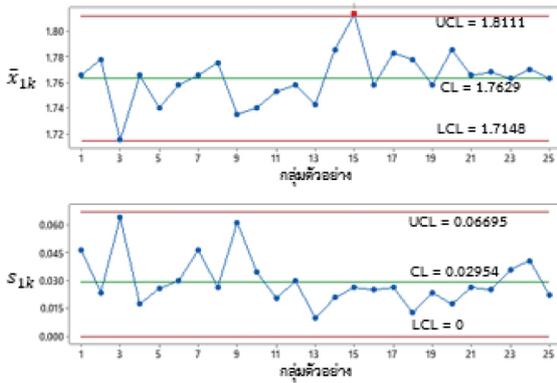


(ข) แผนภูมิควบคุม Hotelling T^2

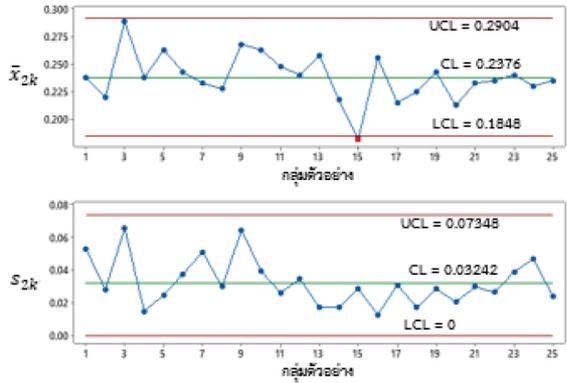
รูปที่ 1 แผนภูมิควบคุมตัวแปรเชิงพหุสำหรับกรณีศึกษาที่ 1 โดย (ก) เป็นแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปและ (ข) เป็นแผนภูมิควบคุม Hotelling T^2

จากรูปที่ 1 จะเห็นว่ากระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมเชิงสถิติ แต่เมื่อลองนำค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบน

มาตรฐานของแต่ละตัวแปรในตารางที่ 2 มาแยกพล็อตลงในแผนภูมิ \bar{x} และแผนภูมิ S ผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2

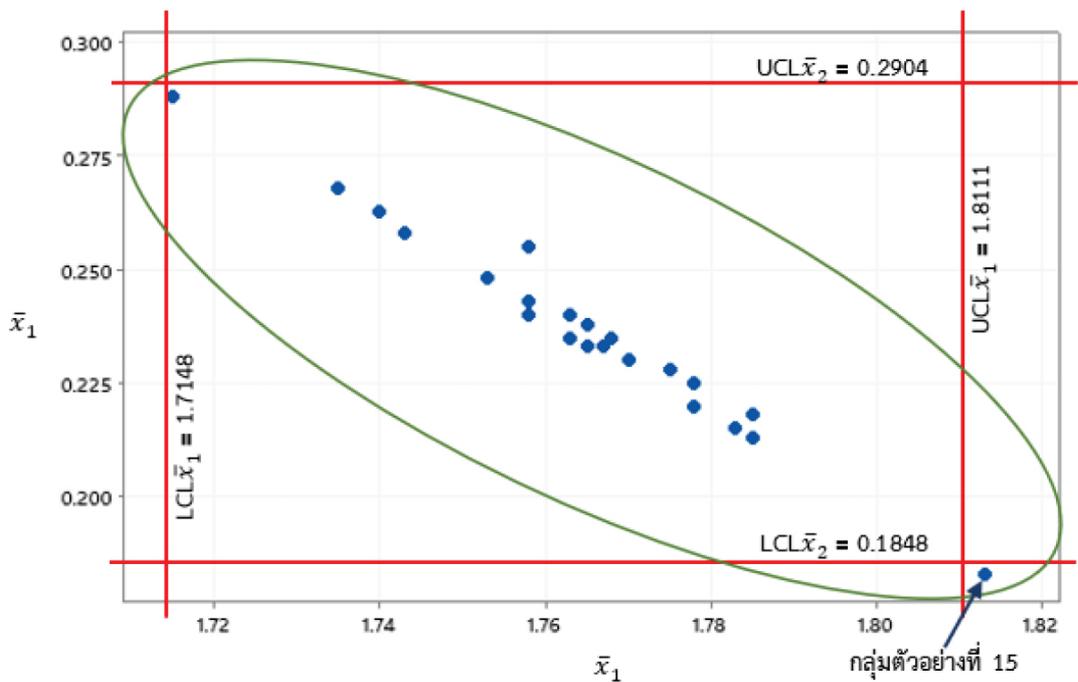


(ก) แผนภูมิควบคุมสำหรับความทนต่อแรงดึง



(ข) แผนภูมิควบคุมสำหรับขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง

รูปที่ 2 แผนภูมิควบคุม \bar{x} และแผนภูมิ S ของค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแต่ละตัวแปรในตารางที่ 2



รูปที่ 3 เส้นพิกัดควบคุมรูปวงรี (control ellipse) ของแผนภูมิ T^2 สำหรับกรณีศึกษาที่ 1

จากรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่าแผนภูมิควบคุม \bar{x} ของค่าเฉลี่ย ความทนต่อแรงดึงและแผนภูมิควบคุม \bar{x} ของขนาดเส้นผ่าน ศูนย์กลางปรากฏสัญญาณออกนอกการควบคุมในกลุ่มตัวอย่าง ที่ 15 ทั้งที่กระบวนการผลิตยังคงดำเนินการไปได้โดยปกติ สัญญาณที่ปรากฏจึงเป็นการส่งสัญญาณผิดพลาด (false alarm signal) สัญญาณผิดพลาดนี้เกิดจากการที่ตัวแปรที่กำลังพิจารณาอยู่ไม่เป็นอิสระจากกัน ($s_{12} \neq 0$) โดยทั้งสอง ตัวแปรมีความสัมพันธ์เชิงลบ ($s_{12} < 0$) ทำให้เส้นกรอบรูป วงรีซึ่งเป็นเส้นพิกัดควบคุม (control ellipse) ของแผนภูมิ T^2 ทำมุมเอียงลาดลงจากด้านซ้ายไปด้านขวา ดังแสดงใน รูปที่ 3 โดยที่จุดต่างๆ ที่พล็อตเป็นจุดคู่พิกัดค่าเฉลี่ยของทั้งสองตัวแปรของกลุ่มตัวอย่าง ($\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}$) และจะเห็นได้ว่า จุดคู่พิกัดค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ 15 ตกอยู่ภายในกรอบ รูปวงรีแม้ว่าจุดคู่พิกัดดังกล่าวจะตกอยู่นอกเส้นพิกัดควบคุม \bar{x} เมื่อแยกพล็อตอิสระจากกัน ดังนั้นการใช้แผนภูมิควบคุม \bar{x} ของแต่ละตัวแปรแยกอิสระจากกันทำให้เกิดการสรุปสถานะ ของกระบวนการผลิตผิดพลาดขึ้นได้

3.2 กรณีศึกษาที่ 2

กรณีศึกษาที่ 2 คือบริษัท DynaProPack เป็นผู้ผลิตชิ้น

รูปพลาสติก ข้อมูลที่ใช้ในกรณีศึกษานี้ได้จากกระบวนการฉีด ขึ้นรูปพลาสติกที่มีตัวแปรที่ต้องควบคุมอยู่ถึง 4 ตัวแปรเพื่อให้ ได้ชิ้นงานพลาสติกที่ฉีดออกมาได้คุณภาพ โดยทั้ง 4 ตัวแปร ประกอบด้วย

x_1 = เวลาที่ใช้ในการฉีดเนื้อพลาสติกเหลวเข้าสู่แม่พิมพ์ ได้ตามปริมาณที่ต้องการ (s)

x_2 = แรงดันที่ใช้ในการฉีดพลาสติกเหลวเข้าสู่แม่พิมพ์ (MPa)

x_3 = อุณหภูมิหัวฉีด (°C)

และ x_4 = ความเร็วในการฉีด (mm/s)

เพื่อให้ได้ชิ้นงานพลาสติกที่ฉีดออกมาได้คุณภาพ วิศวกร จึงได้กำหนดค่าตัวแปรของกระบวนการฉีดขึ้นรูปพลาสติกไว้ที่ $x_1 = 3.5$ s $x_2 = 100$ MPa $x_3 = 260$ °C

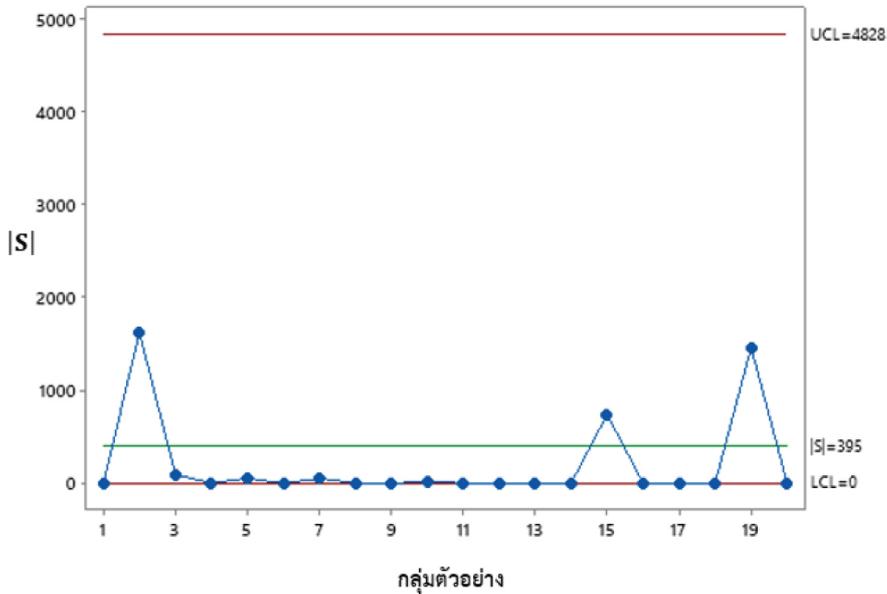
และ $x_4 = 50$ mm/s ซึ่งทั้ง 4 ตัวแปรจะต้องทำการควบคุมไป พร้อมกันเพื่อรักษาระดับคุณภาพของชิ้นงาน โดยกระบวนการ ฉีดขึ้นรูปพลาสติกถูกสุ่มตรวจสอบเพื่อวัดค่าทั้ง 4 ตัวแปร จำนวน 5 ครั้ง ($n=5$) ทุกๆ 15 นาที จนกระทั่งได้จำนวนกลุ่ม ตัวอย่าง $m=20$ และเมื่อคำนวณข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตรวจ วัดค่าทั้ง 4 ตัวแปร สามารถสรุปผลได้ดังแสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 สรุปผลการคำนวณข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตรวจวัดค่าทั้ง 4 ตัวแปรสำหรับกรณีศึกษาที่ 2

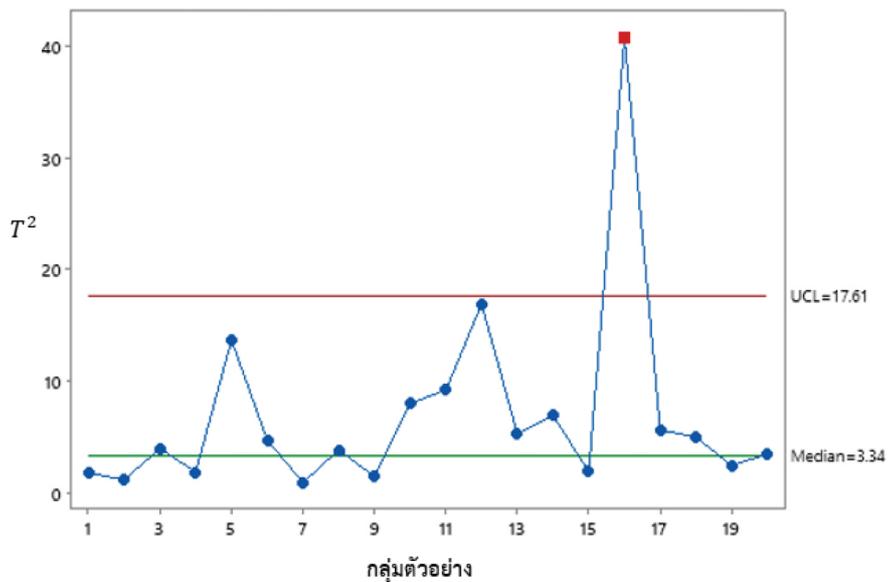
กลุ่ม ตัวอย่าง k	ค่าเฉลี่ย				ค่าความแปรปรวน				ค่าความแปรปรวนร่วม					ค่าสถิติบน แผนภูมิควบคุม		
	\bar{x}_{1k}	\bar{x}_{2k}	\bar{x}_{3k}	\bar{x}_{4k}	s_{1k}^2	s_{2k}^2	s_{3k}^2	s_{4k}^2	s_{12k}	s_{13k}	s_{14k}	s_{23k}	s_{24k}	s_{34k}	T^2_k	$ S_k $
1	3.16	98.56	259.67	51.97	0.059	24.801	1.685	4.144	0.145	-0.029	-0.442	2.172	-4.729	0.155	1.81	1
2	3.43	100.51	258.68	50.80	0.960	19.048	18.209	17.191	3.033	-0.336	-2.397	2.453	-8.574	3.320	1.23	1621
3	3.14	102.54	261.84	50.27	1.687	7.982	27.128	12.454	0.159	-4.592	-3.635	4.898	-5.225	3.297	4.00	94
4	3.36	99.68	258.95	51.66	1.158	3.272	5.936	18.644	0.289	-1.743	-2.956	1.594	-2.844	7.503	1.91	1
5	3.07	100.20	264.34	51.09	0.288	43.862	31.099	10.988	0.451	-1.074	-0.366	12.408	-19.559	1.845	13.70	53
6	3.61	97.73	259.59	49.69	0.357	30.195	2.606	10.802	1.212	-0.814	-0.996	0.214	-5.533	3.793	4.78	1
7	3.45	101.96	260.16	49.66	0.257	29.923	16.542	2.933	1.903	-0.704	-0.141	3.844	-0.555	4.410	0.95	52
8	3.69	97.59	259.17	51.11	0.770	16.622	21.314	1.990	2.530	-2.333	-1.063	2.409	-2.842	4.754	3.88	3
9	3.43	100.30	260.94	51.14	0.316	23.344	9.611	3.971	0.638	-0.433	-1.106	9.519	-2.843	1.787	1.51	0
10	3.52	100.82	256.35	50.17	0.672	0.517	4.004	21.612	0.140	-0.351	-1.280	0.259	-0.977	3.766	8.05	17
11	3.75	99.47	255.39	49.77	0.905	43.462	1.525	15.011	5.753	-0.013	-2.435	1.603	-18.348	2.103	9.24	3
12	4.12	98.36	260.85	48.80	0.605	1.861	8.322	1.268	0.036	-0.290	-0.335	1.742	-0.767	1.515	16.92	1
13	3.91	97.66	258.16	50.67	0.248	10.726	3.167	1.401	0.335	-0.384	-0.289	1.354	-1.201	1.724	5.36	1
14	3.74	100.30	261.86	51.10	0.609	3.422	2.798	2.312	0.658	-0.805	-0.652	0.845	-0.029	1.034	6.97	1
15	3.52	100.35	257.84	49.33	0.793	47.306	19.290	8.610	3.388	-1.144	-1.254	8.439	-12.328	4.859	1.92	739
16	2.91	101.19	255.17	53.22	0.043	26.361	4.884	4.011	0.405	-0.386	-0.316	1.079	-2.050	2.212	40.72	0
17	3.13	102.45	261.45	48.98	0.261	10.759	4.690	2.051	0.065	-1.000	-0.650	0.541	-1.348	2.894	5.66	0
18	3.54	101.38	260.62	48.17	0.953	3.596	3.561	8.204	1.089	-0.599	-0.604	0.016	-4.231	1.804	5.04	3
19	3.14	101.24	260.05	49.52	1.027	36.922	10.228	8.536	0.674	-1.145	-0.896	6.964	-9.723	0.098	2.46	1460
20	3.39	102.88	259.10	48.92	0.171	17.739	1.251	15.768	0.497	-0.243	-1.176	1.129	-14.572	0.258	3.54	0

จากข้อมูลในตารางที่ 3 คำนวณได้ค่าเฉลี่ย $\bar{x}_1 = 3.45$
 $\bar{x}_2 = 100.26$ $\bar{x}_3 = 259.51$ $\bar{x}_4 = 50.30$ $\bar{s}_1^2 = 0.607$
 $\bar{s}_2^2 = 20.090$ $\bar{s}_3^2 = 9.890$ $\bar{s}_4^2 = 8.600$ $\bar{s}_{12} = 1.170$ \bar{s}_{13}
 $= -0.921$ $\bar{s}_{14} = -1.149$ $\bar{s}_{23} = 3.174$ $\bar{s}_{24} = -5.910$
 และ $\bar{s}_{34} = 2.657$ และเมื่อนำค่า $|S_k|$ และ T_k^2 มาพล็อตลงในแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปและแผนภูมิควบคุม

Hotelling T^2 จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 4 โดยขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปคำนวณจากสมการ (15) - (17) และขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) ของแผนภูมิ T^2 ที่ค่าความน่าจะเป็นของความเสี่ยงในการตัดสินใจผิดพลาดของผู้ผลิตคือ $\alpha = 0.0027$ คำนวณจากสมการ (9)



(ก) แผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไป

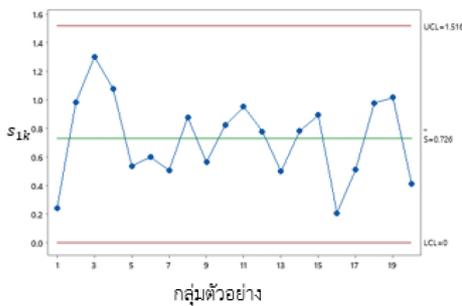


(ข) แผนภูมิควบคุม Hotelling T^2

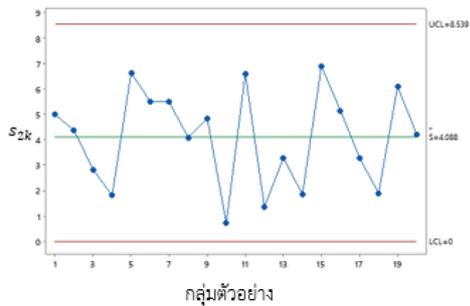
รูปที่ 4 แผนภูมิควบคุมตัวแปรเชิงพหุสำหรับกรณีศึกษาที่ 2 (ก) แผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไป (ข) แผนภูมิควบคุม Hotelling T^2

เมื่อพิจารณาแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปและแผนภูมิควบคุม Hotelling T^2 ในรูปที่ 4 จะเห็นได้ว่าทุกจุดบนแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปตกอยู่ภายในขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (LCL) ซึ่งบ่งชี้ว่าค่าความแปรปรวนอยู่ภายใต้การควบคุมเชิงสถิติ อย่างไรก็ตามจุดบนแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปเป็นเพียงค่าตีเทอรัมี้แนนต์ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่าง $|S_j|$ เท่านั้นจึงอาจทำให้เกิดการตีความเกี่ยวกับสถานะของกระบวนการผิดพลาดได้เนื่องจากข้อมูลค่าความแปรปรวน (s_{ij}^2) และความแปรปรวนร่วม (s_{ij}) ในเมทริกซ์ถึงแม้จะมีค่าแตกต่างกันแต่ก็ให้ค่า $|S_j|$ ที่เท่ากันได้ ดังเช่นกลุ่ม

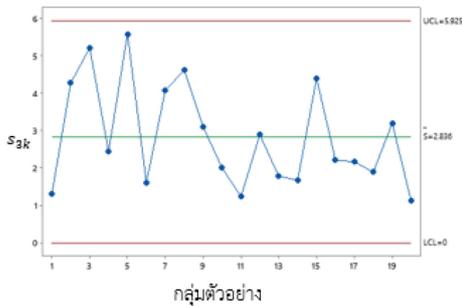
ตัวอย่างที่ 1, 4, 6, 12, 13, และ 14 ในตารางที่ 3 ซึ่งมีค่า $|S_j|=1$ เป็นต้น เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดความผิดพลาดในการตีความในส่วนของความแปรปรวนของกระบวนการ จึงใช้แผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปพร้อมกับแผนภูมิ s ที่ละตัวแปรเพื่อช่วยในการพิจารณาสถานะของกระบวนการจะมีความเหมาะสมมากกว่า ดังแสดงในรูปที่ 5 ซึ่งพบว่าทุกจุดบนแผนภูมิ s ของทุกตัวแปรตกอยู่ภายในขีดจำกัดควบคุมบนและขีดจำกัดควบคุมล่างซึ่งบ่งชี้ว่าค่าความแปรปรวนของทุกตัวแปรอยู่ในการควบคุม (in-control) จึงช่วยยืนยันผลสรุปที่สอดคล้องกับแผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปในรูปที่ 4 (ก)



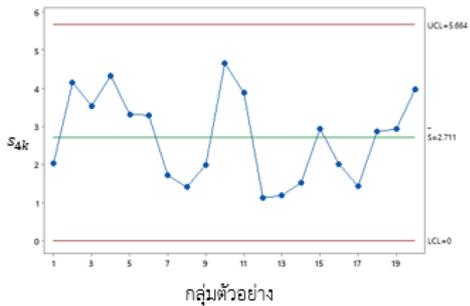
(ก) แผนภูมิ s ของตัวแปรที่ 1



(ข) แผนภูมิ s ของตัวแปรที่ 2



(ค) แผนภูมิ s ของตัวแปรที่ 3



(ง) แผนภูมิ s ของตัวแปรที่ 4

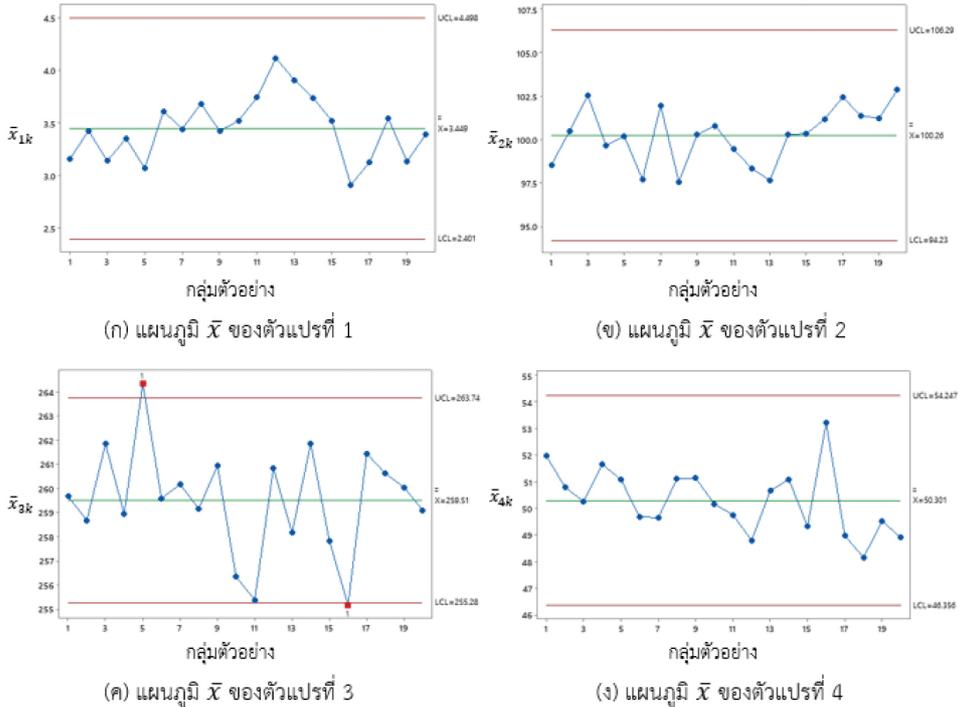
รูปที่ 5 แผนภูมิ s ที่ละตัวแปรสำหรับกรณีศึกษาที่ 2

สำหรับแผนภูมิควบคุม Hotelling T^2 ในรูปที่ 4 พบว่ามีเพียงกลุ่มตัวอย่างที่ 16 เท่านั้นที่มีค่า T^2 ตกอยู่นอกขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) ซึ่งเป็นสัญญาณบ่งชี้ว่ากระบวนการออกนอกการควบคุมแล้ว แต่เมื่อลองนำค่าเฉลี่ยของแต่ละตัวแปรในตารางที่ 3 มาแยกพล็อตลงในแผนภูมิ \bar{x} ผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6 ซึ่งจะพบว่ากลุ่มตัวอย่างที่ 5 และกลุ่มตัวอย่างที่ 16 ในแผนภูมิ \bar{x} ของตัวแปรที่ 3 ตกอยู่นอก

ขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (LCL) ตามลำดับ ส่วนแผนภูมิ \bar{x} ของตัวแปรที่เหลือไม่มีสัญญาณบ่งชี้ว่าระบบออกนอกการควบคุม จะสังเกตได้ว่าในขณะที่แผนภูมิควบคุม Hotelling T^2 ในรูปที่ 4 มีสัญญาณว่าระบบอยู่ในสถานะออกนอกการควบคุมอยู่เพียงจุดเดียวคือจุดที่ 16 ในขณะที่แผนภูมิ \bar{x} ในรูปที่ 6 (ค) มีสัญญาณบ่งชี้ว่าระบบอยู่ในสถานะออกนอกการควบคุมอยู่ 2 จุดคือ จุด

ที่ 5 และจุดที่ 16 ที่เกิดเฉพาะกับตัวแปรที่ 3 ดังนั้นการใช้แผนภูมิควบคุม T^2 กับการใช้แผนภูมิ \bar{x} ที่ละตัวแปรแยกจากกันจะให้ผลลัพธ์ของการตีความที่แตกต่างกัน โดยวิศวกร

ฝ่ายควบคุมคุณภาพได้ตรวจสอบชิ้นงานในกลุ่มตัวอย่างที่ 5 แล้วไม่พบสิ่งผิดปกติแต่อย่างใด ดังนั้นสัญญาณในจุดที่ 5 จึงเป็นสัญญาณผิดพลาดตั้งได้กล่าวไว้แล้วในกรณีศึกษาที่ 1



รูปที่ 6 แผนภูมิ \bar{x} ที่ละตัวแปรสำหรับกรณีศึกษาที่ 2

คำถามที่สำคัญของการใช้แผนภูมิควบคุม T^2 ในกรณีที่มีสัญญาณบ่งชี้ว่าระบบอยู่ในสถานะออกนอกการควบคุมคือ มีตัวแปรใดบ้างที่เป็นต้นเหตุของสัญญาณดังกล่าว ซึ่งมีผู้เสนอวิธีการวิเคราะห์หาตัวแปรที่เป็นต้นเหตุของสัญญาณบ่งชี้การออกนอกการควบคุมอยู่หลายแนวทาง เช่น การใช้แผนภูมิ \bar{x} ที่ละตัวแปรแยกจากกันแต่ให้ใช้ขนาดของขีดจำกัดควบคุมจากเดิม $z_{\alpha/2}$ เป็น $z_{\alpha/2p}$ แทน [8] วิธีการนี้จะช่วยลดจำนวนสัญญาณผิดพลาดจากการใช้แผนภูมิ \bar{x} ที่ละตัวแปรแยกจากกัน อีกวิธีหนึ่งซึ่งซับซ้อนกว่าวิธีการแรกคือวิธีการวิเคราะห์องค์ประกอบหลัก (principal components) ซึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของตัวแปร [9]

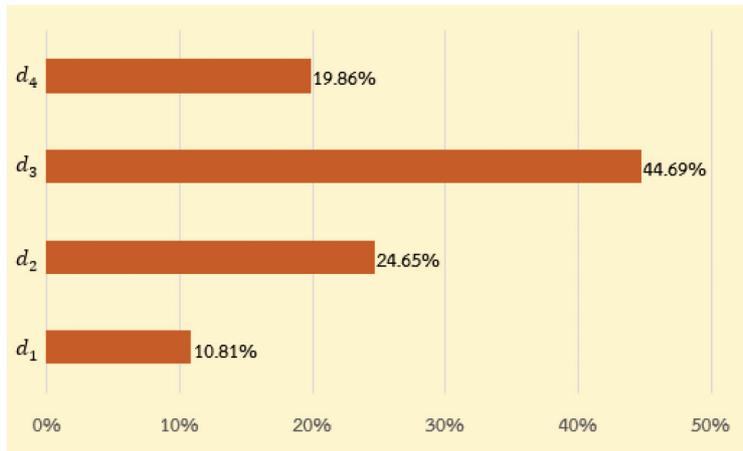
สำหรับในการศึกษานี้จะเลือกใช้วิธีของ Runger และคณะ [10] ซึ่งเป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ค่อนข้างง่ายโดยการแยกค่า T^2 ที่คาดว่าน่าจะเป็นจุดที่เกิดจากตัวแปรที่ละตัว กล่าวคือ ค่าสถิติ T^2 ของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นจุดที่ตกอยู่นอกขีดจำกัดควบคุมวิธีการนี้จะคำนวณค่า $T_{(j)}^2$ ของทุกตัวแปรยกเว้นตัวแปรที่ j แล้วคำนวณค่าผลต่าง $d_j = T^2 - T_{(j)}^2$ โดย $j = 1, 2, 3, \dots, p$ เมื่อหาค่า d_j จนครบทุกตัวแปรแล้ว จะเห็นสัดส่วนค่า d_j ของแต่ละตัวแปรที่น่าจะส่งผลต่อค่า T^2 ของกลุ่มตัวอย่างที่กำลังพิจารณา จากข้อมูลของกลุ่มตัวอย่างที่ 16 ในตารางที่ 3 เมื่อนำมาคำนวณค่า $T_{(j)}^2$ และค่า d_j จะได้ผลลัพธ์แสดงไว้ในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ผลการคำนวณค่า $T_{(j)}^2$ และค่า d_j ของกลุ่มตัวอย่างที่ 16

T^2	$T_{(1)}^2$	$T_{(2)}^2$	$T_{(3)}^2$	$T_{(4)}^2$	d_1	d_2	d_3	d_4
40.72	32.84	22.75	8.14	26.24	7.88	17.97	32.58	14.48

Runger และคณะ [10] ได้ประมาณค่าที่เหมาะสมในการแบ่งแยกค่า d_j ของตัวแปรใดน่าจะทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุม คือ $X_{\alpha,1}^2$ หรือกล่าวได้ว่าค่า d_j ของตัวแปรใดสูงกว่าค่า $X_{\alpha,1}^2$ จะถือว่าตัวแปรนั้นมีส่วนทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุม โดยการศึกษานี้ได้เลือกค่า $\alpha = 0.01$ ดังนั้น $X_{0.01,1}^2 = 6.63$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่า d_j

ของทุกตัวแปรในตารางที่ 4 มีค่าสูงกว่า $X_{0.01,1}^2$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของทั้ง 4 ตัวแปรมีส่วนทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุม ซึ่งสามารถระบุเป็นเปอร์เซ็นต์ของแต่ละตัวแปรว่ามีส่วนทำให้เกิดสถิติ T^2 มีค่าสูงเกินค่าขีดจำกัดควบคุมบน (UCL) มากน้อยเพียงใดดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 เปอร์เซนต์ค่า d_j ของแต่ละตัวแปรที่มีส่วนทำให้เกิดสถิติ T^2 มีค่าสูงเกินค่าขีดจำกัดควบคุมบน (UCL)

จะเห็นได้ว่า ผลการวิเคราะห์สัญญาณออกนอกการควบคุมของกลุ่มตัวอย่างที่ 16 ด้วยวิธีของ Runger และคณะ [10] ให้ผลสรุปที่แตกต่างจากผลการใช้แผนภูมิ \bar{x} ที่ละตัวแปรที่แสดงไว้ในรูปที่ 6 กล่าวคือ วิธีของ Runger และคณะ [10] สรุปว่าทั้ง 4 ตัวแปรล้วนมีส่วนทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุมโดยมีเปอร์เซ็นต์ของอิทธิพลต่อการเกิดสัญญาณดังกล่าวมากน้อยแตกต่างกันซึ่งจะต้องค้นหาสาเหตุของสิ่งผิดปกติที่เกิดขึ้น (assignable cause) ของทุกตัวแปร แต่สำหรับกรณีการใช้แผนภูมิ \bar{x} ที่ละตัวแปรซึ่งบ่งชี้ว่ามีเพียงตัวแปรที่ 3 เท่านั้นที่ทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุมซึ่งผลสรุปที่ผิดพลาดอันจะส่งผลให้ไม่สามารถแก้ไขปัญหาของกระบวนการได้เพราะระบุสาเหตุได้ไม่ครบถ้วน

4. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ในทางปฏิบัติการตรวจติดตามและควบคุมกระบวนการผลิตส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับหลายตัวแปรซึ่งจำเป็นต้องทำการตรวจติดตามและควบคุมทุกตัวแปรพร้อมกัน เนื่องจากในสถานการณ์จริงจะพบเสมอว่าตัวแปรต่าง ๆ ที่กำลังตรวจ

ติดตามและควบคุมอยู่ไม่นั้นไม่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นหากใช้แผนภูมิควบคุมทีละตัวแปรแยกออกจากกันอาจทำให้ผลสรุปที่ได้เกี่ยวกับสถานะของกระบวนการผลิตคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อจำนวนตัวแปรเพิ่มมากขึ้น การใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับหลายตัวแปรหรือแผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุจึงกลายเป็นทางเลือกเพื่อแก้ไขปัญหานี้ แม้ว่าแผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุจะมีความซับซ้อนมากกว่าการควบคุมคุณภาพตัวแปรเดียว

ในงานวิจัยนี้ได้ทดลองใช้แผนภูมิควบคุมความแปรปรวนทั่วไปและแผนภูมิ Hotelling T^2 กับกระบวนการผลิตในกรณีศึกษา 2 กรณีเพื่อเปรียบเทียบกับการใช้แผนภูมิ \bar{x} ร่วมกับแผนภูมิ S ที่ละตัวแปรแยกจากกัน ผลจากการศึกษาพบว่าการใช้แผนภูมิทีละตัวแปรแยกจากกันจะส่งสัญญาณผิดพลาด (false alarm signal) ออกมา ทำให้ต้องค้นหาสาเหตุของความผิดปกติที่ไม่มีอยู่จนเกิดเป็นต้นทุนจากสัญญาณผิดพลาด (cost of false alarms) อีกทั้งยังระบุตัวแปรที่มีส่วนทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุมได้ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ซึ่งทำให้เกิดเป็นต้นทุนเสียโอกาส (opportunity cost) ใน

การปรับปรุงกระบวนการ ในกรณีที่แผนภูมิ Hotelling T^2 ส่งสัญญาณออกนอกการควบคุมแต่การใช้แผนภูมิที่ละตัวแปรแยกจากกันไม่สามารถตรวจพบความผิดปกติของกระบวนการก็จะทำให้เกิดเป็นต้นทุนเสียโอกาสในการปรับปรุงกระบวนการได้เช่นกัน

อย่างไรก็ตามอุปสรรคที่เป็นข้อด้อยของการใช้แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปรเชิงพหุคือความยุ่งยากในการวิเคราะห์ว่าตัวแปรใดที่เป็นต้นเหตุของสัญญาณออกนอกการควบคุมซึ่งมีผู้เสนอวิธีการวิเคราะห์หาตัวแปรที่เป็นต้นเหตุของสัญญาณบ่งชี้การออกนอกการควบคุมอยู่หลายแนวทาง โดยในแต่ละแนวทางจะมีข้อดีและข้อด้อยอยู่ สำหรับในงานวิจัยนี้ได้เลือกวิธีการของ Runger และคณะ [10] เนื่องจากเป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ค่อนข้างง่ายโดยการแยกค่า T^2 ของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นจุดที่ตกอยู่นอกขีดจำกัดควบคุม วิธีการนี้จะคำนวณค่า $T_{(j)}^2$ ของทุกตัวแปรยกเว้นตัวแปรที่ j แล้วคำนวณค่าผลต่าง $d_j = T^2 - T_{(j)}^2$ หากค่า d_j ของตัวแปรใดสูงกว่าค่า $\chi_{\alpha,1}^2$ จะถือว่าตัวแปรนั้นมีส่วนที่ทำให้เกิดสัญญาณออกนอกการควบคุม นอกจากนี้ค่า d_j ยังช่วยในการจัดลำดับว่าตัวแปรใดส่งผลมากน้อยเพียงใดต่อสัญญาณออกนอกการควบคุมด้วยอัตราส่วนเชิงเปรียบเทียบ

เนื่องจากแผนภูมิ Hotelling T^2 เป็นแผนภูมิ Shewhart ประเภทหนึ่ง (Shewhart-type control charts) ดังนั้นก่อนการประยุกต์ใช้งานควรมีการตรวจสอบความเป็นอิสระของลักษณะทางคุณภาพหรือตัวแปรที่สนใจเสียก่อนจะทำให้ผลสรุปของการใช้แผนภูมิ T^2 เป็นที่น่าเชื่อถือมากขึ้น นอกจากนี้แต่ละจุดบนแผนภูมิ T^2 เป็นข้อมูลที่ได้จากค่าสังเกตการณ์ (observation) ของกลุ่มตัวอย่าง ณ เวลานั้นโดยไม่มีการนำข้อมูลที่ได้จากค่าสังเกตการณ์ของกลุ่มตัวอย่างก่อนหน้ามาร่วมพิจารณาด้วย (memoryless) คุณลักษณะนี้ทำให้แผนภูมิ T^2 เหมาะสำหรับการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยในกระบวนการที่มีขนาดตั้งแต่ $\pm 2\sigma$ ขึ้นไปแต่ไม่ไว (insensitive) มากพอต่อขนาดของการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยถึงระดับปานกลางของค่าเฉลี่ย หากพบว่าการตรวจจับขนาดการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยของค่าเฉลี่ยมีความสำคัญต่องานควบคุมคุณภาพจะทำให้การใช้แผนภูมิ T^2 เพียงอย่างเดียวจะไม่เกิดประสิทธิภาพ ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยการใช้แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสำหรับตัวแปรเชิงพหุ MCUSUM (multivariate cumulative sum

chart) หรือแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังสำหรับตัวแปรเชิงพหุ MEWMA (multivariate exponentially weighted moving average chart) โดยแต่ละจุดบนแผนภูมิควบคุม MCUSUM และแผนภูมิควบคุม MEWMA เป็นข้อมูลที่ได้จากค่าสังเกตการณ์ (observation) ของกลุ่มตัวอย่าง ณ เวลานั้นพร้อมทั้งนำข้อมูลที่ได้จากค่าสังเกตการณ์ของกลุ่มตัวอย่างก่อนหน้าเข้ามาร่วมพิจารณาด้วย (memorize) จึงทำให้แผนภูมิ MCUSUM และแผนภูมิ MEWMA สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยในค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้ดีกว่าแผนภูมิ T^2

5. เอกสารอ้างอิง

1. Montgomery, D., 2009, Introduction to Statistical Quality Control, 6th ed., John Wiley & Sons, New York, p. 734.
2. Hotelling, H., 1947, "Multivariate Quality Control – Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights," pp. 111–184, in C. Eisenhart, M.W. Hastay and W.A. Wallis (Eds.) *Techniques of Statistical Analysis*, McGraw-Hill, New York.
3. Barthus, R.C. and Poppi, R.J., 2002, "Multivariate Quality Control Applied to Detect the Soybean Oil Oxidation Using Fourier Transform Infrared Spectroscopy," *Spectroscopy Letters*, 35 (5), pp. 729–739.
4. Nugraha, J, Fatimah, I. and Prabowo, R.G., 2017, "Control of Wastewater Using Multivariate Control Chart," *International Conference on Chemistry, Chemical Process and Engineering (IC3PE)* 2017, 15-16 November 2016, Yogyakarta, Indonesia, pp. 020126-1–020126-11.
5. Chou, Y.M., Mason, R.L. and Young, J.C., 2001, "The Control Chart for Individual Observations from a Multivariate Non-Normal Distribution," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30 (8-9), pp. 1937-1949.
6. Kalgonda, A.A. and Kulkarni, S.R., 2004, "Multivariate Quality Control Chart for Autocorrelated Processes," *Journal of Applied Statistics*, 31 (3), pp. 317–327.

7. Tantibadaro, V., 2004, Loss-Function-Based Control Chart for AR (1) Processes, Doctor of Engineering Dissertation, Industrial Systems Engineering, School of Advanced Technologies, Asian Institute of Technology, 137 p.
8. Alt, F.B., 1985, "Multivariate Quality Control," pp. 110–122, in N.L. Johnson and S. Kotz (Eds.) *Encyclopedia of Statistical Sciences* Vol. 6, Wiley, New York.
9. Jackson, J.E., 1980, "Principal Components and Factor Analysis: Part I-Principal Components," *Journal of Quality Technology*, 12 (4), pp. 201–213.
10. Runger, G.C., Alt, F.B. and Montgomery, D.C., 1996, "Contributors to a Multivariate Statistical Process Control Signal," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 25 (10), pp. 2203–2213.