P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 31 ฉบับที่ 5 (กันยายน-ตุลาคม 2566) หน้า [1-12]

สมบัติบางประการของเมทริกซ์โทพลิทซ์ $P_n(a,b,c)$

Some Properties of a Toeplitz Matrix $P_n(a,b,c)$

ปุณชญา พัฒนางกูร*, ปรีย์วรา ธิเขียว, จินเจตน์ บุญมาเลิศ
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Poonchayar Patthanangkoor*, Preewara Thikeaw, Chinchet Boonmalert
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 9 February 2023; Received in revised 5 July 2023; Accepted 12 July 2023

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์ชนิดพิเศษชนิดหนึ่ง ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์กับพจน์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด และยังศึกษาเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบแบบแอลยู นอกจากนี้ ยังได้ศึกษาเกี่ยวกับผกผันของเมทริกซ์ และคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของผกผันของเมทริกซ์อีกด้วย

คำสำคัญ: เมทริกซ์โทพลิทซ์; ความสัมพันธ์เวียนเกิด

Abstract

In this paper, we consider a matrix $P_n(a,b,c)$ which is a special type of Toeplitz matrices. We obtain some relationships between the determinant of the matrix and terms of a certain recurrence relation. We give LU factorization. Furthermore, we determine the inverse of the matrix and then compute the determinant of the inverse of the matrix.

Keywords: Toeplitz matrix; recurrence relation

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th **doi:**

1. บทนำ

เมทริกซ์โทพลิทซ์ (Toeplitz Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็นค่าคงตัวเดียวกัน และแนวขนานเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าคงตัวเดียวกันในแต่ละแนว กล่าวคือ เมทริกซ์จตุรัส $A_n = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$ จะเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์ ก็ต่อเมื่อ $\alpha_{ij} = \alpha_{i-j}$ สำหรับทุก $1 \leq i, j \leq n$ เมื่อ a_{i-j} เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \alpha_{-3} & \cdots & \alpha_{-(n-1)} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \cdots & \alpha_{-(n-2)} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{-(n-3)} \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{-(n-4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-1)} & \alpha_{(n-2)} & \alpha_{(n-3)} & \alpha_{(n-4)} & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

เมทริกซ์โทพลิทซ์มักจะพบในการศึกษาทางด้านทฤษฎีในเนื้อหาของพีชคณิตเชิงเส้นหรือการวิเคราะห์เชิงตัวเลข นอกจากนี้ยังพบในการศึกษาทางด้านการประยุกต์อีกด้วย เช่น ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลา การประมวลผลสัญญาณและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น ปี ค.ศ. 1998 Tilli [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์โทพลิทซ์สามแนวเฉียง ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2003 Capizzano [1] ได้ประยุกต์เมทริกซ์โทพลิทซ์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากนั้นในปี ค.ศ. 2007 Witula และ Stola [4] ได้ศึกษาเมทริกซ์โทพลิทซ์ พร้อมทั้งให้ตัวอย่างเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ และเมทริกซ์ผกผันสำหรับกรณีเฉพาะบางกรณี และปี ค.ศ. 2008 Kilic [2] ได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์โทพลิทซ์ $H_n(a,b,c)$ ที่กำหนดโดย

$$H_n(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & 0 & a \end{bmatrix}_{nxn}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n > 2$ ซึ่งผลงานวิจัยชิ้นนี้ได้คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $H_n(a,b,c)$ ผ่านการแยกตัวประกอบแบบแอลยู และคำนวณค่าเฉพาะของเมทริกซ์ นอกจากนี้ ยังใช้ผลที่ได้ในการหาตัวแทนตรีโกณมิติสำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิดอีกด้วย

โดยอาศัยแนวคิดจากการศึกษาผลงานวิจัยของ Kilic ดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงทำการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์โทพลิทซ์ $P_n(a,b,c)$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์อีกรูปแบบหนึ่ง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n > 3$ นิยามเมทริกซ์โทพลิทซ์ $P_n(a,b,c) = \left[p_{ij}\right]_{nxn}$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
p_{ii} &= a && \text{สำหรับทุก } 1 \le i \le n \\
p_{i,\,i+3} &= b && \text{สำหรับทุก } 1 \le i \le n-3 \\
p_{i+3,\,i} &= c && \text{สำหรับทุก } 1 \le i \le n-3 \\
\text{และ} \quad p_{ij} &= 0 && \text{สำหรับกรณีอื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

กล่าวคือ

$$
P_n(a,b,c) = \begin{bmatrix}
a & 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & 0 & 0 & a
\end{bmatrix}_{nxn}
$$

2. ผลงานวิจัย

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงการคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ (ดังบทนิยาม 1.1) ในรูปแบบของความสมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง โดยดำเนินการขั้นมูลฐานในการคำนวณ

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง $\{u_n\}$ ดังนี้

$$u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2} \tag{1}$$

สำหรับทุก $n \ge 2$ เมื่อ $u_0 = 0$ และ $u_1 = 1$

จะเห็นได้ว่า $u_2 = a,\ u_3 = a^2 - bc,\ u_4 = a^3 - 2abc$ และ $u_5 = a^4 - 3a^2bc + b^2c^2$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสองข้างต้น จะทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ กับพจน์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 3$ จะได้ว่า

$$\det(P_n(a,b,c)) = \begin{cases} u_{k+1}^3 & ; \quad n = 3k \\ u_{k+1}^2 u_{k+2} & ; \quad n = 3k+1 \\ u_{k+1} u_{k+2}^2 & ; \quad n = 3k+2 \end{cases}$$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 3$ จะเห็นว่า $a = \frac{a}{1} = \frac{u_2}{u_1}$
จากบทนิยาม 1.1 จะกำหนดให้ R_i แทนแถวที่ i ของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$
กรณี $n = 3k$ เมื่อ $k > 1$ จะใช้การดำเนินขั้นมูลฐาน ต่อไปนี้

$$-c\,\frac{u_{k-1}}{u_k} R_{n-5} + R_{n-2} \longrightarrow R_{n-2}\,,\; -c\,\frac{u_{k-1}}{u_k} R_{n-4} + R_{n-1} \longrightarrow R_{n-1}$$

และ $-c\,\frac{u_{k-1}}{u_k} R_{n-3} + R_n \longrightarrow R_n$ เมื่อ $n \geq 6$

และเนื่องจาก $a - \frac{bcu_k}{u_{k+1}} = \frac{au_{k+1} - bcu_k}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}$ จึงเห็นได้ว่า

$$\det(P_n(a,b,c)) = \det(P_{3k}(a,b,c)) = \frac{u_2}{u_1}\frac{u_2}{u_1}\frac{u_2}{u_1}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_4}{u_3}\frac{u_4}{u_3}\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{u_{k+1}}{u_k}$$

$$= \frac{u_{k+1}^3}{u_1^3} = \frac{u_{k+1}^3}{1^3} = u_{k+1}^3$$

กรณี $n = 3k + 1$ เมื่อ $k \geq 1$ จะใช้การดำเนินการขั้นมูลฐานเพื่อคำนวณหา $\det(P_n(a,b,c))$ เช่นเดียวกับกรณีที่ $n = 3k$ เมื่อ $k > 1$ และใช้การดำเนินการขั้นมูลฐาน $-c\,\frac{u_k}{u_{k+1}} R_{n-3} + R_n \longrightarrow R_n$ จะได้ว่า

$$\det(P_n(a,b,c)) = \det(P_{3k+1}(a,b,c))$$

$$= \frac{u_2}{u_1}\frac{u_2}{u_1}\frac{u_2}{u_1}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_4}{u_3}\frac{u_4}{u_3}\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{u_{k+2}}{u_k}$$

$$= \frac{u_{k+1}^2 u_{k+2}}{u_1^3} = \frac{u_{k+1}^2 u_{k+2}}{1^3} = u_{k+1}^2 u_{k+2}$$

กรณี $n = 3k+2$ เมื่อ $k \geq 1$ จะใช้การดำเนินการขั้นมูลฐานเพื่อคำนวณหา $det\,(P_n\,(a,b,c))$ เช่นเดียวกับกรณีที่ $n = 3k+1$ เมื่อ $k \geq 1$ และใช้การดำเนินการขั้นมูลฐาน $-c\,\frac{u_k}{u_{k+1}}R_{n-3} + R_n \longrightarrow R_n$ จะทำให้ได้ว่า

$$\det\,(P_n\,(a,b,c)) = \det\,(P_{3k+2}\,(a,b,c))$$

$$= \frac{u_2}{u_1}\,\frac{u_2}{u_1}\,\frac{u_2}{u_1}\,\frac{u_3}{u_2}\,\frac{u_3}{u_2}\,\frac{u_3}{u_2}\,\frac{u_4}{u_3}\,\frac{u_4}{u_3}\,\frac{u_4}{u_3}\,\cdots\,\frac{u_{k+1}}{u_k}\,\frac{u_{k+1}}{u_k}\,\frac{u_{k+1}}{u_k}\,\frac{u_{k+2}}{u_{k+2}}\,\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}$$

$$= \frac{u_{k+1}u_{k+2}^2}{u_1^3} = \frac{u_{k+1}u_{k+2}^2}{1^3} = u_{k+1}u_{k+2}^2$$

ต่อไปจะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบแบบแอลยูโดยวิธีการของ Doolittle (Doolittle's method of LU factorization) ของ $P_n\,(a,b,c)$ กำหนดให้ฟังก์ชันพื้น (floor function) คือฟังก์ชัน $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย $\lfloor x \rfloor = \max\,\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$

กำหนดให้ $L_0 = \left[\, l_{ij} \right]$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างมิติ $n \times n$ โดยที่ l_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ L_0 สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$l_{3m+1,\,3m-2} = l_{3m+2,\,3m-1} = l_{3m+3,\,3m} = \frac{cu_m}{u_{m+1}} \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$$

$$l_{ii} = 1 \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq i \leq n$$

และสมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

และกำหนดให้ $U_0 = \left[\, q_{ij} \right]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนมิติ $n \times n$ โดยที่ q_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ U_0 สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$q_{3m-2,\,3m-2} = q_{3m+1,\,3m-1} = q_{3m,\,3m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$$

$$q_{i,\,i+3} = b \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq i \leq n-3$$

และสมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

เมื่อ u_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับ $\{u_n\}$ ที่กำหนดโดย $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $u_0 = 0$ และ $u_1 = 1$

จากบทนิยามของเมทริกซ์ L_0 และ U_0 ดังกล่าว ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 การแยกตัวประกอบแบบแอลยูของ $P_n\,(a,b,c)$ จะอยู่ในรูป

$$P_n\,(a,b,c) = L_0 U_0$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$l_{ij} = 0$ สำหรับทุก $j > i$

$l_{i+1,\, i} = 0$ สำหรับทุก $1 \le i \le n - 1$

$l_{i+2,\, i} = 0$ สำหรับทุก $1 \le i \le n - 2$

$l_{ij} = 0$ สำหรับทุก $i \ge j + 4$

และ $q_{ij} = 0$ สำหรับทุก $j < i$

$q_{i,i+1} = 0$ สำหรับทุก $1 \le i \le n - 1$

$q_{i,i+2} = 0$ สำหรับทุก $1 \le i \le n - 2$

$q_{ij} = 0$ สำหรับทุก $i \ge j + 4$

พิจารณา

$$L_0U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} = \left[p_{ij}\right]_{n\times n}$$

พิจารณากรณี $i = j$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \sum^{n} l_{ik} q_{ki} \\ &= l_{i1}\, q_{1i} + l_{i2}q_{2i} + \dots + l_{i,i-4}q_{i-4,\, i} + l_{i,i-3}q_{i-3,\, i} + l_{i,i-2}q_{i-2,\, i} + l_{i,i-1}q_{i-1,\, i} + l_{ii}q_{ii} \\ &\quad + l_{i,i+1}q_{i+1,\, i} + l_{i,i+2}q_{i+2,\, i} + \dots + l_{in}q_{ni} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \dots = l_{in} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+1,\, i} = 0$ เมื่อ $1 \le i \le n -1$ ดังนั้น $l_{i,i-1} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+2,\, i} = 0$ เมื่อ $1 \le i \le n -2$ ดังนั้น $l_{i,i-2} = 0$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $i \ge j + 4$ ดังนั้น ในกรณีที่ $i \ge 5$ จะได้ว่า ถ้า $1 \le k \le i -4$ แล้ว $5 \le k + 4 \le i$ ซึ่งทำให้ $l_{ik}q_{ki} = (0)\, q_{ki} = 0$ สำหรับทุก $1 \le k \le i - 4$

ดังนั้น $$p_{ii} = l_{i,\, i-3}\, q_{i-3,\, i} + l_{ii}\, q_{ii}$$

พิจารณาค่า i

ถ้า $i = 3t$ เมื่อ $t > 1$ แล้ว $p_{3t,\, 3t} = l_{3t,3t-3}\, q_{3t-3,3t} = l_{3t,\, 3t}\, q_{3t,\, 3t}$

เนื่องจาก $l_{3t,\, 3t-3} = l_{3(t-1)+3,\, 3(t-1)} = \frac{cu_{t-1}}{u_{(t-1)+1}} = \frac{cu_{t-1}}{u_t}$, $l_{3t,\, 3t} = 1$, $q_{3t-3,\, 3t} = b$ และ $q_{3t,3t} = \frac{u_{t+1}}{u_t}$ จึงได้ว่า $p_{3t,3t} = \left[\frac{cu_{t-1}}{u_t}\right](b) + (1)\left[\frac{u_{t-1} + buc_{t-1}}{u_t}\right]$ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{u_n\}$ เมื่อ $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ จึงได้ว่า

$$p_{3t,3t} = \left[\frac{au_t - bcu_{t-1} - bcu_{t-1}}{u_t}\right]$$

ถ้า $i = 3t + 1$ เมื่อ $t \geq 1$ แล้ว

$$p_{3t+1,3t+1} = l_{3t+1,(3t+1)-3}\, q_{(3t+1)-3,3t+1} + l_{3t+1,3t+1}\, q_{3t+1,\,3t+1}$$

เนื่องจาก $l_{3t+1,(3t+1)-3} = l_{3t+1,\,3t-2} = \frac{cu_t}{u_{t+1}}$, $l_{3t+1,3t+1} = 1$,

$q_{(3t+1)-3,\,3t+1} = q_{3t-2,\,3t+1} = q_{(3t-2),\,(3t-2)+3} = b$

และ $q_{3t+1,\,3t+1} = q_{3(t+1)-2,\,3(t+1)-2} = \frac{u_{(t+1)+1}}{u_{t+1}} = \frac{u_{t+2}}{u_{t+1}}$

ดังนั้น $p_{3t+1,\,3t+1} = \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}}\right](b) + (1)\left[\frac{u_{t+2}}{u_{t+1}}\right] = \frac{bcu_t + u_{t+2}}{u_{t+1}}$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{u_n\}$ เมื่อ $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ จึงได้ว่า

$$p_{3t+1,\,3t+1} = \frac{bcu_t + au_{t+1} - bcu_t}{u_{t+1}} = a$$

ถ้า $i = 3t + 2$ เมื่อ $t \geq 1$ แล้ว

$$p_{3t+2,\,3t+2} = l_{3t+2,(3t+2)-3}\, q_{(3t+2)-3,\,3t+2} + l_{3t+2,\,3t+2}\, q_{3t+2,\,3t+2}$$

เนื่องจาก $l_{3t+2,(3t+2)-3} = l_{3t+2,\,3t-1} = \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}}\right]$, $l_{3t+2,\,3t+2} = 1$,

$q_{(3t+2)-3,\,3t+2} = q_{3t-1,\,3t+2} = q_{3t-1,(3t-1)+3} = b$

และ $q_{3t+2,\,3t+2} = q_{3(t+1)-1,3(t+1)-1} = \frac{u_{(t+1)+1}}{u_{t+1}} = \frac{u_{t+2}}{u_{t+1}}$

ดังนั้น $q_{3t+2,\,3t+2} = \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}}\right](b) + (1)\left[\frac{u_{t+2}}{u_{t+1}}\right] = \frac{bcu_t + u_{t+2}}{u_{t+1}}$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{u_n\}$ เมื่อ $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ จึงได้ว่า

$$p_{3t+2,\,3t+2} = \frac{bcu_t + au_{t+1} - bcu_t}{u_{t+1}} = a$$

นอกจากนี้ $p_{11} = (1)\, q_{11} = q_{11} = q_{3(1)-2,3(1)-2} = \frac{u_{1+1}}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{a}{1} = a$

$p_{22} = (0)\, q_{12} + (1)\, q_{22} = q_{22} = q_{3(1)-1,3(1)-1} = \frac{u_{1+1}}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{a}{1} = a$

และ $p_{33} = l_{31}q_{13} + l_{32}q_{23} + l_{33}q_{33} = 0 + 0\,\frac{u_2}{u_1} = \frac{a}{1} = a$

ดังนั้น $p_{ii} = a$ สำหรับทุก $i = 1, 2,...,n$ _____(2.1)

พิจารณากรณี $j = i + 3$ โดยนิยามการคูณเมทริกซ์ L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$p_{i,i+3} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}q_{k,\,i+3}$

$= l_{i1}q_{1,i+3}\, l_{i2}q_{2,i+3} + \ldots + l_{i,i-3}q_{i-3,i+3} + l_{i,i-2}q_{i-2,i+3} + l_{i,i-1}q_{i-1,i+3} + \ldots + l_{in}q_{n,i+3}$ เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i = 0$ จะได้ว่า $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \ldots = l_{in} = 0$ สำหรับ $i \geq 2$ ดังนั้น ถ้า $1 \leq k \leq i - 1$ แล้ว $5 \leq k + 4 \leq i + 3$ และเนื่องจาก $q_{ij} = 0$ สำหรับ $j \geq i + 4$ จึงทำให้ $l_{ik}q_{k,i+3} = l_{ik}(0) = 0$ สำหรับทุก $1 \leq k \leq i - 4$ ดังนั้น $p_{i,i+3} = l_{ii}q_{i,i+3}$ สำหรับทุก $i = 1, 2,...,n - 3$ เนื่องจาก $l_{ii} = 1$ และ $q_{i,i+3} = b$ จึงได้ว่า

$p_{i,i+3} = (1)(b) = b$ สำหรับทุก $i = 1, 2,...,n - 3$ _____(2.2)

พิจารณากรณี $i = j + 3$ โดยนิยามการคูณเมทริกซ์ L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$$p_{i+3,i} = \sum_{k=1}^{n} l_{i+3,k}q_{ki}$$
$$= l_{i+3,1}q_{1i} + l_{i+3,2}q_{2i} + \dots + l_{i+3,i-3}q_{i-3,i} + l_{i+3,i-2}q_{i-2,i} + l_{i+3,i-1}q_{i-1,i} + l_{i+3,i}q_{ii} + l_{i+3,i+1}q_{i+1,i} + \dots + l_{i+3,n}q_{ni}$$

สำหรับ $i \geq 2$ ถ้า $1 \leq k \leq i - 1$ แล้ว $5 \leq k + 4 \leq i + 3$ เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $i \geq j + 4$ จึงทำให้ $l_{i+3,k}q_{ki} = (0)\, q_{ki} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq k \leq i - 1$ และเนื่องจาก $q_{ij} = 0$ สำหรับ $j > i$ จึงทำให้ $q_{i+1,i} = q_{i+2,i} = \dots = q_{ni} = 0$ เพราะฉะนั้น $p_{i+3,i} = l_{i+3,i}q_{ii}$

พิจารณาค่า i :

ถ้า $i = 3s$ เมื่อ $s \geq 1$ แล้ว $l_{i+3,i} = l_{3s+3,\, 3s} = \frac{cu_s}{u_{s+1}}$ และ $q_{ii} = q_{3s,\, 3s} = \frac{u_{s+1}}{u_s}$ ดังนั้น $l_{i+3,i}q_{ii} = \left(\frac{cu_s}{u_{s+1}}\right)\left(\frac{u_{s+1}}{u_s}\right) = c$

ถ้า $i = 3s + 1$ เมื่อ $s \geq 1$ แล้ว $l_{i+3,i} = l_{(3s+1)+3,3s+1} = l_{3(s+1)+1,3(s+1)-2}\left(\frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}}\right)$ และ $q_{ii} = q_{3s+1,3s+1} = q_{3(s+1)-2,3(s+1)-2} = \frac{u_{(s+1)+1}}{u_{s+1}} = \frac{u_{s+2}}{u_{s+1}}$ จึงได้ว่า $l_{i+3,i}q_{ii} = \left(\frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}}\right)\left(\frac{u_{s+2}}{u_{s+1}}\right) = c$

ถ้า $i = 3s + 2$ เมื่อ $s \geq 1$ แล้ว $l_{i+3,i} = l_{(3s+2)+3,3s+2} = l_{3(s+1)+2,3(s+1)-1}\, \frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}}$ และ $q_{ii} = q_{3s+2,3s+2} = q_{3(s+1)-1,3(s+1)-1} = \frac{u_{(s+1)+1}}{u_{s+1}} = \frac{u_{s+2}}{u_{s+1}}$ จึงได้ว่า $l_{i+3,i}\, q_{ii} = \left(\frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}}\right)\left(\frac{u_{s+2}}{u_{s+1}}\right) = c$

ดังนั้น $p_{i+s3,i} = l_{i+3}q_{ii} = c$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n - 3$ ______(2.3)

จากสมการ (2.1) - (2.3) จึงสรุปได้ว่า

$p_{ii} = a$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$

$p_{i,i+3} = b$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n - 3$

$p_{i+3,i} = c$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n - 3$

ต่อไปจะแสดงว่า $p_{ij} = 0$ ในกรณีอื่น โดยพิจารณา p_{ij} เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $j \neq i + 3$ และ $i \neq j + 3$

กรณี $i > j$ โดยที่ $j \neq i + 3$ จะพบว่า

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}q_{kj}$$
$$= l_{i1}q_{1j} + l_{i2}q_{2j} + \dots + l_{i,i-4}q_{i-4,j} + l_{i,i-3}q_{i-3,j} + l_{i,i-2}q_{i-2,j} + l_{i,i-1}q_{i-1,j} + l_{ii}q_{ij} + l_{i,i+1}q_{i+1,j} + \dots + l_{i,j-1}q_{j-1,j} + l_{i,j-1}q_{j-1,j} + l_{ij}q_{jj} + l_{i,j+1}q_{j+1,j} + \dots + l_{in}q_{nj}$$

จะเห็นได้ว่า

1. $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = \dots = l_{in} = 0$ เพราะว่า $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$
2. $l_{i,i-1} = 0$ เพราะว่า $l_{i+1,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n - 1$
3. $l_{i,i-2} = 0$ เพราะว่า $l_{i+2,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n - 2$
4. $l_{ik}q_{kj} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq k \leq i - 4$ เพราะว่า $l_{ik} = 0$ เมื่อ $5 \leq k + 4 \leq i$
5. $l_{i,i-3}q_{i-3,j} = l_{ii}q_{ij} = 0$ เพราะว่า

   ถ้า $j = i + 1$ แล้ว $q_{i-3,j} = q_{i-3,i+1} = 0$ และ $q_{ij} = q_{i,i+1} = 0$

   ถ้า $j = i + 2$ แล้ว $q_{i-2,j} = q_{i-2,i+2} = 0$ และ $q_{ij} = q_{i,i+2} = 0$

และ ถ้า $j \geq i + 4$ แล้ว $q_{ij} = 0$ และ $(i - 3) + 4 = i + 1 < i + 4 \leq j$ ซึ่งทำให้ $q_{i-3,j} = 0$
ดังนั้น สามารถสรุปผลได้ว่า

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}q_{kj}$$
$$= \left(\sum_{k=4}^{i-4} l_{ik}q_{kj} \right) = \left(\sum_{k=i+1}^{n} l_{ik}q_{kj} \right) + (l_{i,i-3}q_{i-3,j} + l_{i,i-2}q_{i-2,j} + l_{i,i-1}q_{i-1,j} + l_{ii}q_{ij}) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $p_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ โดยที่ $i \neq j + 3$

จึงสรุปได้ว่า $\left[p_{ij}\right]_{nxn}$ เป็นเมทริกซ์ โดยที่
$p_{ii} = a$ สำหรับ $1 \leq i \leq n$
$p_{i,\, i+3} = b$ สำหรับ $1 \leq i \leq n - 3$
$p_{i+3,i} = c$ สำหรับ $1 \leq i \leq n - 3$
และ $p_{ij} = 0$ สำหรับกรณีอื่น
ดังนั้น $P_n(a,b,c) = \left[p_{ij}\right]_{nxn} = L_0U_0$

จากบทนิยาม 1.1 และทฤษฎีบท 2.1 จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ โดยที่ $\det P_n(a,b,c) \neq 0$ ดังนั้นเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ จึงมีตัวผกผัน กล่าวคือ จะมีเมทริกซ์ $P_n^{-1}(a,b,c)$ ที่ซึ่ง $P_n(a,b,c)\,P_n^{-1}(a,b,c) = P_n^{-1}(a,b,c)\,P_n(a,b,c) = I_n$ เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$

ดังนั้น จึงจะกล่าวถึงการหาตัวผกผันของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ และการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของตัวผกผันของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ ในรูปแบบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง $\{u_n\}$ ดังนี้

$$u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2} \quad \text{สำหรับทุก} \quad n \geq 2$$

เมื่อ $u_0 = 0$ และ $u_1 = 1$ จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $P_n(a,b,c) = L_0U_0$ โดยที่ $\det (L_0) = 1$ และ $\det (U_0) \neq 0$ จึงได้ว่า $P_n^{-1}(a,b,c) = (L_0U_0)^{-1}\, U_0^{-1}L_0^{-1}$ = ก่อนอื่นจะหารูปแบบทั่วไปของ L_0^{-1} และ U_0^{-1} ดังนี้

กำหนดให้ $X = \left[x_{ij}\right]_{nxn}$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างมิติ $n \times n$ โดยที่ x_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ X สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$x_{ii} = 1 \text{ สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n$$

$$x_{3(m+d)-2,\, 3m-2} = x_{3(m+d)-1,3m-1} = x_{3(m+d),\, 3m} = \frac{(-c)^d\, u_m}{u_{m+d}}$$

สำหรับทุก $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ และ $1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ และ สมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

และกำหนดให้ $Y = \left[y_{ij}\right]_{nxn}$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนมิติ $n \times n$ โดยที่ y_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ Y สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$y_{3m-2,\, 3(m+d)-5} = y_{3m-1,\, 3(m+d)-4} = y_{3m,\, 3(m+d)-3} = \frac{(-b)^{(d-1)}\, u_m}{u_{m+d}}$$

สำหรับทุก $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ และ $1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ และ สมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

จากบทนิยามของเมทริกซ์ X และ Y ดังกล่าว ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 3$ จะได้ว่า

$$P_n^{-1}(a,b,c) = YX$$

เมื่อ $\det(P_n(a,b,c)) \neq 0$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ $\det(P_n(a,b,c)) \neq 0$ จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $P_n(a,b,c) = L_0U_0$ ดังนั้น

$$P_n^{-1}(a,b,c) = (L_0U_0)^{-1} = L_0^{-1}U_0^{-1}$$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $L_0X = XL_0 = I_n$ จากนิยาม L_0 และ X จะได้ว่า

$l_{ii} = 0$ สำหรับ $j > i$

$l_{i+1,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-1$

$l_{i+2,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-2$

$l_{ij} = 0$ สำหรับ $i \geq j+4$

และ $x_{ij} = 0$ สำหรับ $j > i$

พิจารณา $L_0X \left[w_{ij}\right]_{nxn}$

กรณี $i = j$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{ii} &= \sum_{f=1}^{n} l_{if}x_{fi} \\ &= l_{i1}x_{1i} + l_{i2}x_{2i} + \dots + l_{i,i-4}x_{i-4,i} + l_{i,i-3}x_{i-3,i} \\ &\quad + l_{i,i-2}x_{i-2,i} + l_{i,i-1}x_{i-1,i} + l_{ii}x_{ii} \\ &\quad + l_{i,i+1}x_{i+1,i} + l_{i,i+2}x_{i+2,i} + \dots + l_{in}x_{ni} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \dots = l_{in} = 0$

เนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1i} = x_{2i} = x_{3i} = \dots = x_{i-1,i} = 0$

จึงทำให้ได้ว่า $w_{ii} = l_{ii}x_{ii}$

เนื่องจาก $l_{ii} = 1 = x_{ii}$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ ดังนั้น

$w_{ii} = (1)(1) = 1$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ ___(2.4)

กรณี $j = i + 3$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{i,i+3} &= \sum_{f=1}^{n} l_{if}\chi_{f,i+3} \\ &= l_{i1}\chi_{1,i+3} + l_{i2}\chi_{2,i+3} + \dots + l_{i,i-3}\chi_{i-3,i+3} + \\ &\quad l_{i,i-2}\chi_{i-2,i+3} + l_{i,i-1}\chi_{i-1,i+3} + l_{ii}\chi_{i,i+3} + \\ &\quad l_{i,i+1}\chi_{i+1,i+3} + \dots + l_{in}\chi_{n,i+3} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \dots = l_{in} = 0$

เนื่องจาก $\chi_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $\chi_{1,i+3} = \chi_{2,i+3} = \chi_{3,i+3} = \dots = \chi_{i+2,i+3} = 0$

ดังนั้น $w_{i,i+3} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-3$ __(2.5)

กรณี $j = i - 3$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{i,i+3} &= \sum_{f=1}^{n} l_{i+3,f}x_{f,i} \\ &= l_{i+3,1}x_{1i} + l_{i+3,2}x_{2i} + \dots + l_{i+3,i-3}x_{i-3,i} \\ &\quad + l_{i+3,i-2}x_{i-2,i} + l_{i+3,i-1}x_{i-1,i} + l_{i+3,i}x_{ii} \\ &\quad + l_{i+3,i}x_{ii} + l_{i+3,i+1}x_{i+1,i} + \dots + l_{i+3,n}x_{ni} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i+3,i+4} = l_{i+3,i+5} = l_{i+3,i+6} = \dots = l_{i+3,n} = 0$

เนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1i} = x_{2i} = x_{3i} = \dots = x_{i-1,i} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+2,i} = 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n-2$ ดังนั้น $l_{i+3,i+1}x_{i-1,i} = (0)\,x_{i+1,i} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+1,i} = 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$ ดังนั้น $l_{i+3,i+2}x_{i-2,i} = (0)\,x_{i+2,i} = 0$

เนื่องจาก $x_{ii} = 1 = l_{i+3,i+3}$ ดังนั้น $w_{i+3,i} = l_{i+3,i}(1) + (1)\,x_{i+3,i} = l_{i+3,i} + x_{i+3,i}$

ดังนั้น $w_{i+3,i} = l_{i+3,i} + x_{i+3,i}$

พิจารณาค่า i :

ถ้า $i = 3t$ เมื่อ $t \geq 1$ แล้ว $w_{3t+3,3t} = l_{3t+3,3t} + x_{3t+3,3t}$

เนื่องจาก $l_{3t+3,3t} = \frac{cu_t}{u_{t+1}}$ และ $x_{3t+3,3t} = x_{3(t+1),3t} = \frac{(-c)^1 u_t}{u_{t+1}} = \frac{-cu_t}{u_{t+1}}$

จะได้ว่า $w_{3t+3,3t} = \left(\frac{cu_t}{u_{t+1}}\right) + \left(\frac{-cu_t}{u_{t+1}}\right) = 0$

ถ้า $i = 3t + 1$ เมื่อ $t \geq 0$ แล้ว $w_{(3t+1)+3,3t+1} = l_{(3t+1)+3,3t+1} + x_{(3t+1)+3,3t+1}$

เนื่องจาก $l_{(3t+1)+3,3t+1} = l_{3(t+1)+1,3(t+1)-2} = \frac{cu_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}}$

และ $x_{(3t+1)+3,3t+1} = x_{3((t+1)+1)-2,3(t+1)-2} = \frac{(-c)^1 u_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}}$

จะได้ว่า $w_{(3t+1)+3,3t+1} = \left(\frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}}\right) + \left(\frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}}\right) = 0$

ถ้า $i = 3t + 2$ เมื่อ $t \geq 0$ แล้ว $w_{(3t+2)+3,3t+2} = l_{(3t+2)+3,3t+2} + x_{(3t+2)+3,3t+2}$

เนื่องจาก $l_{(3t+2)+3,3t+2} = l_{3(t+1)+2,3(t+1)-1} = \frac{cu_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}}$

และ $x_{(3t+2)+3,3t+2} = x_{3((t+1)+1)-1,3(t+1)} = \frac{(-c)^1 u_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}}$

นั่นคือ $w_{(3t+2)+3,3t+2} = \left(\frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}}\right) + \left(\frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}}\right) = 0$

ดังนั้น $w_{i+3,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n - 3$ ______(2.6)

จากสมการ (2.4) - (2.6) จึงสรุปได้ว่า $w_{ii} = 1$ สำหรับ $1 \leq i \leq n$

$w_{i,i+3} = 0$ สำหรับ $1 \leq i \leq n - 3$

$w_{i+3,i} = 0$ สำหรับ $1 \leq i \leq n - 3$ ______(2.7)

ต่อไปจะแสดงว่า $w_{ij} = 0$ ในกรณีอื่น โดยพิจารณา w_{ij} เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $j \neq i + 3$ และ $j \neq i - 3$

กรณีที่ $i < j$ โดยที่ $i + 3 \neq j$ พบว่า

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \sum_{f=1}^{n} l_{if}x_{fi} \\ &= l_{i1}x_{1j} + l_{i2}x_{2j} + \ldots + l_{i,i-4}x_{i-4,j} + l_{i,i-3}x_{i-3,j} + \\ &\quad l_{i,i-2}x_{i-2,j} + l_{i,i-1}x_{i-1,j} + l_{ii}x_{ij} + l_{i,i+1}x_{i+1,j} + \\ &\quad \ldots + l_{i,j-1}x_{j-1,j} + l_{ij}x_{jj} + l_{i,j+1}x_{j-1,j} + \ldots + \\ &\quad l_{in}x_{nj} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = \ldots = l_{in} = 0$

และเนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1j} = x_{2j} = \ldots = x_{ij} = 0$ จะได้ว่า $w_{ij} = \sum_{f=1}^{n} l_{if}x_{fi} = 0$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $w_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ โดยที่ $i \neq j + 3$

เพราะฉะนั้น โดยความสัมพันธ์ (2.7) และผลจากทั้งสองกรณีข้างต้น จึงสรุปได้ว่า $L_0X = \left[w_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า XL_0 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เพราะฉะนั้น $L_0X = XL_0 = I_n$ นั่นคือ $L_0^{-1} = X$ นั่นเอง

โดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ข้างต้น ทำให้ได้ว่า $U_0Y = YU_0 = I_n$ นั่นคือ $U_0^{-1} = Y$ ดังนั้น

$$P_n^{-1}(a,b,c) = (L_0U_0)^{-1} = U_0^{-1}L_0^{-1} = YX$$

บทแทรก 2.4 กำหนดให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 3$ จะได้ว่า

$$\det P_n^{-1}(a,b,c) \begin{cases} \dfrac{1}{u_{k+1}^{3}} & ; \quad n = 3k \\ \dfrac{1}{u_{k+1}^{2}\, u_{k+2}} & ; \quad n = 3k+1 \\ \dfrac{1}{u_{k+1}\, u_{k+2}^{2}} & ; \quad n = 3k+2 \end{cases}$$

เมื่อ $\det P_n^{-1}(a,b,c) \neq 0$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $\det P_n^{-1}(a,b,c) \neq 0$
เนื่องจาก $P_n^{-1}(a,b,c) = \dfrac{1}{\det P_n\,(a,b,c)}$ และโดยอาศัยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่าบทแทรกนี้เป็นจริง

3. สรุปผล

บทความวิจัยฉบับนี้ได้กำหนดบทนิยามของเมทริกซ์ $P_n\,(a,b,c)$ ดังบทนิยาม 1.1 ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์ชนิดหนึ่ง และพบว่าสามารถคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ดังกล่าวได้จากพจน์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด นอกจากนี้ โดยอาศัยการแยกตัวประกอบแบบแอลยูจะทำให้ได้ผกผันของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ของผกผันของเมทริกซ์ อีกด้วย

4. References

[1] Capizzano, S.S., 2003, Genearalized locally Toeplitz sequences spectral analysis and applications to discretized partial differential equations, Linear Algebra Appl. 366: 371-402.

[2] Kilic, E., 2008, On a constant-diagonals matrix, Applied Mathematics and Computation. 204(1): 184-190.

[3] Tilli, P., 1998, Locally Toeplitz sequences spectral properties and applications, Linear Algebra Appl. 278: 91-120.

[4] Witula, R. and Slota, D., 2007, On computing the determinants and inverses of some special type of tridiagonal and constant-diagonals matrices., Appl. Math. Comput. 189(1): 514-527.