วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 68 เล่มที่ 710 พฤษภาคม – สิงหาคม 2566
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

เกมลูกเต๋าฮอกกับกติกาเพิ่มเติม
Hog Dice Game with Additional Rules

DOI: 10.14456/mj-math.xxxx.x

คุณัชญ์ ศิริสมบูรณ์เวช[1] ชัญญา เล็กเจริญศรี[2] ณหทัย ฤกษ์ฤทัยรัตน์[3,*] และศิริสุดา อินสกุล[4]
[1,2,3,4]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร 10110

Kunatch Sirisomboonwech[1] Chanya Lekjaroensri[2] Nahathai Rerkruthairat[3,*] and Sirisuda Insakul[4]
[1,2,3,4] Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok 10110

Email: [1]kunatch.siri@g.swu.ac.th [2]chanya.noon@g.swu.ac.th [3]nahathai@g.swu.ac.th [4]sirisuda.toey@g.swu.ac.th

วันที่รับบทความ : 12 มีนาคม 2566 วันที่แก้ไขบทความ : 20 พฤษภาคม 2566 วันที่ตอบรับบทความ : 1 สิงหาคม 2566

บทคัดย่อ

เกมลูกเต๋าฮอกเป็นเกมลูกเต๋าที่เล่นกันอย่างแพร่หลายโดยเฉพาะในห้องเรียนที่เริ่มเรียนเรื่องความน่าจะเป็น สำหรับงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยศึกษาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกที่มีการเพิ่มกติกา 2 รูปแบบ รูปแบบแรกคือ การเพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่ทอดลูกเต๋าทุกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมดในรอบนั้น จะเรียกเกมที่มีกติกานี้ว่า เกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ อีกรูปแบบหนึ่งคือ การเพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่มีผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทุกลูกเป็นจำนวนเฉพาะ

* ผู้เขียนหลัก

ในรอบนั้น จะเรียกเกมที่มีกติกานี้ว่า เกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ การเพิ่มกติกาของผู้วิจัยทั้ง 2 รูปแบบ ได้ผลสรุปเช่นเดียวกันคือ การทอดลูกเต๋ารอบละ 2 ลูก จะทำให้ผู้เล่นได้ค่าคาดหมายของคะแนนในแต่ละรอบสูงสุด

คำสำคัญ: เกมลูกเต๋าฮอก ค่าคาดหมาย การทำให้เหมาะที่สุด

ABSTRACT

Hog dice game is a popular game of dice, especially in the classroom starting to study probability. In this research, we studied the hog dice game with two additional rules. The first type is to add 20 extra points for the player that rolls all the dice to get the same number of dice in that round. We will call the game with this rule the same-faced hog dice game. Another variation is to add 20 extra points to the player whose sum of points on all dice is a prime number in that round. This game is called the hog dice game with prime sum. The research showed that both types of games have the same conclusion, that is, rolling 2 dice will give the player the highest expected value of the score in each round.

Keywords: Hog Dice Game, Expectation, Optimization

1. บทนำ

เกมลูกเต๋าพิก (Pig Dice game) ถูกอธิบายอย่างเป็นทางการครั้งแรกโดย John Scarne ในปี ค.ศ. 1945 [1] วิธีการเล่นเกมลูกเต๋าพิก คือ ผู้เล่นสองฝ่ายผลัดกันทอดลูกเต๋าจำนวนหนึ่งลูกในแต่ละรอบ ถ้าผู้เล่นทอดลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่ง คะแนนในรอบนั้นจะกลายเป็นศูนย์ทันที แต่ถ้าลูกเต๋าขึ้นแต้มอื่น แต้มนั้นจะถูกเก็บเป็นคะแนนสะสม สำหรับแต่ละรอบเมื่อทั้งสองฝ่ายทอดลูกเต๋าแล้ว จะนำคะแนนสะสมมาเปรียบเทียบกัน ผู้เล่นฝ่ายที่มีคะแนนสะสมตามที่กำหนดจะเป็นผู้ชนะในเกมนั้น หากทั้งสองฝ่ายมีคะแนนสะสมตามที่กำหนดในรอบเดียวกัน ฝ่ายที่มีคะแนนสะสมมากกว่าจะเป็นฝ่ายชนะ แต่หากทั้งสองฝ่ายมีคะแนนสะสมเท่ากันจะทำการแข่งขั้นไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีคะแนนมากกว่า และฝ่ายนั้นจะเป็นผู้ชนะเกม

เกมลูกเต๋าพิกได้ถูกดัดแปลงไปอีกหลายรูปแบบ ([2], [3]) หนึ่งในนั้นคือ เกมลูกเต๋าฮอก (Hog Dice Game) ซึ่งในแต่ละรอบผู้เล่นสามารถเลือกจำนวนลูกเต๋าได้อย่างอิสระ กติกาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอก [4] มีรายละเอียดดังนี้

1. ผู้เล่นแต่ละฝ่ายผลัดกันทอดลูกเต๋า โดยเลือกลูกเต๋ากี่ลูกก็ได้ตั้งแต่หนึ่งลูกจนถึงจำนวนลูกเต๋าทั้งหมดที่มีอยู่ (คณะผู้วิจัยแนะนำให้มีลูกเต๋าอย่างน้อยสิบลูกสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย)

2. จำนวนลูกเต๋าที่แต่ละฝ่ายเลือกอาจแตกต่างกันไปในแต่ละรอบ

3. หากฝ่ายใดทอดลูกเต๋าแล้วมีลูกเต๋าอย่างน้อยหนึ่งลูกขึ้นแต้มหนึ่ง จะได้คะแนนในรอบนั้นเป็นศูนย์ แต่หากไม่มีลูกเต๋าลูกใดขึ้นแต้มหนึ่ง จะได้คะแนนในรอบนั้นเป็นผลรวมของแต้มที่แสดงบนหน้าลูกเต๋าในรอบนั้น

4. คะแนนในแต่ละรอบจะถูกนำมารวมกันเป็นคะแนนสะสมทั้งหมด และบันทึกไว้เป็นคะแนนสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย

5. ในแต่ละรอบ เมื่อทั้งสองฝ่ายทอดลูกเต๋าแล้ว จะนำคะแนนสะสมมาเปรียบเทียบกัน ฝ่ายที่คะแนนสะสมถึงหรือเกิน 100 คะแนน จะชนะเกม หากมีมากกว่าหนึ่งฝ่ายที่คะแนนถึงหรือเกิน 100 คะแนนในรอบเดียวกัน ฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุดจะชนะเกม และหากมีฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุดมากกว่าหนึ่งฝ่าย จะทำการแข่งขันไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีคะแนนมากกว่าและฝ่ายนั้นจะเป็นผู้ชนะเกม

ตารางที่ 1.1 แสดงตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกของทีม A และทีม B ซึ่งทีม B เป็นฝ่ายชนะเมื่อสิ้นสุดการเล่นรอบที่ 8 โดยได้คะแนนเกิน 100 คะแนนเพียงทีมเดียว

งานวิจัยเรื่อง The Pedagogy and Probability of the dice game HOG [4] ได้แสดงให้เห็นว่า การทอดลูกเต๋าแต่ละรอบในเกมลูกเต๋าฮอกจะต้องทอดลูกเต๋าจำนวน 5 หรือ 6 ลูก จึงจะได้ค่าคาดหมายของคะแนนสูงสุด สำหรับงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยศึกษาการเพิ่มกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกที่ไม่ซับซ้อนและสามารถนำไปจัดกิจกรรมพัฒนาทักษะการคิดคำนวณ วิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาได้ คณะผู้วิจัยเพิ่มกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกข้างต้น 2 รูปแบบ คือ

รูปแบบที่ 1 เพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่ทอดลูกเต๋าทุกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมดในรอบนั้น โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มนี้ เมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก และแต้มบนหน้าลูกเต๋าไม่ใช่แต้มหนึ่ง เราจะเรียกเกมที่มีกติกานี้ว่า เกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ

ตารางที่ 1.1 ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกของทีม A และ ทีม B

รอบที่	แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม A	คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม A	คะแนนสะสมของทีม A	แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม B	คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม B	คะแนนสะสมของทีม B
1	1, 5, 6	0	0	4, 5	9	9
2	4, 4, 5	13	13	2 ,3, 4, 5	14	23
3	3, 3	6	19	1	0	23
4	2, 2, 3, 4	11	30	2, 3, 3, 5, 6	19	42
5	6	6	36	5, 5	10	52
6	2, 2, 2, 4, 5	15	51	1, 1	0	52
7	5, 5, 5	15	66	2, 3, 4, 5, 6, 6	26	78
8	1, 3, 3, 5, 6, 6, 6	0	66	2, 2, 3, 3 ,4, 4, 6	24	102

รูปแบบที่ 2 เพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน ให้ฝ่ายที่มีผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทุกลูกเป็นจำนวนเฉพาะในรอบนั้น โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มเมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก และไม่มีลูกเต๋าลูกใดขึ้นแต้มหนึ่ง ซึ่งเราจะเรียกกติกานี้ว่า เกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ

ในงานวิจัยนี้จะหาจำนวนลูกเต๋าที่ควรทอดในแต่ละรอบ เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายของคะแนนสูงสุดสำหรับการเล่นเกมทั้ง 2 รูปแบบ

2. เกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ

จากกติกาเดิมของเกมลูกเต๋าฮอกที่ให้ผู้เล่นเลือกจำนวนลูกเต๋าในแต่ละรอบแตกต่างกันได้ คณะผู้วิจัยได้เพิ่มคะแนนพิเศษ 20 คะแนน จากคะแนนที่ได้จากผลรวมแต้มบนลูกเต๋า เมื่อลูกเต๋าทุกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมด จะทำให้จำนวนลูกเต๋าที่ผู้เล่นควรใช้ยังคงเป็น 5 หรือ 6 ลูก เท่าเดิมหรือไม่ คณะผู้วิจัยได้กำหนดกติกาของเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ ดังนี้

1. ผู้เล่นแต่ละฝ่ายผลัดกันทอดลูกเต๋า โดยเลือกลูกเต๋ากี่ลูกก็ได้ตั้งแต่หนึ่งลูกจนถึงจำนวนลูกเต๋าทั้งหมดที่มีอยู่ (คณะผู้วิจัยแนะนำให้มีลูกเต๋าอย่างน้อยสิบลูกสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย)

2. จำนวนลูกเต๋าที่แต่ละฝ่ายเลือกอาจแตกต่างกันไปในแต่ละรอบ

3. หากฝ่ายใดทอดลูกเต๋าแล้วมีลูกเต๋าอย่างน้อยหนึ่งลูกขึ้นแต้มหนึ่ง คะแนนในรอบนั้นจะเป็นศูนย์ แต่หากไม่มีลูกเต๋าลูกใดขึ้นแต้มหนึ่ง คะแนนในรอบนั้นจะเท่ากับผลรวมของแต้มที่แสดงบนหน้าลูกเต๋าในรอบนั้น สำหรับฝ่ายที่ทอดลูกเต๋าทุกลูกขึ้นแต้มเดียวกันทั้งหมดและแต้มบนหน้าลูกเต๋าไม่ใช่แต้มหนึ่ง ฝ่ายนั้นจะได้รับคะแนนเพิ่มพิเศษ 20 คะแนนในรอบนั้นจากคะแนนที่ได้จากผลรวมแต้มบนลูกเต๋า โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มพิเศษนี้ เมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก

4. คะแนนในแต่ละรอบจะถูกนำมารวมกันเป็นคะแนนสะสม และบันทึกไว้เป็นคะแนนสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย

5. สำหรับแต่ละรอบ เมื่อทั้งสองฝ่ายทอดลูกเต๋าแล้ว จะนำคะแนนสะสมมาเปรียบเทียบกัน ฝ่ายที่คะแนนสะสมถึงหรือเกิน 100 คะแนน จะชนะเกม หากมีมากกว่าหนึ่งฝ่ายที่คะแนนถึงหรือเกิน 100 คะแนนในรอบเดียวกัน ฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุด จะชนะเกม แต่หากมีฝ่ายที่มีคะแนนสะสมสูงสุดมากกว่าหนึ่งฝ่าย จะทำการแข่งขันไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งมีคะแนนมากกว่า และฝ่ายนั้นจะเป็นผู้ชนะเกม

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำของทีม A และ ทีม B

รอบที่	**แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม A**	**คะแนนรวมในรอบบนั้นของทีม A**	**คะแนนสะสมของทีม A**	**แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม B**	**คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม B**	**คะแนนสะสมของทีม B**
1	1, 5, 6	0	0	4, 5	9	9
2	4, 4, 5	13	13	2, 3, 4, 5	14	23
3	3, 3	26	39	1	0	23
4	2, 2, 3, 4	11	50	2, 3, 3, 5, 6	19	42
5	6	6	56	5, 5	30	72
6	2, 2, 2, 4, 5	15	71	1, 1	0	72
7	5, 5, 5	35	106	2, 3, 4, 5, 6, 6	26	98

ตารางที่ 2.1 แสดงตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำของทีม A และทีม B โดยนำผลการทอดลูกเต๋าจากตารางที่ 1.1 ซึ่งเป็นตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกมาคิดคะแนนตามกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ พบว่าทีม A จะเป็นฝ่ายชนะเมื่อสิ้นสุดการเล่นรอบที่ 7

ก่อนที่เราจะหาจำนวนลูกเต๋าที่ผู้เล่นควรทอดในแต่ละรอบ เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายของคะแนนสูงสุด เราจะพิจารณาคะแนนที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทอดลูกเต๋าจำนวนสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ ซึ่งแสดงดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ตารางแสดงคะแนนการทอดลูกเต๋าจำนวนสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ

แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 1 / **แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 2**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	0	0
2	0	24	5	6	7	8
3	0	5	26	7	8	9
4	0	6	7	28	9	10
5	0	7	8	9	30	11
6	0	8	9	10	11	32

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นว่า ผู้เล่นจะได้รับคะแนนเพิ่มพิเศษใน 5 กรณีเท่านั้น คือ กรณีที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ทั้งคู่ โดยที่ค่าเฉลี่ยของคะแนนที่ไม่ขึ้นแต้มหนึ่งจากการทอดลูกเต๋าจำนวนสองลูกในหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ เท่ากับ

$$\frac{\begin{pmatrix} (2+2)+(2+3)+(2+4)+(2+5)+(2+6)+(3+2)+(3+3)+(3+4)+(3+5)+(3+6) \\ +(4+2)+(4+3)+(4+4)+(4+5)+(4+6)+(5+2)+(5+3)+(5+4)+(5+5)+(5+6) \\ +(6+2)+(6+3)+(6+4)+(6+5)+(6+6)+(20+20+20+20+20) \end{pmatrix}}{5^2} = \frac{300}{25} = 12$$

และค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมด เท่ากับ $\frac{300}{6^2} = 8.\dot{3}$ ยิ่งไปกว่านั้น ไม่ว่าผู้เล่นจะเลือกทอดลูกเต๋าจำนวนเท่าใด ผู้เล่นจะยังคงได้รับคะแนนเพิ่มพิเศษใน 5 กรณีเช่นเดิมเท่านั้น คือ กรณีที่ลูกเต๋าทุกลูกขึ้นแต้ม 2, 3, 4, 5 หรือ 6

ต่อไปเราจะพิสูจน์บทตั้ง 2.1 เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าจำนวน n ลูกหนึ่งครั้ง ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2.2

บทตั้ง 2.1 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้ง ในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$E[\mathrm{Z}_n|Z_n \neq 0] = nE[\mathrm{Z}_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^n}$$

บทพิสูจน์ สังเกตว่า

$$E[\mathrm{Z}_n|Z_n \neq 0] = \frac{1}{5^n}\left[100 + \sum_{x_1=2}^{6} \cdots \sum_{x_n=2}^{6} (x_1 + \cdots + x_n)\right]$$

เมื่อ x_i แทน แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ i และ $n \geq 2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
E[\mathrm{Z}_2|Z_2 \neq 0] &= \frac{1}{5^2}\left[100 + \sum_{x_1=2}^{6}\sum_{x_2=2}^{6}(x_1+x_2)\right] \\
&= \frac{1}{5^2}\left[100 + \sum_{x_1=2}^{6}(x_1+2) + \sum_{x_1=2}^{6}(x_1+3) + \cdots + \sum_{x_1=2}^{6}(x_1+6)\right] \\
&= \frac{1}{5^2}\left[100 + 5(2+3+4+5+6) + 5\sum_{x_1=2}^{6} x_1\right] \\
&= 2\left(\frac{2+3+4+5+6}{5}\right) + \frac{100}{5^2}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $E[Z_1|Z_1 \neq 0] = \frac{2+3+4+5+6}{5}$ ได้ว่า

$$E[\mathrm{Z}_2|Z_2 \neq 0] = 2E[Z_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^2}$$

ให้ $l \in \mathbb{N}$ และ $l \geq 2$ สมมติว่า $E[\mathrm{Z}_l|Z_l \neq 0] = lE[\mathrm{Z}_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^l}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&E[\mathrm{Z}_{l+1}|Z_{l+1} \neq 0] \\
&\quad= \frac{1}{5^{l+1}}\left[100 + \sum_{x_1=2}^{6} \cdots \sum_{x_{l+1}=2}^{6}(x_1 + \cdots + x_{l+1})\right] \\
&\quad= \frac{1}{5^{l+1}}\left[100 + \sum_{x_1=2}^{6} \dots \sum_{x_l=2}^{6}(x_1 + x_2 + \cdots + x_l + 2)\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \cdots + \sum_{x_1=2}^{6} \dots \sum_{x_l=2}^{6}(x_1 + x_2 + \cdots + x_l + 6)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5^{l+1}}\left[100 + 5^{l}(2+3+4+5+6) + 5\sum_{x_1=2}^{6}\dots\sum_{x_l=2}^{6}(x_1+\dots+x_l)\right]$$

$$= \frac{2+3+4+5+6}{5} + \frac{1}{5^{l}}\sum_{x_1=2}^{6}\dots\sum_{x_l=2}^{6}(x_1+\cdots x_l) + \frac{100}{5^{l+1}}$$

$$= E[Z_1|Z_1 \neq 0] + \left[\frac{1}{5^{l}}\sum_{x_1=2}^{6}\dots\sum_{x_l=2}^{6}(x_1+\cdots x_l) + \frac{100}{5^{l}}\right] - \frac{100}{5^{l}} + \frac{100}{5^{l+1}}$$

$$= E[Z_1|Z_1 \neq 0] + E[Z_l|Z_l \neq 0] - \frac{100}{5^{l}} + \frac{100}{5^{l+1}}$$

$$= E[Z_1|Z_1 \neq 0] + \left(lE[Z_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^{l}}\right) - \frac{100}{5^{l}} + \frac{100}{5^{l+1}}$$

$$= (l+1)E[Z_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^{l+1}}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ได้ว่า

$$E[\mathrm{Z}_n|Z_n \neq 0] = nE[\mathrm{Z}_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^{n}}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ □

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$E(\mathrm{Z}_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left(4n + \frac{100}{5^{n}}\right)$$

และ $E(\mathrm{Z}_n)$ เป็นลำดับลด เมื่อ $n > 5$

บทพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2.1 และ $E[Z_1|Z_1 \neq 0] = 4$ จะได้ว่า

$$E(\mathrm{Z}_n) = E[Z_n|Z_n = 0]\cdot P(Z_n = 0) + E[Z_n|Z_n \neq 0]\cdot P(Z_n \neq 0)$$

$$= 0 + \left(nE[\mathrm{Z}_1|Z_1 \neq 0] + \frac{100}{5^{n}}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\left(4n + \frac{100}{5^{n}}\right)$$

ในกรณีที่ $n > 5$ จะได้ว่า $4n > \frac{5}{6}(4n+4)$

เนื่องจาก $\frac{100}{5^{n}} > \frac{5}{6}\left(\frac{100}{5^{n+1}}\right)$ ดังนั้น สำหรับ $n > 5$ จะได้ว่า

$$4n+\frac{100}{5^n}>\frac{5}{6}\left(4n+4+\frac{100}{5^{n+1}}\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(4n+\frac{100}{5^n}\right)>\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\left(4(n+1)+\frac{100}{5^{n+1}}\right)$$

ได้ว่า $E(\mathrm{Z}_n)$ เป็นลำดับลด เมื่อ $n>5$ □

กรณี n=1 ค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำเท่ากับ ค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดในเกมลูกเต๋าฮอก ซึ่งเท่ากับ $\frac{2+3+4+5+6}{6}=3.\dot{3}$ และจากทฤษฎีบท 2.2 เมื่อพิจารณาการทอดลูกเต๋าจำนวน 2 ถึง 30 ลูกในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ ค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าในหนึ่งครั้งเป็นดังตารางที่ 2.3

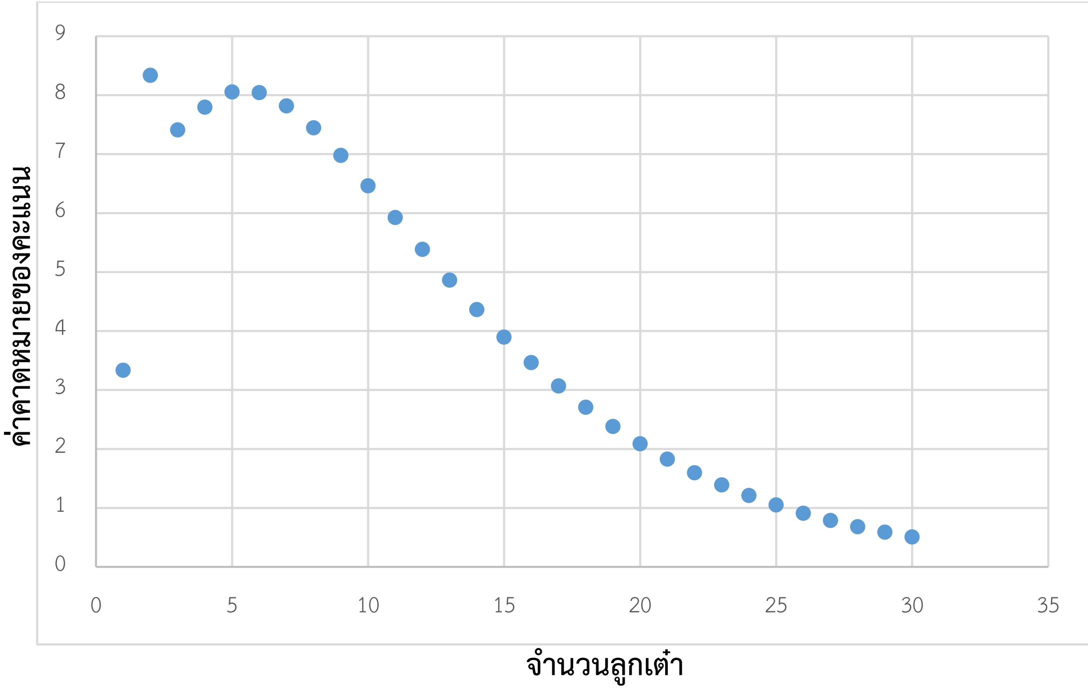
กราฟของค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าจำนวน 1 ถึง 30 ลูกในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำแสดงดังรูปที่ 2.1 จากรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าการทอดลูกเต๋าจำนวน 2 ลูกในแต่ละรอบจะมีค่าคาดหมายของคะแนนมากที่สุด รองลงมาคือการทอดลูกเต๋า 3 - 8 ลูกในแต่ละรอบ ซึ่งจำนวนลูกเต๋าในช่วงนี้จะยังทำให้ค่าคาดหมายของคะแนนค่อนข้างมาก และถ้าจำนวนลูกเต๋ามากกว่า 6 ลูก จะเห็น ได้ชัดว่าค่าคาดหมายของคะแนนลดลงเรื่อย ๆ

3. เกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ

สำหรับเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ จะใช้กติกาพื้นฐานเดียวกันกับเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ ยกเว้นกติกาข้อ 3. จะมีเงื่อนไขในการให้คะแนนเพิ่มพิเศษต่างกัน คือ ในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ จะให้คะแนนเพิ่มพิเศษ 20 คะแนน จากคะแนนที่ได้จากผลรวมแต้มบนลูกเต๋าเมื่อผลรวมของคะแนนบนหน้าลูกเต๋าทุกลูกเป็นจำนวนเฉพาะ โดยมีเงื่อนไขว่า ผู้เล่นจะได้คะแนนเพิ่มพิเศษนี้ เมื่อทอดลูกเต๋ามากกว่า 1 ลูก ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะของสองทีมแสดงดังตารางที่ 3.1 ซึ่งนำผลการทอดลูกเต๋าจากตารางที่ 1.1 มาคิดคะแนนตามกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ ซึ่งจะได้ว่าทีม A จะเป็นฝ่ายชนะ เมื่อสิ้นสุดการเล่นรอบที่ 7

ตารางที่ 2.3 แสดงค่าคาดหมายของคะแนนในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ

จำนวนลูกเต๋า (n)	**ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งลูก เท่ากับ** $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	**ความน่าจะเป็นที่ไม่มีลูกเต๋าลูกใดขึ้นแต้มหนึ่ง เท่ากับ** $\left(\frac{5}{6}\right)^n$	**ค่าคาดหมายของคะแนน เท่ากับ** $\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(4n+\frac{100}{5^n}\right)$ **เมื่อ** $n \geq 2$
1	0.16667	0.83333	3.33300
2	0.30556	0.69444	8.33333
3	0.42130	0.57870	7.40741
4	0.51775	0.48225	7.79321
5	0.59812	0.40188	8.05041
6	0.66510	0.33490	8.03969
7	0.72092	0.27908	7.81464
8	0.76743	0.23257	7.44224
9	0.80619	0.19381	6.97705
10	0.83849	0.16151	6.46022
11	0.86541	0.13459	5.92187
12	0.88784	0.11216	5.38352
13	0.90654	0.09346	4.86012
14	0.92211	0.07789	4.36165
15	0.93509	0.06491	3.89433
16	0.94591	0.05409	3.46163
17	0.95493	0.04507	3.06498
18	0.96244	0.03756	2.70439
19	0.96870	0.03130	2.37887
20	0.97392	0.02608	2.08672
21	0.97826	0.02174	1.82588
22	0.98189	0.01811	1.59403
23	0.98491	0.01509	1.38873
24	0.98742	0.01258	1.20760
25	0.98952	0.01048	1.04826
26	0.99126	0.00874	0.90849
27	0.99272	0.00728	0.78619
28	0.99393	0.00607	0.67943
29	0.99494	0.00506	0.58641
30	0.99579	0.00421	0.50553



รูปที่ 2.1 กราฟของค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าจำนวนหนึ่งถึงสามสิบลูกหนึ่งครั้ง

ตารางที่ 3.1 ตัวอย่างการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะของทีม A และ ทีม B

รอบที่	**แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม A**	**คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม A**	**คะแนนสะสมของทีม A**	**แต้มบนหน้าลูกเต๋าของทีม B**	**คะแนนรวมในรอบนั้นของทีม B**	**คะแนนสะสมของทีม B**
1	1 ,5, 6	0	0	4, 5	9	9
2	4, 4, 5	33	33	2, 3, 4, 5	14	23
3	3, 3	6	39	1	0	23
4	2, 2, 3, 4	31	70	2, 3, 3, 5, 6	39	62
5	6	6	76	5, 5	10	72
6	2, 2, 2, 4, 5	15	91	1, 1	0	72
7	5, 5, 5	15	106	2, 3, 4, 5, 6, 6	26	98

ต่อไปเราจะพิจารณาคะแนนที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทอดลูกเต๋าจำนวนสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ เพื่อเป็นแนวทางในการหาค่าคาดหมายของคะแนนในรูปทั่วไป

ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงคะแนนการทอดลูกเต๋าจำนวนสองลูกหนึ่งครั้งใน
เกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ

แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 1 / แต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	4	25	6	27	8
3	0	25	6	27	8	9
4	0	6	27	8	9	10
5	0	27	8	9	10	31
6	0	8	9	10	31	12

จากตารางที่ 3.2 จะเห็นว่า จำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ เท่ากับ 8 วิธี คือ $(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,3),(5,2),(5,6)$ และ $(6,5)$ โดยค่าเฉลี่ยของคะแนนที่ไม่เกิดแต้มหนึ่งจากการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ เท่ากับ

$$\frac{\begin{pmatrix}(2+2)+(2+3)+(2+4)+(2+5)+(2+6)+(3+2)+(3+3)+(3+4)+(3+5)+(3+6)\\+(4+2)+(4+3)+(4+4)+(4+5)+(4+6)+(5+2)+(5+3)+(5+4)+(5+5)+(5+6)\\+(6+2)+(6+3)+(6+4)+(6+5)+(6+6)+(20+20+20+20+20+20+20+20)\end{pmatrix}}{5^2}=\frac{360}{25}=14.4$$

และค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดเท่ากับ $\frac{360}{6^2}=10$

ต่อไปเราจะหาค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ เมื่อทราบว่าคะแนนนี้ไม่เท่ากับศูนย์ เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าจำนวน n ลูกหนึ่งครั้ง ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ใน บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 ตามลำดับ

บทตั้ง 3.1 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n^* แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ และ k_n แทนจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มของลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$E[Z_n^* \mid Z_n^* \neq 0] = nE[Z_1^* \mid Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_n}{5^n}$$

บทพิสูจน์ ให้ x_i แทนแต้มบนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ i

สังเกตว่า สำหรับจำนวนนับ m ซึ่ง $m \geq 2$

$$E[Z_m^* \mid Z_m^* \neq 0] = \frac{1}{5^m}\left[20k_m + \sum_{x_1=2}^{6} \cdots \sum_{x_m=2}^{6} (x_1 + \cdots + x_m)\right]$$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในบทตั้ง 2.1 และ $E[Z_1^* \mid Z_1^* \neq 0] = E[Z_1 \mid Z_1 \neq 0]$ จะได้ว่า

$$E[Z_2^* \mid Z_2^* \neq 0] = \frac{1}{5^2}\left[(20)(8) + \sum_{x_1=2}^{6} \sum_{x_2=2}^{6} (x_1 + x_2)\right]$$

$$= 2E[Z_1^* \mid Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_2}{5^2}$$

ให้ $l \in \mathbb{N}$ และ $l \geq 2$ สมมติว่า $E[Z_l^* \mid Z_l^* \neq 0] = lE[Z_1^* \mid Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_l}{5^l}$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในบทตั้ง 2.1 ได้ว่า

$$E[Z_{l+1}^* \mid Z_{l+1}^* \neq 0] = (l+1)E[Z_1^* \mid Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_{l+1}}{5^{l+1}}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า

$$E[Z_n^* \mid Z_n^* \neq 0] = nE[Z_1^* \mid Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_n}{5^n}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ Z_n^* แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ และ k_n แทนจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มของลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$E(Z_n^*) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{20k_n}{5^n}\right)$$

บทพิสูจน์ โดยบทตั้ง 3.1 และ $E[Z_1^* \,|Z_1^* \neq 0] = E[\mathrm{Z}_1|Z_1 \neq 0] = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(Z_n^*) &= E[Z_n^*|Z_n^* = 0]P(Z_n^* = 0) + E[Z_n^*|Z_n^* \neq 0]P(Z_n^* \neq 0) \\ &= 0 + \left(nE[Z_1^* \,|Z_1^* \neq 0] + \frac{20k_n}{5^n}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{20k_n}{5^n}\right) \end{aligned}$$

□

สังเกตว่า การหาจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มของการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ เมื่อ $n \geq 2$ สมนัยกับการหาผลรวมของจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

โดยที่ x_i แทนแต้มของลูกเต๋าลูกที่ i และ p แทนจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $2 < p < 6n$
ดังนั้น สำหรับแต่ละ p สามารถหาจำนวนผลเฉลยของสมการข้างต้นได้ โดยใช้หลักการไม้เท้าและดวงดาว (stars and bars) เช่น กรณี $n = 4$ และ $p = 19$ จะหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ เมื่อ $2 \leq x_i \leq 6$ และ $i = 1, 2, 3, 4$ ได้ดังนี้

ให้ $y_i = x_i - 2$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, 4$

จะได้ว่า $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ เมื่อ $0 \leq y_i \leq 4$

ให้ U แทนเซตของคำตอบของสมการ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ เมื่อ $y_i \geq 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, 4$

ให้ $A_i = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in U |\, y_i \geq 5\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, 4$

โดยหลักการไม้เท้าและดวงดาว จะได้

$$S_1 := |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = (4)\binom{6 + (4-1)}{4} = (4)\binom{9}{4} = 336$$

$$\begin{aligned} S_2 &:= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &= (6)\binom{1 + (4-1)}{1} = (6)\binom{4}{1} = 6 = 24 \end{aligned}$$

$$S_3 := |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

และ $|U| = \binom{11 + (4-1)}{11} = \binom{14}{11} = 364$

โดยหลักการเพิ่มเข้าตัดออก จะได้จำนวนผลเลฉลยที่ต้องการเท่ากับ $364 - 336 + 24 - 0 = 52$

สำหรับกรณีอื่น ๆ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ค่าของ k_n และค่าของ $E(Z_n^*)$ เมื่อ $n = 2, 3, \ldots, 10$ ดังตารางที่ 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ

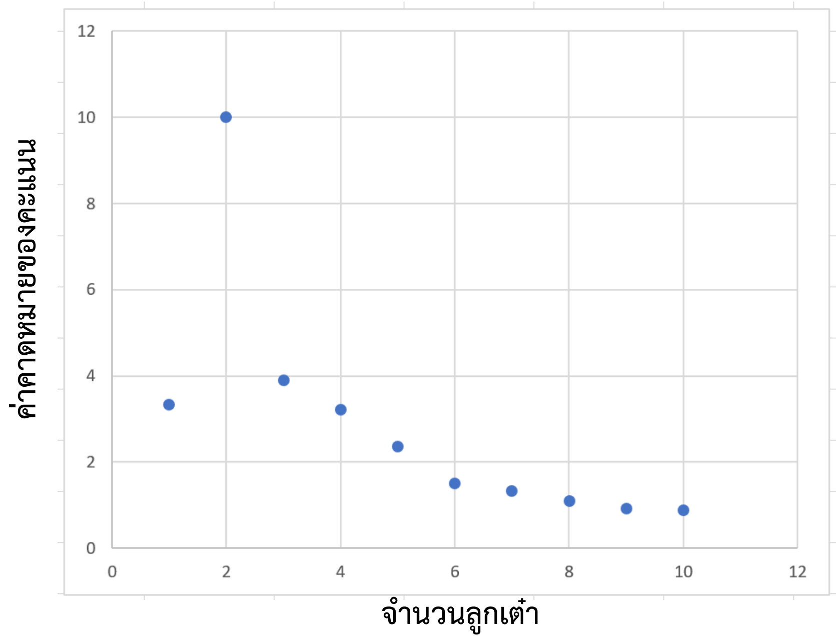
ตารางที่ 3.2 ค่าของ k_n เมื่อ $n = 2, 3, \ldots, 10$

	จำนวนเฉพาะที่เป็นไปได้ (p)															k_n
จำนวนลูกเต๋า (n)	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**53**	**59**	
2	2	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
3	-	3	18	18	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	42
4	-	-	20	52	80	52	4	-	-	-	-	-	-	-	-	208
5	-	-	5	35	255	365	255	5	-	-	-	-	-	-	-	920
6	-	-	-	6	246	666	1686	666	246	-	-	-	-	-	-	3516
7	-	-	-	-	84	455	3535	7875	6055	455	7	-	-	-	-	18466
8	-	-	-	-	8	120	3144	29400	37080	18320	3144	784	8	-	-	92008
9	-	-	-	-	-	9	1278	48879	93600	175725	93600	48879	6030	9	-	468009
10	-	-	-	-	-	-	220	41470	118360	693450	837100	693450	264220	10890	10	2659170

ตารางที่ 3.3 ค่า $E(Z_n^*)$ เมื่อ $n = 2, 3, \dots, 10$

จำนวนลูกเต๋า (n)	**ค่าคาดหมายของคะแนนเท่ากับ** $\left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{20k_n}{5^n}\right)$
2	10
3	3.889
4	3.201
5	2.366
6	1.507
7	1.319
8	1.096
9	0.929
10	0.880

กราฟของค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าจำนวนหนึ่งถึงสิบลูกหนึ่งครั้งในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ แสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 กราฟของค่าคาดหมายของคะแนนจากการทอดลูกเต๋าจำนวนหนึ่งถึงสิบลูกหนึ่งครั้ง

รูปที่ 3.1 แสดงให้เห็นว่ากลยุทธ์ที่ดีที่สุดที่ใช้ในการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ คือ การทอดลูกเต๋าหนึ่งถึงห้าลูกในแต่ละครั้ง ซึ่งจะได้ค่าคาดหมายของคะแนนค่อนข้างสูง

4. กรณีทั่วไป

จากเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำและเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ กรณีคะแนนเพิ่มพิเศษเท่ากับ m คะแนน สามารถพิสูจน์ได้โดยเปลี่ยนคะแนนจาก 20 คะแนนเป็น m คะแนน และได้ทฤษฎีบทขยายของทฤษฎีบทที่ 2.2 และ 3.2 เป็นทฤษฎีบท 4.1 และ 4.2 ตามลำดับ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $\mathrm{Z}_{n,m}$ แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งและมีคะแนนเพิ่มพิเศษ m คะแนน ในเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$E(\mathrm{Z}_{n,m}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{5m}{5^n}\right)$$

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $Z^*_{n,m}$ แทนคะแนนจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งและมีคะแนนเพิ่มพิเศษ m คะแนน ในเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะ และ k_n แทนจำนวนวิธีเล่นเกมที่ผลรวมแต้มจากการทอดลูกเต๋า n ลูกหนึ่งครั้งเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$E(Z^*_{n,m}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(4n + \frac{mk_n}{5^n}\right)$$

ผู้สนใจสามารถหาจำนวนลูกเต๋าที่ควรทอดในแต่ละรอบ เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายของคะแนนในแต่ละรอบสูงสุดได้ โดยการเขียนกราฟของ $E(\mathrm{Z}_{n,m})$ และ $E(Z^*_{n,m})$ ซึ่งอาจได้ข้อสรุปแตกต่างจากการมีคะแนนเพิ่มพิเศษ 20 คะแนนในบางค่า m

5. ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่าการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำและเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะได้ผลสรุปเช่นเดียวกันคือ การทอดลูกเต๋ารอบละสองลูก จะทำให้ผู้เล่นได้ค่าคาดหมายของคะแนนในแต่ละรอบสูงสุด อย่างไรก็ตามสำหรับการเล่นเกมในสถานการณ์จริง การที่ผู้เล่นจะตัดสินใจเลือกจำนวนลูกเต๋าในการทดแต่ละรอบนั้นจะต้องพิจารณาคะแนนสะสมของผู้เล่นทุกฝ่ายในแต่ละรอบประกอบกันด้วย เนื่องจากการทอดลูกเต๋าจำนวนมากขึ้นจะทำให้ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งลูกมากขึ้นด้วย นั่นคือเมื่อจำนวนลูกเต๋ามากขึ้น โอกาสที่ผู้เล่นจะได้คะแนนเป็นศูนย์ในรอบนั้นก็จะมากขึ้นด้วย

เนื่องจากกติกาการเล่นเกมลูกเต๋าฮอกหน้าซ้ำและเกมลูกเต๋าฮอกกับผลรวมจำนวนเฉพาะไม่ซับซ้อน ผู้อ่านอาจนำไปจัดกิจกรรมเพื่อทบทวนความรู้เรื่องการบวกจำนวนเต็ม หรือส่งเสริมการเรียนรู้เรื่องจำนวนเฉพาะในระดับประถมศึกษา สำหรับการจัดกิจกรรมให้เหมาะสมกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ผู้อ่านอาจศึกษาการเปลี่ยนกติกาการให้คะแนนเพิ่มพิเศษจากค่าคงที่ที่ 20 คะแนนเพียงค่าเดียวเป็นการให้คะแนนเพิ่มพิเศษเป็นค่าคงที่มากกว่าหนึ่งค่าหรือเพิ่มตามตามจำนวนลูกเต๋า เช่น 10^n หรือ n^2

เอกสารอ้างอิง

[1] Scarne, J. (1945). *Scarne on Dice*. Harrisburg, Pennsylvania: Military Service Publishing Co.

[2] Neller, T. W. and Clifton G. M. P. (2004). Optimal Play of the Dice Game Pig. *The UMAP Journal*, 25 (1), p. 25 – 47.

[3] Bohsn, J. F. and Schultz, J. L. (1996). Revisiting and Extending the Hog Game. *The Mathematics Teacher*, 89 (9), p. 728 – 733.

[4] Larry, F. and Fred, M. (2003). The Pedagogy and Probability of the Dice Game Hog. *Journal of Statistics Education*, 11 (2), DOI : 10.1080/10691898.2003.11910708.