P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 31 ฉบับที่ 4 (กรกฎาคม-สิงหาคม 2566) หน้า [47-58]

โครงสร้างของกึ่งกรุป RG
On Structure of RG-Semigroups

ปุณชญา พัฒนางกูร*, ปาลิดา สุชาติพงษ์, วศิน สุภากุล, ชุติมา เผือกสวัสดิ์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต
จังหวัดปทุมธานี 12120
Poonchayar Patthanangkoor*, Palida Suchatphong, Chutima Phueaksawat,
Wasin Supakul
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Pathum Thani 12120
Received 27 January 2023; Received in revised 20 June 2023; Accepted 28 June 2023

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยฉบับนี้ได้ศึกษาโครงสร้างของกึ่งกรุป RG ซึ่งจะได้ว่าทุกริงสามารถนิยามเป็นกึ่งกรุป RG ได้ และยังศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของ RG-ไอดีลของกึ่งกรุป RG อีกทั้ง ยังได้ศึกษาโครงสร้างของความสัมพันธ์สมภาคบนกึ่งกรุป RG และสร้างกึ่งกรุป RG ผลหารอีกด้วย นอกจากนี้ ยังศึกษาโครงสร้างของสาทิสสัณฐานและสมสัณฐานบนกึ่งกรุป RG ซึ่งทำให้เกิดสมบัติบางประการเช่นกัน

คำสำคัญ: กึ่งกรุป RG; RG-ไอดีล; สาทิสสัณฐาน; สมสัณฐาน

Abstract

In this paper, we introduce the notion of RG-semigroup. We prove that every ring determines an RG-semigroup. We also introduce the notions of RG-ideal of RG-semigroup, and we investigate RG-ideal properties. Moreover, we introduce the notion of a congruence relation on RG-semigroup, and we construct the quotient RG-semigroup. Furthermore, we introduce the notion of RG-semigroup homomorphism and RG-semigroup isomorphism, and we provide some of its properties.

Keywords: RG-semigroup; RG-ideal; homomorphism; isomorphism

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th **doi:** ....

1. บทนำ

เมื่อปี ค.ศ. 2006 Kyung Ho Kim ได้ศึกษาเรื่องโครงสร้างของกึ่งกรุป KS ซึ่งทำให้ทราบโครงสร้างของกึ่งกรุป KS ซึ่งเป็นคลาสของพีชคณิตคลาสใหม่ที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต BCK และกึ่งกรุป นอกจากนี้ยังทำให้ทราบถึงสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุป KS รวมถึงสมบัติต่าง ๆ ของไอดีลของกึ่งกรุป KS ไอดีลของกึ่งกรุป KS อย่างเข้ม ความสัมพันธ์สมภาคบนกึ่งกรุป KS และทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับสาทิสสัณฐานและสมสัณฐานบนกึ่งกรุป KS อีกด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 R.A.K Omar ได้ศึกษาโครงสร้างของพีชคณิต RG และทำให้ทราบถึงสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิต RG อีกด้วย ดังนั้นบทความวิจัยฉบับนี้จึงมีความสนใจที่จะศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของคลาสของพีชคณิตอีกคลาสหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิตอื่นและกึ่งกรุป ซึ่งบทความวิจัยนี้จะศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุป RG (RG-semigroup) เมื่อพีชคณิต RG นิยามดังนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิตชนิด $(2,0)$ จะเรียก $(X;*,0)$ ว่าพีชคณิต RG (RG-algebra) ก็ต่อเมื่อ

(i) $x*0=x$

(ii) $x*y=(x*z)*(y*z)$

และ (iii) ถ้า $x*y=y*x=0$ แล้ว $x=y$

สำหรับทุก $x,y,z\in X$

จากบทนิยาม 1.1 ทำให้ได้สมบัติพื้นฐานของพีชคณิต RG ดังนี้

บทตั้ง 1.1 (Omar, 2014) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต RG จะได้ว่า สำหรับทุก $x,y,z\in X$

(i) $0*(y*x)=x*y$

(ii) $0*(0*x)=x$

(iii) $x*(x*y)=y$

(iv) $x*y=(z*y)*(z*x)$

(v) $x*y=0$ ก็ต่อเมื่อ $y*x=0$

(vi) $(x*y)*(0*y)$

$=(x*(0*y))*y=x$

(vii) $x*(x*(x*y))=x*y$

(viii) $(x*y)*z$

$=(x*y)*((z*y)*(0*y))$

$=((x*z)*z)*(y*z)$

$=((x*y)*y)*(z*y)=(x*z)*y$

บทตั้ง 1.2 (Omar, 2014) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต RG จะได้ว่า สำหรับทุก $x,y,z\in X$

(i) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

(ii) $(x*(x*y))*y=0$

(iii) $x*x=0$

(iv) ถ้า $x*0=0$ แล้ว $x=0$

2. ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาโครงสร้างของกึ่งกรุป RG และสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุป RG เมื่อกึ่งกรุปนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X,\cdot)$ ว่า*กึ่งกรุป (semigroup)* ก็ต่อเมื่อ $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

โดยตลอดบทความวิจัยนี้จะกำหนดให้ $(X;*,\cdot,0)$ เป็นกึ่งกรุป RG ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิตชนิด $(2,0)$ จะเรียก $(X;*,\cdot,0)$ ว่ากึ่งกรุป RG *(RG-semigroup)* ก็ต่อเมื่อ

(i) $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต RG

(ii) $(X,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

และ (iii) การดำเนินการ “ $\cdot$ ” มีสมบัติการแจกแจง (ทั้งสองด้าน) บนการดำเนินการ “ $*$ ” กล่าวคือ

$x\cdot(y*z)=(x\cdot y)*(x\cdot z)$ และ $(x*y)\cdot z=(x\cdot z)*(y\cdot z)$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกจะเขียนแทน $x\cdot y$ ด้วย xy และเขียนแทน $(X;*,\cdot,0)$ เป็นกึ่งกรุป RG ด้วย X เป็นกึ่งกรุป RG

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ $(R;+,\cdot)$ เป็นริงที่มี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ สำหรับการดำเนินการ $+$ และนิยามการดำเนินการ $*$ บน R ดังนี้ $x*y=x+(-y)=x-y$ สำหรับทุก $x,y\in R$ จะได้ว่า $(R;*,\cdot,0)$ เป็นกึ่งกรุป RG

<u>พิสูจน์</u> ให้ $(R;+,\cdot)$ เป็นริงที่มี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการดำเนินการ $+$ และให้ $x,y,z\in R$ จะได้ว่า $x*0=x+(-0)=x$ และ $(x*z)*(y*z)=(x-z)-(y-z)=x-z-y+z=x-y=x*y$ และถ้า $x*y=0=y*x$ แล้ว $x-y=0=y-x$ ดังนั้น $x=y$ จึงได้ว่า $(R;*,0)$ เป็นพีชคณิต RG และเนื่องจาก $(R;+,\cdot)$ เป็นริง ดังนั้น $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป นอกจากนี้ ยังได้ว่า $x(y*z)=x(y-z)=(xy)-(xz)=(xy)*(xz)$ และ $(x*y)z=(x-y)z=(xz)-(yz)=(xz)*(yz)$ ดังนั้น $(R;*,\cdot,0)$ เป็นกึ่งกรุป RG

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า

(i) $0x=x0=0$ สำหรับทุก $x\in X$

(ii) ถ้า $x*y=0$ แล้ว $xz*yz=0$ และ $zx*zy=0$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

<u>พิสูจน์</u> จากบทตั้ง 1.2 และบทนิยาม 2.2 ทำให้ได้ว่า
(i) ให้ $x\in X$ จะได้ว่า $0x=(x*x)x=(xx)*(xx)=0$ และ $x0=x(x*x)=(xx)*(xx)=0$
(ii) ให้ $x,y,z\in X$ และ $x*y=0$ ดังนั้น $(x*y)z=0z=0$ และ $z(x*y)=z0=0$ นั่นคือ $xz*yz=0$ และ $zx*zy=0$

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง

ถ้า $xa\in A$ สำหรับทุก $x\in X$ และทุก $a\in A$ แล้วจะเรียก A ว่า*เสถียรทางซ้าย (left stable)*

และ ถ้า $ax\in A$ สำหรับทุก $x\in X$ และทุก $a\in A$ แล้วจะเรียก A ว่า*เสถียรทางขวา (right stable)* ในกรณีที่ A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้ายและเสถียรทางขวา จะเรียกว่า A ว่า*เสถียรสองด้าน (two–sided stable)* หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *เสถียร (stable)*

หมายเหตุ : จะได้ว่า $0\in X$ และถ้า A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้าย (หรือทางขวา) ของ X แล้ว $0\in A$

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง

จะเรียก A ว่า *RG-ไอดีลทางซ้าย (RG-left ideal)* ของ X ก็ต่อเมื่อ

(i) A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้ายของ X

และ (ii) ถ้า $x*y\in A$ และ $0*x\in A$ แล้ว $0*y\in A$ สำหรับทุก $x,y\in X$

จะเรียก A ว่า *RG-ไอดีลทางขวา (RG-right ideal)* ของ X ก็ต่อเมื่อ

(i) A เป็นเซตที่เสถียรทางขวาของ X

และ (ii) ถ้า $x*y\in A$ และ $0*x\in A$ แล้ว $0*y\in A$ สำหรับทุก $x,y\in X$

ในกรณีที่ A เป็น RG-ไอดีลทางซ้ายและ RG-ไอดีลทางขวาของ X จะเรียก A ว่า *RG-ไอดีลสองด้าน (two–sided RG-ideal)* ของ X หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *RG-ไอดีล (RG-ideal)* ของ X

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า A_1 และ A_2 เป็น RG-ไอดีลของ X แล้ว $A_1\cap A_2$ เป็น RG-ไอดีลของ X

<u>พิสูจน์</u> ให้ A_1 และ A_2 เป็น RG-ไอดีลของ X และให้ $x,y\in X$ และ $a\in A_1\cap A_2$ ดังนั้น $a\in A_1$

และ $a \in A_2$ จะได้ว่า $xa, ax \in A_1$ และ $xa, ax \in A_2$ ดังนั้น $xa, ax \in A_1 \cap A_2$ และ $x * y \in A_1 \cap A_2$ เพราะฉะนั้น $x * y \in A_1$, $0 * x \in A_1$ และ $x * y \in A_2, 0 * x \in A_2$ จะเห็นว่า $0 * x \in A_1 \cap A_2$ และจะได้ว่า $0 * y \in A_1$ และ $0 * y \in A_2$ ดังนั้น $0 * y \in A_1 \cap A_2$ เพราะฉะนั้น $A_1 \cap A_2$ เป็น RG-ไอดีลของ X

บทนิยาม 2.5 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง
จะเรียก A ว่า*ไอดีลพีทางซ้าย (left P-ideal)* ของ X ก็ต่อเมื่อ

(i) A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้ายของ X และ (ii) ถ้า $(x * y) * z \in A$ และ $0 * (x * z) \in A$ แล้ว $0 * (y * z) \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จะเรียก A ว่า*ไอดีลพีทางขวา (right P-ideal)* ของ X ก็ต่อเมื่อ

(i) A เป็นเซตที่เสถียรทางขวาของ X และ (ii) ถ้า $(x * y) * z \in A$ และ $0 * (x * z) \in A$ แล้ว $0 * (y * z) \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ในกรณีที่ A เป็นไอดีลพีทางซ้ายและไอดีลพีทางขวา จะเรียก A ว่าเป็นไอดีลพี (P-ideal) ของ X

ทฤษฎีบท 2.3 ทุกไอดีลพีของกึ่งกรุป RG เป็น RG-ไอดีล

<u>พิสูจน์</u> ให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นไอดีลพีของ X สมมติให้ $x * y \in A$ และ $0 * x \in A$ จะได้ว่า $(x * y) * 0 = x * y \in A$ และ $0 * (x * 0) = 0 * x \in A$ เนื่องจาก $0 * (y * 0) = 0 * y \in A$ ดังนั้น A เป็น RG-ไอดีลของ X

บทนิยาม 2.6 กำหนดให้ $(X; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่าเป็น*กึ่งกรุป RG ย่อย (Sub RG-semigroup)* ของ X ก็ต่อเมื่อ $(S; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG

บทนิยาม 2.7 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียก $1 \in X$ ว่าเอกลักษณ์ (unity) ของ X ก็ต่อเมื่อ $1x = x1 = x$ สำหรับทุก $x \in X$ และจะเรียก $x \in X$ ว่ายูนิต (unit) ของ X ก็ต่อเมื่อ $x * X = X$ เมื่อ $x * X = \{x * y \mid y \in X\}$

บทตั้ง 2.2 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X และ A เป็น RG-ไอดีลของ X จะได้ว่า ถ้า $x \in A$ แล้ว $0 * x \in A$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x \in A$ ดังนั้น $0 * 1 \in X$ จาก A เป็นเซตที่เสถียร ดังนั้น $0 * x = (x0) * (x1) = x \cdot (0 * 1) \in A$

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X จะได้ว่า

(i) ถ้า A เป็น RG-ไอดีลของ X แล้ว A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

(ii) ถ้า A เป็นไอดีลพีของ X แล้ว A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

<u>พิสูจน์</u> (i) สมมติให้ A เป็น RG-ไอดีลของ X และ $x, y, z \in A$ ดังนั้น $0 = x \cdot 0 \in A$ และ $xy \in A$ โดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า $0 * y \in A$ จากบทตั้ง 1.1 (iii) จะได้ว่า $y * (y * x) = x \in A$ ทำให้ได้ว่า $0 * (y * x) \in A$ และจากบทตั้ง 1.1 (i) จะได้ว่า $0 * (y * x) = x * y$ ดังนั้น $x * y \in A$ เนื่องจาก $A \subseteq X$ จึงได้ว่า $x, y, z \in X$ ดังนั้น $(A; *, 0)$ เป็นพีชคณิต RG และ $(A, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป นอกจากนี้ยังได้ว่า $x \cdot (y * z) = (xy * xz)$ และ $(x * y) \cdot z = (xz * yz)$ จึงสรุปได้ว่า A เป็นกึ่งกรุป RG เพราะฉะนั้น A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

(ii) สมมติให้ A เป็นไอดีลพีของ X จะได้ว่า A เป็น RG-ไอดีลของ X อาศัยข้อ (i) จึงได้ว่า A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

บทนิยาม 2.8 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียก X ว่า*กึ่งกรุป RG เชิงเดียว (simple RG-semigroup)* ก็ต่อเมื่อ RG-ไอดีลทางซ้ายของ X มีเพียง $\{0\}$ และ X เท่านั้น และจะเรียก X ว่า*กึ่งกรุป RG แท้ (proper RG-semigroup)* ก็ต่อเมื่อ $x*X$ เป็น RG-ไอดีลทางซ้ายของ X สำหรับทุก $x\in X$ เมื่อ $x*X=\{x*y \mid y\in X\}$

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ $(X;*,\cdot,0)$ เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียก X ว่า*มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน (weakly associative)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x,y,z\in X$ จะมี $w\in X$ ที่ทำให้ $(x*y)*z=x*w$ จะเรียก X ว่า*มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative)* ก็ต่อเมื่อ $(x*y)*z=x*(y*z)$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อนแล้ว X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน และ $x\in X$ สมมติให้ $a\in x*X$ และ $x',y'\in X$ จาก $a\in x*X$ จะมี $y\in X$ ที่ $a=x*y$ ดังนั้น $x'a=x'(x*y)=(x'x)*(x'y)=(x*(x'y))*(x*(x'x))$ เนื่องจาก X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน จะได้ว่ามี $w\in X$ ที่ทำให้ $(x*(x'y))*(x*(x'x))=x*w$ นั่นคือ $x'a=x*w\in x*X$ จึงสรุปได้ว่า $x*X$ เป็นเซตที่เสถียรทางซ้าย

สมมติให้ $a*b\in x*X$ และ $0*a\in x*X$ จะได้ว่า $a*b=x*z$ สำหรับบาง $z\in X$ ดังนั้น $0*b=(a*b)*(a*0)=(x*z)*a=x*u$ สำหรับบาง $u\in X$ นั่นคือ $0*b\in x*X$ จึงได้ว่า $x*X$ เป็น RG-ไอดีลทางซ้ายของ X เพราะฉะนั้น X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า X เป็นกึ่งกรุป RG เชิงเดียวและเป็นกึ่งกรุป RG แท้ แล้วทุกสมาชิกของ X เป็นยูนิตของ X

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ X เป็นกึ่งกรุป RG เชิงเดียวและเป็นกึ่งกรุป RG แท้ จะเห็นได้ว่า 0 เป็นยูนิตของ X ให้ $x\in X-\{0\}$ เนื่องจาก X เป็นกึ่งกรุป RG แท้ จะได้ว่า $x*X$ เป็น RG-ไอดีลทางซ้ายของ X เนื่องจาก X เป็นกึ่งกรุป RG เชิงเดียว จะได้ว่า $x*X=\{0\}$ หรือ $x*X=X$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

สมมติให้ $x*X=\{0\}$ จะได้ว่า $x*0=0$ เนื่องจาก $x*0=x$ จะได้ว่า $x=0$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $x*X\neq\{0\}$ จึงทำให้ $x*X=X$ นั่นคือ x เป็นยูนิตของ X

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้าทุกสมาชิกของ X เป็นยูนิตของ X แล้ว X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ทุกสมาชิกของ X เป็นยูนิตของ X ดังนั้น $x*X=X$ สำหรับทุก $x\in X$ เนื่องจาก X เป็น RG-ไอดีลทางซ้ายของ X จึงได้ว่า $x*X$ เป็น RG-ไอดีลทางซ้ายของ X ดังนั้น X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

ทฤษฎีบท 2.8 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อนและ $x,y\in X$ ถ้า $x*y$ เป็นยูนิตของ X แล้ว x เป็นยูนิตของ X

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ $x*y$ เป็นยูนิตของ X นั่นคือ $(x*y)*X=X$ ให้ $a\in X$ จะได้ว่า $a\in(x*y)*X$ จึงได้ว่ามี $k\in X$ ที่ทำให้ $a=(x*y)*k$ เนื่องจาก X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน ดังนั้น จะมี $w\in X$ ที่ทำให้ $a=(x*y)*k=x*w$ นั่นคือ $a\in x*X$ ดังนั้น $X\subseteq x*X$ เพราะว่า $x*X\subseteq X$ จึงได้ว่า $x*X=X$ จึงสรุปได้ว่า x เป็นยูนิตของ X

บทนิยาม 2.10 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X

(i) ρ เป็น*ความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางขวา (right compatible relation)* ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y)\in\rho$ แล้ว

$(x*z, y*z) \in \rho$ และ $(xz, yz) \in \rho$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(ii) ρ เป็น*ความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางซ้าย (left compatible relation)* ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in \rho$ แล้ว $(z*x, z*y) \in \rho$ และ $(zx, zy) \in \rho$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(iii) ρ เป็น*ความสัมพันธ์เข้ากันได้ (compatible relation)* ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in \rho$ และ $(u, v) \in \rho$ แล้ว $(x*u,\ y*v) \in \rho$ และ $(xu, yv) \in \rho$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$

(iv) ถ้า ρ เป็น*ความสัมพันธ์สมมูลที่เข้ากันได้ (compatible equivalence relation)* แล้วจะเรียก ρ ว่า*ความสัมพันธ์สมภาค (congruence relation)*

ทฤษฎีบท 2.9 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X จะได้ว่า ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาค ก็ต่อเมื่อ ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทั้งทางซ้ายและทางขวา

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะได้ว่า ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้บน X

กำหนดให้ $x, y \in X$ โดยที่ $(x, y) \in \rho$ และ $z \in X$ เนื่องจาก ρ มีสมบัติสะท้อน จึงได้ว่า $(z, z) \in \rho$ จากบทนิยาม 2.10 (iii) จะได้ว่า $(x*z, y*z) \in \rho$ และ $(xz, yz) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางขวา ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $(z*x, z*y) \in \rho$ และ $(zx, zy) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางซ้าย

ในทางกลับกันสมมติให้ ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทั้งทางขวาและทางซ้าย และกำหนดให้ $x, y, u, v \in X$ โดยที่ $(x, y) \in \rho$ และ $(u, u) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางขวา และ $(y, y) \in \rho$ จึงได้ว่า $(x*u, y*u) \in \rho$ และ $(xu, yu) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางซ้าย และ $(y, y) \in \rho$ จึงได้ว่า $(y*u, y*v) \in \rho$ และ $(yu, yv) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X ดังนั้น ρ มีสมบัติถ่ายทอด จึงได้ว่า $(x*u, y*v) \in \rho$ และ $(xu, yv) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ นั่นคือ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาค

บทนิยาม 2.11 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะนิยาม $x\rho := \{y \in X \mid (x, y) \in \rho\}$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $X/\rho := \{x\rho \mid x \in X\}$ จะเรียก X/ρ ว่า *กึ่งกรุป RG ผลหาร (quotient RG-semigroup)*

ทฤษฎีบท 2.10 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะได้ว่า $(X/\rho; *', \cdot', 0\rho)$ เป็นกึ่งกรุป RG เมื่อ $*'$ และ $\cdot'$ เป็นการดำเนินการบน X/ρ ที่กำหนดโดย $x\rho *' y\rho = (x*y)\rho$ และ $(x\rho)\cdot'(y\rho) = (xy)\rho$ สำหรับทุก $x\rho, y\rho \in X/\rho$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $*' : X/\rho \times X/\rho \to X/\rho$ และ $\cdot' : X/\rho \times X/\rho \to X/\rho$ นิยามโดย

$*'(x\rho, y\rho) = (x\rho) *' (y\rho)$

$= (x * y)\rho$ สำหรับทุก $x\rho, y\rho \in X/\rho$

และ $\cdot'(x\rho, y\rho) = (x\rho) \cdot' (y\rho)$

$= (xy)\rho$ สำหรับทุก $x\rho, y\rho \in X/\rho$

กำหนดให้ $(x_1\rho, y_1\rho), (x_2\rho, y_2\rho) \in X/\rho \times X/\rho$ โดยที่ $(x_1\rho, y_1\rho) = (x_2\rho, y_2\rho)$

นั่นคือ $x_1\rho = x_2\rho$ และ $y_1\rho = y_2\rho$

ดังนั้น $*'(x_1\rho, y_1\rho) = x_1\rho *' y_1\rho = x_2\rho *' y_2\rho$ $= *'(x_2\rho, y_2\rho)$

และ $\cdot'(x_1\rho, y_1\rho) = x_1\rho \cdot' y_1\rho = x_2\rho \cdot' y_2\rho$ $= \cdot'(x_2\rho, y_2\rho)$

ดังนั้น $*'$ และ $\cdot'$ เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ $*'$ และ $\cdot'$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X/ρ

จะเห็นได้ว่า $0\rho \in X/\rho$ โดยที่ $0\rho = \{y \in X \mid (0, y) \in \rho\}$

กำหนดให้ $x\rho, y\rho, z\rho \in X/\rho$

จะได้ว่า $x, y, z \in X$
(i) $x\rho *' 0\rho = (x*0)\rho = x\rho$
(ii) $x\rho *' y\rho = (x*y)\rho = ((x*z) *(y*z))\rho = (x*z)\rho *' (y*z)\rho = (x\rho *' z\rho) *' (y\rho *' z\rho)$
(iii) สมมติให้ $x\rho *' y\rho = 0\rho = y\rho *' x\rho$
ดังนั้น $(x*y)\rho = 0\rho = (y*x)\rho$ จึงได้ว่า $0 \in (x*y)\rho$ นั่นคือ $(x*y, 0) \in \rho$
จาก ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จึงได้ว่า $(x*(x*y), x*0) \in \rho$ โดยบทตั้ง 1.1 (iii) จะได้ว่า $(y, x) \in \rho$ ดังนั้น $(x, y) \in \rho$ และ $y \in x\rho$
จึงได้ว่า $x\rho = y\rho$
จาก (i) – (iii) จะได้ว่า $(X/\rho; *', 0\rho)$ เป็นพีชคณิต RG
(iv) เนื่องจาก $xy \in X$ ดังนั้น $(x\rho)\cdot'(y\rho) = (xy)\rho \in X/\rho$
(v) $((x\rho)\cdot'(y\rho))\cdot'(z\rho) = (xyz)\rho = (x(yz))\rho = x\rho\cdot'(yz)\rho = (x\rho)\cdot'((y\rho)\cdot'(z\rho))$
จาก (iv) และ (v) จะได้ว่า $(X/\rho, \cdot')$ เป็นกึ่งกรุป
(vi) $(x\rho)\cdot'(y\rho *' z\rho) = (x\rho)\cdot'((y*z)\rho)$
$= (x(y*z))\rho$
$= (xy*xz)\rho = (xy)\rho *' (xz)\rho$
$= ((x\rho)\cdot'(y\rho)) *' ((x\rho)\cdot'(z\rho))$
และ $(x\rho *' y\rho)\cdot'(z\rho) = ((x*y)\rho)\cdot'(z\rho)$
$= ((x*y)z)\rho$
$= (xz*yz)\rho = (xz)\rho *' (yz)\rho$
$= ((x\rho)\cdot'(z\rho)) *' ((y\rho)\cdot'(z\rho))$
จากข้างต้นจึงสรุปได้ว่า X/ρ เป็นกึ่งกรุป RG

บทนิยาม 2.12 กำหนดให้ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียกฟังก์ชัน $f: X \to X'$ ว่า *สาทิสสัณฐานของกึ่งกรุป RG (RG-semigroup homomorphism)* หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *สาทิสสัณฐาน (homomorphism)* ก็ต่อเมื่อ $f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$ และ $f(xy) = f(x)\circ f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 2.13 กำหนดให้ $f: X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐาน เมื่อ X และ X' เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า*อันตรสัณฐานของกึ่งกรุป RG (RG-semigroup epimorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง X' และจะเรียก f ว่า*สมสัณฐานของกึ่งกรุป RG (RG-semigroup isomorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก X ไปทั่วถึง X'

ในกรณีที่มีฟังก์ชันสมสัณฐาน $f: X \to X'$ จะกล่าวว่า X *สมสัณฐาน (isomorphic)* กับ X' และเขียนแทนด้วย $X \cong X'$

บทตั้ง 2.3 กำหนดให้ $f: X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า $f(0) = 0'$
<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ $x \in X$ จะได้ว่า $f(0) = f(x*x) = f(x)\Delta f(x) = 0'$

บทนิยาม 2.14 กำหนดให้ $f: X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียกเซต $\ker f = \{x \in X \mid f(x) = 0'\}$ ว่า*เคอร์เนล (kernel)* ของ f และจะเรียกเซต $\operatorname{im} f = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ ว่า*ภาพ (image)* ของ f

ทฤษฎีบท 2.11 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะได้ว่า ρ^* เป็นอันตรสัณฐาน โดยที่ $\ker \rho^* = 0\rho$ เมื่อ $\rho^*: X \to X/\rho$ กำหนดโดย $\rho^*(x) = x\rho$ สำหรับทุก $x \in X$
<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $x, y \in X$
ถ้า $x = y$ แล้วจะได้ว่า $x\rho = y\rho$ นั่นคือ $\rho^*(x) = x\rho = y\rho = \rho^*(y)$ ดังนั้น ρ^* เป็นฟังก์ชัน
เนื่องจาก $\rho^*(x*y) = (x*y)\rho = x\rho *' y\rho = \rho^*(x) *' \rho^*(y)$ และ $\rho^*(xy) = (xy)\rho = (x\rho)\cdot'(y\rho) = \rho^*(x)\cdot'\rho^*(y)$ ดังนั้น ρ^*

เป็นสาทิสสัณฐาน และสำหรับทุก $x\rho \in X/\rho$ จะได้ว่ามี $x \in X$ ที่ซึ่ง $\rho^*(x) = x\rho$ ดังนั้น ρ^* เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก X ไป X/ρ จึงได้ว่า ρ^* เป็นอันตรสัณฐานและ

$$\begin{aligned}\ker \rho^* &= \{x \in X \mid \rho^*(x) = 0\rho\}\\ &= \{x \in X \mid x\rho = 0\rho\}\\ &= \{x \in X \mid x \in 0\rho\} = 0\rho\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนดให้ $f : X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X;*, \cdot, 0)$ และ $(X';\Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า $K_f = \{ (x,y) \in X \times X \mid f(x) = f(y) \}$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X และจะมีฟังก์ชัน $\overline{f} : X/K_f \to X'$ ที่เป็นสาทิสสัณฐานและเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่ซึ่ง $\overline{f} \circ K_f^* = f$ เมื่อ $K_f^* : X \to X/K_f$ ที่กำหนดโดย $K_f^*(x) = xK_f$ สำหรับทุก $x \in X$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $x, y, z \in X$ เนื่องจาก $f(x) = f(x)$ ดังนั้น $(x,x) \in K_f$

ถ้า $(x,y) \in K_f$ แล้ว $f(x) = f(y)$ นั่นคือ $f(y) = f(x)$ จึงได้ว่า $(y,x) \in K_f$

และถ้า $(x,y),(y,z) \in K_f$ แล้ว $f(x) = f(y) = f(z)$ จึงได้ว่า $(x,z) \in K_f$

เพราะฉะนั้น K_f เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X

กำหนดให้ $x, y, u, v \in X$ โดยที่ (x,y), $(u,v) \in K_f$ ดังนั้น $f(x) = f(y)$ และ $f(u) = f(v)$ จะได้ว่า $f(x*u) = f(x)\ \Delta\ f(u) = f(y)\ \Delta\ f(v) = f(y*v)$

และ $f(xu) = f(x) \circ f(u) = f(y) \circ f(v) = f(yv)$

จึงได้ว่า $(x*u, y*v) \in K_f$ และ $(xu, yv) \in K_f$

ดังนั้น K_f เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X

กำหนดให้ $\overline{f} : X/K_f \to X'$ นิยามโดย $\overline{f}(xK_f) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

และให้ $xK_f, yK_f \in X/K_f$ โดยที่ $xK_f = yK_f$ จาก K_f เป็นความสัมพันธ์สมมูล จึงได้ว่า $y \in yK_f$ ดังนั้น $y \in xK_f$ นั่นคือ $(x,y) \in K_f$ ดังนั้น $f(x) = f(y)$ นั่นคือ $\overline{f}(xK_f) = \overline{f}(yK_f)$ เพราะฉะนั้น $\overline{f}$ เป็นฟังก์ชัน และสำหรับทุก $xK_f, yK_f \in X/K_f$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\overline{f}\left(xK_f *' yK_f\right) &= \overline{f}\left((x*y)K_f\right)\\ &= f(x*y) = f(x)\Delta f(y)\\ &= \overline{f}\left(xK_f\right)\Delta\overline{f}\left(yK_f\right)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\overline{f}\left(xK_f \cdot' yK_f\right) &= \overline{f}\left((xy)K_f\right)\\ &= f(xy) = f(x)\circ f(y)\\ &= \overline{f}\left(xK_f\right)\circ\overline{f}\left(yK_f\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\overline{f}$ เป็นสาทิสสัณฐาน

นอกจากนี้ ถ้า $\overline{f}(xK_f) = \overline{f}(yK_f)$ เมื่อ xK_f, $yK_f \in X/K_f$ แล้วจะได้ว่า $f(x) = f(y)$ ดังนั้น $(x,y) \in K_f$ นั่นคือ $xK_f = yK_f$ จึงได้ว่า $\overline{f}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจาก $\left(\overline{f} \circ K_f^*\right)(x) = \overline{f}\left(K_f^*(x)\right) = \overline{f}\left(xK_f\right) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ดังนั้น $\overline{f} \circ K_f^* = f$

สมมติให้ $g : X/K_f \to X'$ โดยที่ $g \circ K_f^* = f$ จะได้ว่า $g\left(xK_f\right) = g\left(K_f^*(x)\right) = \left(g \circ K_f^*\right)(x) = f(x) = \overline{f}\left(xK_f\right)$ สำหรับทุก $xK_f \in X/K_f$ ดังนั้น $g = \overline{f}$ จึงสรุปได้ว่า $\overline{f}$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่ซึ่ง $\overline{f} \circ K_f^* = f$

บทแทรก 2.1 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า ρ และ σ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X โดยที่ $\rho \subseteq \sigma$ จะได้ว่า $\sigma/\rho = \{(x\rho, y\rho) \in X/\rho \times X/\rho \mid (x,y) \in \sigma\}$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X/ρ และจะมีฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน φ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $(X/\rho)/(\sigma/\rho)$ ไปทั่วถึง X/ρ

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $g: X/\rho \to X/\sigma$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $g(x\rho) = x\sigma$ สำหรับทุก $x\rho \in X/\rho$ สำหรับทุก $x\sigma \in X/\sigma$ จะได้ว่า $x \in X$ นั่นคือมี

$x\rho \in X/\rho$ ที่ทำให้ $g(x\rho) = x\sigma$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $x\rho, y\rho \in X/\rho$ จะได้ว่า $g((x\rho)*'(y\rho))$ $= g((x*y)\rho) = (x*y)\sigma = x\sigma *' y\sigma$ $= g(x\rho)*' g(y\rho)$ และ $g((x\rho)\cdot'(y\rho))$ $= g((xy)\rho) = (xy)\sigma = (x\sigma)\cdot'(y\sigma)$ $= g(x\rho)\cdot' g(y\rho)$ ดังนั้น g เป็นสาทิสสัณฐาน

ต่อไปจะแสดงว่า $K_g = \sigma/\rho$ เมื่อ $K_g = \{(x\rho, y\rho) \in X/\rho \times X/\rho \mid g(x\rho) = g(y\rho)\}$ กำหนดให้ $(x\rho, y\rho) \in K_g$ จะได้ว่า $g(x\rho) = g(y\rho)$ นั่นคือ $x\sigma = g(x\rho) = g(y\rho) = y\sigma$ ดังนั้น $(x, y) \in \sigma$ จึงได้ว่า $(x\rho, y\rho) \in \sigma/\rho$ นั่นคือ $K_g \subseteq \sigma/\rho$ ในทางกลับกัน ให้ $(x\rho, y\rho) \in \sigma/\rho$ จะได้ว่า $(x, y) \in \sigma$ ดังนั้น $x\sigma = y\sigma$ นั่นคือ $g(x\rho) = x\sigma = y\sigma = g(y\rho)$ ดังนั้น $(x\rho, y\rho) \in K_g$ จึงได้ว่า $\sigma/\rho \subseteq K_g$ เพราะฉะนั้น $K_g = \sigma/\rho$ จึงทำให้ได้ว่า K_g เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X/ρ และจะมี $\varphi : (X/\rho)/K_g \to K/\sigma$ (นั่นคือ $\varphi : (X/\rho)/(\sigma/\rho) \to X/\sigma$) ซึ่งนิยามโดย $\varphi\left((x\rho)K_g\right) = x\sigma$ สำหรับทุก $x\rho \in X/\sigma$ ที่เป็นสาทิสสัณฐานและเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเพียงฟังก์ชันเดียว โดยที่ $\varphi \circ K_g^* = g$ เมื่อ $K_g^* : (X/\rho) \to (X/\rho)/K_g$ สำหรับทุก $x\sigma \in X/\sigma$ จะได้ว่ามี $x\rho \in X/\rho$ ที่ทำให้ $g(x\rho) = x\sigma$ นั่นคือจะมี $(x\rho)K_g \in (X/\rho)/K_g$ ที่ทำให้ $\varphi((x\rho)K_g) = g(x\rho) = x\sigma$ ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนดให้ $f : X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า $\ker f$ เป็น RG-ไอดีลของ X

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $x, y \in X$ และ $a \in \ker f$ ดังนั้น $a \in X$ และ $f(a) = 0'$

เนื่องจาก $f(ax) = f(a) \circ f(x) = 0' \circ f(x) = 0'$ และ $f(xa) = f(x) \circ f(a) = f(x) \circ 0' = 0'$ ดังนั้น $ax, xa \in \ker f$ สมมติให้ $x * y \in \ker f$ และ $0 * x \in \ker f$ จะได้ว่า $f(x * y) = 0'$ $= f(0 * x)$ โดยบทตั้ง 1.1 จะได้ว่า $f(0 * y)$ $= f((x*y)*(x*0)) = f(x*y)\Delta$ $f(x*0) = f(0)\Delta f(x) = f(0*x) = 0'$ ดังนั้น $0 * y \in \ker f$ จึงสรุปได้ว่า $\ker f$ เป็น RG-ไอดีลของ X

กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X และ A เป็น RG-ไอดีลของ X กำหนดความสัมพันธ์ "$\underset{A}{\sim}$" บน X ดังนี้ $x \underset{A}{\sim} y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in A$ และ $y * x \in A$ จะได้ว่า $\underset{A}{\sim}$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X และ $\underset{A}{\sim}$ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทั้งทางขวาและทางซ้าย โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $\underset{A}{\sim}$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะเขียนแทนชั้นสมมูลของ $x \in X$ ภายใต้ความสัมพันธ์ $\underset{A}{\sim}$ ด้วย A_x กล่าวคือ $A_x = \left\{ y \in X \,\middle|\, x \underset{A}{\sim} y \right\}$ และจะเขียนแทนเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดของ X ภายใต้ความสัมพันธ์ $\underset{A}{\sim}$ ด้วย X/A กล่าวคือ $X/A := \{A_x \mid x \in X\}$ จะเห็นได้ว่า $A_x = A_y$ ก็ต่อเมื่อ $x \underset{A}{\sim} y$ และจะได้ว่า

$$A_0 = \left\{ y \in X \,\middle|\, 0 \underset{A}{\sim} y \right\}$$

$$= \{ y \in X \mid 0 * y \in A \text{ และ } y * 0 \in A \}$$

จะเห็นว่า ถ้า A เป็น RG-ไอดีล ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ A แล้ว $1 \in A$ ดังนั้น $0 * 1 \in A$ และ $1 * 0 = 1 \in A$ จึงได้ว่า $1 \in A_0$ นอกจากนี้ยังได้อีกว่าถ้า X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X และ A เป็น RG-ไอดีลของ X แล้ว $(X/A; \otimes, \odot, A_0)$ เป็นกึ่งกรุป RG เมื่อ $\otimes$ และ $\odot$ เป็นการดำเนินการบน X/A ที่กำหนดโดย

$$A_x \otimes A_y = A_{x*y} \text{ และ } A_x \odot A_y = A_{xy}$$

สำหรับทุก $A_x, A_y \in X/A$

ทฤษฎีบท 2.14 กำหนดให้ $f: X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X;*,\cdot,0)$ และ $(X';\Delta,\circ,0')$ เป็นกึ่งกรุป RG ที่มีเอกลักษณ์คือ 1 และ $1'$ ตามลำดับ จะได้ว่า ถ้า A เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $1 \in A$ แล้ว $A/\ker(f \cap A) \cong f(A)$

พิสูจน์ กำหนดให้ A เป็น RG-ไอดีลของ X และ $B = ker\ f \cap A$

สมมติให้ $b \in B$ และ $x, y \in A$ จะได้ว่า $b \in \ker f$ และ $b \in A$ จาก A เป็น RG-ไอดีลของ X

ดังนั้น $xb \in A$ และ $bx \in A$ จาก $b \in \ker f$ จึงได้ว่า $f(b) \in X'$ โดยที่ $f(b) = 0'$

เนื่องจาก $f(xb) = f(x) \circ f(b) = f(x) \circ 0' = 0'$ และ $f(bx) = f(b) \circ f(x) = 0' \circ f(x) = 0'$

ดังนั้น $xb, bx \in \ker f$ จึงได้ว่า $xb \in \ker f \cap A$ และ $bx \in \ker f \cap A$ นั่นคือ $xb \in B$ และ $bx \in B$

สมมติให้ $x*y \in B$ และ $0*x \in B$ จะได้ว่า $x*y, 0*x \in \ker f$ และ $x*y, 0*x \in A$ นั่นคือ $f(x*y) = 0' = f(0*x)$ จาก A เป็น RG-ไอดีลของ X จึงได้ว่า $0*y \in A$

และจะได้ว่า $f(0*y) = f\big((x*y)*(x*0)\big)$ $= f(x*y)\Delta f(x*0) = f(0)\Delta f(x)$ $= f(0*x) = 0'$

นั่นคือ $0*y \in \ker f$ ดังนั้น $0*y \in \ker f \cap A$ $= B$ ฉะนั้น B เป็น RG-ไอดีลของ A

กำหนดให้ $\psi: A/B \to X'$ นิยามโดย $\psi(B_x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $B_x, B_y \in A/B$ โดยที่ $B_x = B_y$ แล้วจะได้ว่า $x \in B_y$ นั่นคือ $x \underset{B}{\sim} y$

เนื่องจาก $x*y \in B$ และ $y*x \in B$ ดังนั้น $x*y \in \ker f$ และ $y*x \in \ker f$ โดยที่ $x*y, y*x \in A$ จึงได้ว่า $f(x*y) = 0 = f(y*x)$ นั่นคือ $f(x)\Delta f(y) = 0' = f(y)\Delta f(x)$

จึงทำให้ $f(x) = f(y)$ ดังนั้น $\psi(B_x) = f(x) = f(y) = \psi(B_y)$ นั่นคือ ψ เป็นฟังก์ชัน และจะเห็นว่า

$$\psi(B_x \otimes B_y) = \psi(B_{x*y}) = f(x*y)$$
$$= f(x)\Delta f(y) = \psi(B_x)\Delta\psi(B_y)$$

และ $\psi(B_x \odot B_y) = \psi(B_{xy}) = f(xy)$ $= f(x) \circ f(y) = \psi(B_x) \circ \psi(B_y)$ สำหรับทุก $B_x, B_y \in A/B$

ดังนั้น ψ เป็นสาทิสสัณฐาน

ถ้า $B_x, B_y \in A/B$ โดยที่ $\psi(B_x) = \psi(B_y)$ จะได้ว่า $f(x) = f(y)$ เมื่อ $x, y \in A$

จาก $f(x) = f(y)$ จะได้ว่า $f(x)\Delta f(y) = 0$ และ $f(y)\Delta f(x) = 0$

ดังนั้น $f(x*y) = 0$ และ $f(y*x) = 0$ จะได้ว่า $x*y \in \ker f$ และ $y*x \in \ker f$

เนื่องจาก $x*y \in \ker f, y*x \in \ker f$ จะได้ $x*y \in A$ จาก $x*y \in A$ จะได้ว่า $0*(x*y) \in A$ นั่นคือ $y*x \in A$ ดังนั้น $x*y \in \ker f \cap A$ และ $y*x \in \ker f \cap A$ นั่นคือ $x*y \in B$ และ $y*x \in B$

จึงได้ว่า $x \underset{B}{\sim} y$ นั่นคือ $y \in B_x$ จึงทำให้ $B_x = B_y$

ดังนั้น ψ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สำหรับทุก $a \in \mathrm{im}\psi$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $a = \psi(B_x)$ นั่นคือมี $B_x \in A/B$ โดยที่ $\psi(B_x) = a$

ดังนั้น ψ เป็นฟังก์ชันจาก A/B ไปทั่วถึง $\mathrm{im}\psi$

เพราะฉะนั้น $A/B \cong \mathrm{im}\psi$

เนื่องจาก $\mathrm{im}\psi = \{\psi(B_x) \mid x \in A\} = \{f(x) \mid x \in A\} = f(A)$ ดังนั้น $A/\ker(f \cap A) \cong f(A)$

บทแทรก 2.2 กำหนดให้ X และ X' เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า $f: X \to X'$ เป็นสาทิสสัณฐานจาก X ไปทั่วถึง X' แล้ว $X/\ker f \cong \mathrm{im} f$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\ker f \subseteq X$ จะได้ว่า $\ker f$ $= \ker f \cap X$ โดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $X/\ker(f \cap X) \cong f(X) \cong \mathrm{im} f$ นั่นคือ $X/\ker f \cong \mathrm{im} f$

บทตั้ง 2.4 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณของ X ถ้า M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$ แล้ว MN เป็น RG-ไอดีลของ X เมื่อ $MN = \{mn \mid m \in M$ และ $n \in N\}$

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$

ให้ $x, y \in X$ และ $mn \in MN$ จึงได้ว่า $m \in M$ และ $n \in N$ เนื่องจาก $nx \in N$ และ $xm \in M$ จะได้ว่า $(mn)x = m(nx) \in MN$ และ $x(mn) = (xm)n \in MN$ ดังนั้น MN เป็นเซตที่เสถียรของ X

สมมติให้ $x * y \in MN$ และ $0 * x \in MN$ ดังนั้น $x * y = m_1 n_1$ และ $0 * x = m_2 n_2$ สำหรับบาง $m_1, m_2 \in M$ และ $n_1, n_2 \in N$ เนื่องจาก M และ N เป็นเซตที่เสถียร จะได้ว่า $x * y, 0 * x \in M$ และ $x * y, 0 * x \in N$ เนื่องจาก M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X จะได้ว่า $0 * y \in M$ และ $0 * y \in N$ จะเห็นได้ว่าถ้า $1 \in M$ แล้ว $0 * y = 1(0 * y) \in MN$ และถ้า $1 \in N$ แล้ว $0 * y = (0 * y)1 \in MN$

ดังนั้น MN เป็น RG-ไอดีลของ X

ทฤษฎีบท 2.15 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X ถ้า M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$ แล้ว $M/(M \cap N) \cong MN/N$

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$ จะได้ว่า MN เป็น RG-ไอดีลของ X กำหนดให้ $f : M \to MN/N$ นิยามโดย $f(m) = N_m$ สำหรับทุก $m \in M$

ถ้า $x, y \in M$ โดยที่ $x = y$ แล้วจะได้ว่า $x * y = x * x = 0 \in N$ และ $y * x = x * x = 0 \in N$ นั่นคือ $x \underset{N}{\sim} y$ และ $N_x = N_y$ จึงได้ว่า $f(x) = N_x = N_y = f(y)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

เนื่องจาก $f(x * y) = N_{x*y} = N_x \otimes N_y = f(x) \otimes f(y)$ และ $f(xy) = N_{xy} = N_x \odot N_y = f(x) \odot f(y)$

ดังนั้น f เป็นสาทิสสัณฐาน โดยบทแทรก 2.2 จะได้ว่า $\mathrm{im}\, f \cong M/\ker f$

ให้ $x \in \ker f$ จะได้ว่า $N_x = f(x) = N_0$ นั่นคือ $x \underset{N}{\sim} 0$ ดังนั้น $x * 0 = x \in N$

เนื่องจาก $x \in \ker f \subseteq M$ จะได้ว่า $x \in M \cap N$ ในทางกลับกันถ้าให้ $y \in M \cap N$ จะได้ว่า $y \in M$ และ $y \in N$ โดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า $0 * y \in N$ นั่นคือ $y * 0 = y \in N$ และ $0 * y \in N$ ดังนั้น $y \underset{N}{\sim} 0$ และ $N_y = N_0$ นั่นคือ $f(y) = N_0$ และ $y \in \ker f$ จึงได้ว่า $M \cap N \subseteq \ker f$ ดังนั้น $M \cap N = \ker f$

ให้ $N_y \in MN/N$ จะได้ว่า $N_y = N_{mn}$ สำหรับบาง $m \in M$ และ $n \in N$

เนื่องจาก M เป็น RG-ไอดีลของ X และ $mn \in M$ จะได้ว่า $mn = m_1$ สำหรับบาง $m_1 \in M$

ดังนั้น $N_y = N_{mn} = N_{m_1} = f(m_1)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก M ไปทั่วถึง MN/N

ดังนั้น $\mathrm{im}\, f = MN$ จึงสรุปได้ว่า $M/(M \cap N) \cong MN/N$

ทฤษฎีบท 2.16 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X ถ้า M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $M \subseteq N$ แล้ว $\dfrac{X/M}{N/M} \cong X/N$

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ M และ N เป็น RG-ไอดีลของ X โดยที่ $M \subseteq N$ และกำหนดให้ $f : X/M \to X/N$ นิยามโดย $f(M_x) = N_x$ สำหรับทุก $M_x \in X/M$

ให้ $M_x, M_y \in X/M$ ถ้า $M_x = M_y$ แล้ว $x \underset{M}{\sim} y$ นั่นคือ $x * y \in M$ และ $y * x \in M$ เนื่องจาก $M \subseteq N$ ดังนั้น $x * y \in N$ และ $y * x \in N$ นั่นคือ $x \underset{N}{\sim} y$ ดังนั้น $N_x = N_y$ จึงได้ว่า $f(M_x) = N_x = N_y = f(M_y)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

เนื่องจาก $f(M_x \otimes M_y) = f(M_{x*y}) = N_{x*y}$
$= N_x \otimes N_y = f(M_x) \otimes f(M_y)$

และ $f(M_x \odot M_y) = f(M_{xy}) = N_{xy}$
$= N_x \odot N_y = f(M_x) \odot f(M_y)$
ดังนั้น f เป็นสาทิสสัณฐาน โดยบทแทรก 2.2 จะได้ว่า $\operatorname{im} f \cong (X/M)/\ker f$

ให้ $M_x \in \ker f$ จะได้ว่า $N_0 = f(M_x) = N_x$ นั่นคือ $0 \underset{N}{\sim} x$ จึงได้ว่า $x = x * 0 \in N$ และทำให้ได้ว่า $M_x \in N/M$ ดังนั้น $\ker f \subseteq N/M$ ในทางกลับกัน ถ้า $M_x \in N/M$ จะได้ว่า $x \in N$ โดยบทตั้ง 2.2 จึงได้ว่า $0 * x \in N$ และ $x = x * 0 \in N$ นั่นคือ $x \underset{N}{\sim} 0$ ดังนั้น $N_0 = N_x \in f(M_x)$ นั่นคือ $M_x \in \ker f$ จึงทำให้ได้ว่า $N/M \subseteq \ker f$ ดังนั้น $N/M = \ker f$ สมมติให้ $N_x \in X/N$ จะได้ว่า $x \in X$ และ $M_x \in X/M$ โดยที่ $f(M_x) = N_x$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก X/M ไปทั่วถึง X/N ดังนั้น $\operatorname{im} f \cong X/N$ จึงสรุปได้ว่า $\dfrac{X/M}{N/M} \cong X/N$

6. References

[1] Kim, K.H., 2006, On structure of KS-semigroups, International Mathematical Forum. 1(2): 67-76.

[2] Omar, R.A.K., 2014, On RG-Algebra, Pure Mathematical Sciences. 3(2): 59-70.