



# สูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 บางรูปแบบ

## Formulas of the Exponential Matrix for Some Real Semi Skew-Symmetric Matrices of Order 4

ปุ่นชญา พัฒนางกูร\*, กรกนก พร้อมจะบก, กชพร พร้อมจะบก, วรัญญา วงษ์อุรา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor\*, Konkanok Promjabok, Kotchaporn Promjabok,  
Warunya Wong-u-ra

*Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,*

*Thammasat University, Pathum Thani 12120*

Received 1 February 2023; Received in revised 25 May 2023; Accepted 12 June 2023

### บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 บางรูปแบบ

**คำสำคัญ:** เมทริกซ์เลขชี้กำลัง; เมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือน; สูตรของซิลเวสเตอร์

### Abstract

In this paper the formula of the exponential matrix  $e^A$  for some real semi skew-symmetric matrix  $A$  of order 4 is derived.

**Keywords:** Exponential matrix; Semi skew-symmetric matrix; Sylvester's formula

### 1. บทนำ

การคำนวณฟังก์ชันเมทริกซ์เป็นหนึ่งในปัญหาที่ทำหามากที่สุดในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข ฟังก์ชันเมทริกซ์หนึ่งที่น่าสนใจ คือ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์  $A$  ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ  $n \times n$  (หรือเรียก  $A$  สั้น ๆ ว่าเมทริกซ์อันดับ  $n$ ) เมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  (the exponential of  $A$ ) นิยามโดย

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

เมื่อ  $A^0 = I_n$  คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ  $n$

ในปี ค.ศ. 1978 C. Moler และ C. Van Loan ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีประมาณค่าของ  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์อันดับ  $n$  ต่อมาในปี ค.ศ. 1998 E. Celledoni และ A. Iserles ได้เผยแพร่ผลงานวิจัย 2 ชิ้น เกี่ยวกับการประมาณค่าของเมทริกซ์เลขชี้กำลังในกรุปลี และเมื่อปี ค.ศ. 2000 ปัญหาดังกล่าวได้ถูกนำมาศึกษาอีกครั้งเมื่อวิธีการกรุปลี (Lie group method) ถูกนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งวิธีการนี้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามารถหาผลเฉลยได้ในพีชคณิตลี โดยอาศัยฟังก์ชันพิกัดที่นิยามจากพีชคณิตไปยังกรุปที่สัมพันธ์กัน ในการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลังนั้น สูตรของโรดริก (Rodrigues formula) ([2]) เป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณ  $e^A$  เมื่อ  $A \neq \bar{0}$  เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน (นั่นคือ  $A^T = -A$ ) อันดับ 3 ที่มีสมาชิกจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ -u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

แล้วสูตรของโรดริก คือ

$$e^A = I_3 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} A + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} A^2$$

เมื่อ  $\alpha = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

เมื่อปี ค.ศ. 2001 T. Politi ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ซึ่งพบว่า ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ -u_6 & 0 & u_4 & u_2 \\ -u_5 & -u_4 & 0 & u_1 \\ -u_3 & -u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  แตกต่างกันทั้งหมดแล้ว จะสามารถหาสูตรของ  $e^A$  ได้โดยอาศัยสูตรของซิลเวสเตอร์ (Sylvester's formula) ซึ่งจะได้ว่า

$$e^A = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$$

เมื่อ  $a = \cos \alpha + c\alpha^2, b = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + d\alpha^2$

,  $c = \frac{\cos \mu - \cos \alpha}{\alpha^2 - \mu^2}$  และ

$$d = \frac{\alpha \sin \mu - \mu \sin \alpha}{\alpha \mu (\alpha^2 - \mu^2)}$$

โดยที่  $I_4$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4,

$$\alpha = \sqrt{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}} \quad \text{และ}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}}$$

เมื่อ  $a_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2$   
และ  $a_0 = (u_1u_6 + u_3u_4 - u_2u_5)^2$

สำหรับบทความวิจัยฉบับนี้จะศึกษาการหาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือนในบางรูปแบบ ดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 1.1** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ  $n$  จะเรียก  $A$  ว่าเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือน (semi skew-symmetric matrix) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์เครื่องหมาย (อันดับ  $n$ )  $\mathcal{E}$  ที่  $A^T = -\mathcal{E}A\mathcal{E}$  เมื่อเมทริกซ์เครื่องหมาย (signature matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 หรือ -1 เท่านั้น ส่วนสมาชิกอื่นเป็น 0

ในการทำงานเดียวกัน สูตรของโรดริกยังเป็นสูตรแบบชัดเจนที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือ  $A^T = -\mathcal{E}A\mathcal{E}$  เมื่อ

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วโดยอาศัยสูตรของโรดริก ([3]) จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \alpha = -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 > 0 \text{ แล้ว}$$

$$e^A = I_3 + \frac{\sinh \alpha}{\alpha} A + \frac{(\cosh \alpha - 1)}{\alpha^2} A^2$$

และ ถ้า  $\alpha = -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 0$  แล้ว

$$e^A = I_3 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} A + \frac{(1 - \cos \alpha)}{\alpha^2} A^2$$

ในปี ค.ศ. 2005 L. Kula, M.K. Karacan และ Y. Yayli ได้ศึกษาการหาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -u_6 & u_5 & u_3 \\ u_6 & 0 & u_4 & -u_2 \\ u_5 & u_4 & 0 & -u_1 \\ u_3 & -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือ  $A^T = -\mathcal{E}A\mathcal{E}$  เมื่อ

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าในกรณีนี้  $\mathcal{E}$  เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 ที่อยู่ในรูป

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

และ  $A$  เป็นเมทริกซ์อันดับ 4 ที่ซึ่ง  $A^T = -\mathcal{E}A\mathcal{E}$  จะได้ว่าเมทริกซ์  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 รูปแบบเดียวกับเมทริกซ์  $A$  ในงานวิจัยของ L. Kula, M.K. Karacan และ Y. Yayli

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ในรูปแบบอื่น กล่าวคือ จะศึกษาสูตรของ  $e^A$  เมื่อ  $A \neq \bar{0}$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่

มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด โดยที่  $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$

เมื่อ  $\varepsilon$  เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 ที่กำหนดโดย

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ } \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## 2. ผลงานวิจัย

กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 โดยที่  $A \neq \bar{0}$  นั่นคือ  $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$  เมื่อ  $\varepsilon$  เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 จะได้ว่า  $A$  จะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ u_6 & 0 & u_4 & -u_2 \\ -u_5 & u_4 & 0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{เมื่อ } \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ } \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

และ  $A$  จะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ u_6 & 0 & u_4 & u_2 \\ u_5 & -u_4 & 0 & u_1 \\ -u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{เมื่อ } \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ } \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  คือ  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$  โดยการคำนวณจึงทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

**บทตั้ง 2.1** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) จะได้ว่า พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  คือ

$$p(\lambda) = \lambda^4 + k_2\lambda^2 + k_0$$

เมื่อ (i) ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์นิยามดัง (2.1) แล้ว

$$k_2 = u_2^2 + u_5^2 - u_1^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_6^2 \text{ และ}$$

$$k_0 = (u_1u_6 - u_2u_5 - u_3u_4)^2$$

และ (ii) ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์นิยามดัง (2.2) แล้ว

$$k_2 = u_3^2 + u_4^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_5^2 - u_6^2 \text{ และ}$$

$$k_0 = (u_1u_6 - u_2u_5 + u_3u_4)^2$$

**บทตั้ง 2.2** ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) แล้ว  $p(-\lambda) = p(\lambda)$

จากบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } p(\lambda) = \lambda^4 + k_2\lambda^2 + k_0 = 0 \text{ แล้ว } \lambda \text{ จะ}$$

เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  ซึ่งจะเห็นได้ว่า

ค่าเฉพาะทั้ง 4 ค่าของเมทริกซ์  $A$  นั้นจะอยู่ใน

รูปของ  $k_0$  และ  $k_2$  ดังนั้นตลอดการศึกษา

บทความวิจัยฉบับนี้ จึงกำหนดค่าของ  $k_0$  และ  $k_2$

ดังบทตั้ง 2.1 นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่า  $k_0 \geq 0$  ดังนั้น

$$\text{ถ้า } k_2^2 - 4k_0 > 0 \text{ แล้ว } k_2 \neq 0$$

**บทตั้ง 2.3** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) จะได้ว่า ค่าเฉพาะ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  ของเมทริกซ์  $A$  เป็นดังนี้

(1) ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  และ  $k_2 > 0$  แล้ว  $\lambda_1 = i\alpha_1, \lambda_2 = -i\alpha_1, \lambda_3 = i\mu_1$  และ  $\lambda_4 = -i\mu_1$

$$\text{เมื่อ } \alpha_1 = \sqrt{\frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}} \text{ และ } \mu_1 = \sqrt{\frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}}$$

(2) ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  และ  $k_2 < 0$  แล้ว  $\lambda_1 = \alpha_2, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = \mu_2$  และ  $\lambda_4 = -\mu_2$  เมื่อ

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}} \text{ และ } \mu_2 = \sqrt{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}}$$

(3) ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 < 0$  แล้ว  $\lambda_1 = z, \lambda_2 = -z, \lambda_3 = \bar{z}$  และ  $\lambda_4 = -\bar{z}$  เมื่อ  $z = u + iv$  โดยที่

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0} - k_2} \text{ และ } v = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0} + k_2}$$

(4) ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 = 0$  และ  $k_2 > 0$  แล้ว  $\lambda_1 = \lambda_3 = i\mu$  และ  $\lambda_2 = \lambda_4 = -i\mu$

$$\text{เมื่อ } \mu = \sqrt{\frac{k_2}{2}}$$

(5) ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 = 0$  และ  $k_2 < 0$  แล้ว  $\lambda_1 = \lambda_3 = \alpha$  และ  $\lambda_2 = \lambda_4 = -\alpha$  เมื่อ  $\alpha = \sqrt{\frac{-k_2}{2}}$

(6) ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 = 0$  และ  $k_2 = 0$  แล้ว  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

บทความวิจัยนี้จะศึกษาสูตรของ  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด กล่าวคือ จะศึกษาในกรณีที่  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  โดยที่  $k_0 \neq 0$  และในกรณีที่  $k_2^2 - 4k_0 < 0$  เท่านั้น การพิจารณาหาสูตรของ  $e^A$  เมื่อ  $A$  มีค่าเฉพาะ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  ที่แตกต่างกันทั้งหมดนั้น เราสามารถใช้สูตรของซิลเวสเตอร์ (Sylvester's formula) ([6]) ได้ ซึ่งจะได้ว่า

$$e^A = \sum_{i=1}^4 e^{\lambda_i} A_i \quad (2.3)$$

เมื่อ  $A_i$  คือ โพรเบนิอุสโคแควเรียนต์ของ  $A$  ที่กำหนดโดย  $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (A - \lambda_j I_4)$  สำหรับทุก

$i=1,2,3,4$  จะเห็นได้ว่า  $A_i$  อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $A$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  ซึ่งทำให้  $e^A$  อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $A$  เช่นกัน จากสมการ (2.3) จะเห็นว่า การคำนวณหา  $e^A$  นั้น ต้องคำนวณหาสัมประสิทธิ์  $A_1, A_2, A_3$  และ  $A_4$  แต่เนื่องจาก  $e^A$  อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $A$  ดังนั้น จึงจะคำนวณหา  $e^A$  โดยสมมติให้  $e^A = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$  และถ้า  $x_i$  เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ  $\lambda_i$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  (นั่นคือ  $Ax_i = \lambda_i x_i$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$ ) แล้วจะได้ว่า

$$e^A x_i = ax_i + b\lambda_i x_i + c\lambda_i^2 x_i + d\lambda_i^3 x_i \quad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4$$

$$\text{เนื่องจาก } e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_4 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

ดังนั้น สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  จะได้ว่า

$$e^A x_i = \left( I_4 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) x_i = \left( I_4 + \lambda_i + \frac{1}{2!} \lambda_i^2 + \frac{1}{3!} \lambda_i^3 + \dots \right) x_i = e^{\lambda_i} x_i$$

$$\text{จึงได้ว่า } e^{\lambda_i} x_i = e^A x_i = ax_i + b\lambda_i x_i + c\lambda_i^2 x_i + d\lambda_i^3 x_i$$

$$= (a + b\lambda_i + c\lambda_i^2 + d\lambda_i^3) x_i \quad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4$$

$$\text{ดังนั้น } e^{\lambda_i} = a + b\lambda_i + c\lambda_i^2 + d\lambda_i^3 \quad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4 \quad (2.4)$$

จากการใช้สูตรของซิลเวสเตอร์นี้ จะนำไปสู่การพิสูจน์สูตรของ  $e^A$  เมื่อ  $A$  มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดดัง ทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.4** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) และ  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  โดยที่  $k_2 > 0$

$$\text{และ } k_0 > 0 \text{ จะได้ว่า } e^A = a_1 I_4 + b_1 A + c_1 A^2 + d_1 A^3 \quad (2.5)$$

เมื่อ 
$$a_1 = \frac{\alpha_1^2 \cos \mu_1 - \mu_1^2 \cos \alpha_1}{\alpha_1^2 - \mu_1^2}, \quad b_1 = \frac{\alpha_1^3 \sin \mu_1 - \mu_1^3 \sin \alpha_1}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1^2 - \mu_1^2)}$$

$$c_1 = \frac{\cos \mu_1 - \cos \alpha_1}{\alpha_1^2 - \mu_1^2} \quad \text{และ} \quad d_1 = \frac{\alpha_1 \sin \mu_1 - \mu_1 \sin \alpha_1}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1^2 - \mu_1^2)} \quad (2.6)$$

**บทพิสูจน์** กำหนดให้  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  โดยที่  $k_2 > 0$  และ  $k_0 > 0$  โดยบทตั้ง 2.3 (1) จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้  $\lambda_1 = i\alpha_1, \lambda_2 = -i\alpha_1, \lambda_3 = i\mu_1$  และ  $\lambda_4 = -i\mu_1$  โดยที่

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}} \quad \text{และ} \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}}$$

เมื่อแทนค่า  $\lambda_i$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, 4$  ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^{i\alpha_1} = a_1 + ib_1\alpha_1 - c_1\alpha_1^2 - id_1\alpha_1^3 \quad (1)$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-i\alpha_1} = a_1 - ib_1\alpha_1 - c_1\alpha_1^2 + id_1\alpha_1^3 \quad (2)$$

$$e^{\lambda_3} = e^{i\mu_1} = a_1 + ib_1\mu_1 - c_1\mu_1^2 - id_1\mu_1^3 \quad (3)$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-i\mu_1} = a_1 - ib_1\mu_1 - c_1\mu_1^2 + id_1\mu_1^3 \quad (4)$$

โดยสูตรของออยเลอร์  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  และ  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$  จะได้ว่า

$$\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1 = a_1 + ib_1\alpha_1 - c_1\alpha_1^2 - id_1\alpha_1^3 \quad (5)$$

$$\cos \alpha_1 - i \sin \alpha_1 = a_1 - ib_1\alpha_1 - c_1\alpha_1^2 + id_1\alpha_1^3 \quad (6)$$

$$\cos \mu_1 + i \sin \mu_1 = a_1 + ib_1\mu_1 - c_1\mu_1^2 - id_1\mu_1^3 \quad (7)$$

$$\cos \mu_1 - i \sin \mu_1 = a_1 - ib_1\mu_1 - c_1\mu_1^2 + id_1\mu_1^3 \quad (8)$$

นำสมการ (5) + (6) จะได้  $2 \cos \alpha_1 = 2a_1 - 2c_1\alpha_1^2$  หรือ  $\cos \alpha_1 = a_1 - c_1\alpha_1^2$  (9)

นำสมการ (7) + (8) จะได้  $2 \cos \mu_1 = 2a_1 - 2c_1\mu_1^2$  หรือ  $\cos \mu_1 = a_1 - c_1\mu_1^2$  (10)

นำสมการ (5) - (6) จะได้  $2i \sin \alpha_1 = 2ib_1\alpha_1 - 2id_1\alpha_1^3$  หรือ  $\sin \alpha_1 = b_1\alpha_1 - d_1\alpha_1^3$  (11)

นำสมการ (7) - (8) จะได้  $2i \sin \mu_1 = 2ib_1\mu_1 - 2id_1\mu_1^3$  หรือ  $\sin \mu_1 = b_1\mu_1 - d_1\mu_1^3$  (12)

จากการแก้ระบบสมการ (9) - (12) จะได้

$$a_1 = \frac{\alpha_1^2 \cos \mu_1 - \mu_1^2 \cos \alpha_1}{\alpha_1^2 - \mu_1^2}, \quad b_1 = \frac{\alpha_1^3 \sin \mu_1 - \mu_1^3 \sin \alpha_1}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1^2 - \mu_1^2)}$$

$$c_1 = \frac{\cos \mu_1 - \cos \alpha_1}{\alpha_1^2 - \mu_1^2} \quad \text{และ} \quad d_1 = \frac{\alpha_1 \sin \mu_1 - \mu_1 \sin \alpha_1}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1^2 - \mu_1^2)}$$

**ทฤษฎีบท 2.5** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามตั้ง (2.1) หรือ (2.2) และ  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  โดยที่  $k_2 < 0$  และ  $k_0 > 0$  จะได้ว่า  $e^A = a_2 I_4 + b_2 A + c_2 A^2 + d_2 A^3$  (2.7)

$$\text{เมื่อ } a_2 = \frac{\mu_2^2 \cosh \alpha_2 - \alpha_2^2 \cosh \mu_2}{\mu_2^2 - \alpha_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2^3 \sinh \mu_2 - \mu_2^3 \sinh \alpha_2}{\alpha_2 \mu_2 (\alpha_2^2 - \mu_2^2)}$$

$$c_2 = \frac{\cosh \alpha_2 - \cosh \mu_2}{\alpha_2^2 - \mu_2^2} \quad \text{และ} \quad d_2 = \frac{\mu_2 \sinh \alpha_2 - \alpha_2 \sinh \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 (\alpha_2^2 - \mu_2^2)} \quad (2.8)$$

**บทพิสูจน์** กำหนดให้  $k_2^2 - 4k_0 > 0$  โดยที่  $k_2 < 0$  และ  $k_0 > 0$  โดยบทตั้ง 2.3 (2) จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้  $\lambda_1 = \alpha_2, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = \mu_2$  และ  $\lambda_4 = -\mu_2$  โดยที่

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}} \quad \text{และ} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}}$$

เมื่อแทนค่า  $\lambda_i$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, 4$  ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^{\alpha_2} = a_2 + b_2 \alpha_2 + c_2 \alpha_2^2 + d_2 \alpha_2^3 \quad (13)$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-\alpha_2} = a_2 - b_2 \alpha_2 + c_2 \alpha_2^2 - d_2 \alpha_2^3 \quad (14)$$

$$e^{\lambda_3} = e^{\mu_2} = a_2 + b_2 \mu_2 + c_2 \mu_2^2 + d_2 \mu_2^3 \quad (15)$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-\mu_2} = a_2 - b_2 \mu_2 + c_2 \mu_2^2 - d_2 \mu_2^3 \quad (16)$$

$$\text{นำสมการ (13) + (14) จะได้ } e^{\alpha_2} + e^{-\alpha_2} = 2a_2 + 2c_2 \alpha_2^2 \quad \text{หรือ} \quad \cosh \alpha_2 = a_2 + c_2 \alpha_2^2 \quad (17)$$

$$\text{นำสมการ (15) + (16) จะได้ } e^{\mu_2} + e^{-\mu_2} = 2a_2 + 2c_2 \mu_2^2 \quad \text{หรือ} \quad \cosh \mu_2 = a_2 + c_2 \mu_2^2 \quad (18)$$

$$\text{นำสมการ (17) - (18) จะได้ } e^{\alpha_2} - e^{-\alpha_2} = 2b_2 \alpha_2 + 2d_2 \alpha_2^3 \quad \text{หรือ} \quad \sinh \alpha_2 = b_2 \alpha_2 + d_2 \alpha_2^3 \quad (19)$$

$$\text{นำสมการ (15) - (16) จะได้ } e^{\mu_2} - e^{-\mu_2} = 2b_2 \mu_2 + 2d_2 \mu_2^3 \quad \text{หรือ} \quad \sinh \mu_2 = b_2 \mu_2 + d_2 \mu_2^3 \quad (20)$$

จากการแก้ระบบสมการ (17) - (20) จะได้

$$a_2 = \frac{\mu_2^2 \cosh \alpha_2 - \alpha_2^2 \cosh \mu_2}{\mu_2^2 - \alpha_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2^3 \sinh \mu_2 - \mu_2^3 \sinh \alpha_2}{\alpha_2 \mu_2 (\alpha_2^2 - \mu_2^2)}$$

$$c_2 = \frac{\cosh \alpha_2 - \cosh \mu_2}{\alpha_2^2 - \mu_2^2} \quad \text{และ} \quad d_2 = \frac{\mu_2 \sinh \alpha_2 - \alpha_2 \sinh \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 (\alpha_2^2 - \mu_2^2)}$$

**ทฤษฎีบท 2.6** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) และ  $k_2^2 - 4k_0 < 0$

$$\text{จะได้ว่า } e^A = a_3 I_4 + b_3 A + c_3 A^2 + d_3 A^3 \tag{2.9}$$

$$\text{เมื่อ } a_3 = \frac{1}{2uv} (2uv \cosh u \cos v - (u^2 - v^2) \sinh u \sin v)$$

$$b_3 = \frac{1}{2uv(u^2 + v^2)} (v(-v^2 + 3u^2) \sinh u \cos v + u(-u^2 + 3v^2) \cosh u \sin v)$$

$$c_3 = \frac{1}{2uv} (\sinh u \sin v)$$

$$\text{และ } d_3 = \frac{1}{2uv(u^2 + v^2)} (u \cosh u \sin v - v \sinh u \cos v) \tag{2.10}$$

**บทพิสูจน์** กำหนดให้  $k_2^2 - 4k_0 < 0$  โดยบทตั้ง 2.3 (3) จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $A$  นั้นแตกต่างกันทั้งหมด

ดังนี้  $\lambda_1 = z, \lambda_2 = -z, \lambda_3 = \bar{z}$  และ  $\lambda_4 = -\bar{z}$  เมื่อ  $z = u + iv$

โดยที่  $u = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{k_0} - k_2}$  และ  $v = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{k_0} + k_2}$

นั่นคือ  $\lambda_1 = u + iv, \lambda_2 = -(u + iv), \lambda_3 = u - iv$  และ  $\lambda_4 = -(u - iv)$

เมื่อแทนค่า  $\lambda_i$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, 4$  ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^{u+iv} = a_3 + b_3(u + iv) + c_3(u + iv)^2 + d_3(u + iv)^3 \tag{21}$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-(u+iv)} = a_3 - b_3(u + iv) + c_3(u + iv)^2 - d_3(u + iv)^3 \tag{22}$$

$$e^{\lambda_3} = e^{u-iv} = a_3 + b_3(u - iv) + c_3(u - iv)^2 + d_3(u - iv)^3 \tag{23}$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-(u-iv)} = a_3 - b_3(u - iv) + c_3(u - iv)^2 - d_3(u - iv)^3 \tag{24}$$

นำสมการ (21) + (22) จะได้  $e^{u+iv} + e^{-(u+iv)} = 2a_3 + 2c_3(u + iv)^2$

$$\text{หรือ } \cosh(u + iv) = a_3 + c_3(u + iv)^2 \tag{25}$$

นำสมการ (23) + (24) จะได้  $e^{u-iv} + e^{-(u-iv)} = 2a_3 + 2c_3(u - iv)^2$

$$\text{หรือ } \cosh(u - iv) = a_3 + c_3(u - iv)^2 \tag{26}$$

นำสมการ (21) - (22) จะได้  $e^{u+iv} - e^{-(u+iv)} = 2b_3(u + iv) + 2d_3(u + iv)^3$

$$\text{หรือ } \sinh(u + iv) = b_3(u + iv) + d_3(u + iv)^3 \tag{27}$$

นำสมการ (23) - (24) จะได้  $e^{u-iv} - e^{-(u-iv)} = 2b_3(u - iv) + 2d_3(u - iv)^3$

$$\text{หรือ } \sinh(u - iv) = b_3(u - iv) + d_3(u - iv)^3 \tag{28}$$

จากการแก้ระบบสมการ (25) - (28) จะได้

$$a_3 = \frac{1}{2uv} (2uv \cosh u \cos v - (u^2 - v^2) \sinh u \sin v)$$

$$b_3 = \frac{1}{2uv(u^2 + v^2)} (v(-v^2 + 3u^2) \sinh u \cos v + u(-u^2 + 3v^2) \cosh u \sin v)$$

$$c_3 = \frac{1}{2uv} (\sinh u \sin v)$$

และ  $d_3 = \frac{1}{2uv(u^2 + v^2)} (u \cosh u \sin v - v \sinh u \cos v)$

**หมายเหตุ** จากทฤษฎีบท 2.6 จะเห็นได้ว่า ถ้า  $k_2^2 - 4k_0 < 0$  โดยที่  $k_2 = 0$  แล้ว

$$e^A = a_3 I_4 + b_3 A + c_3 A^2 + d_3 A^3$$

เมื่อ  $a_3 = \cosh u \cos u$  ,  $b_3 = \frac{1}{2u} (\sinh u \cos u + \cosh u \sin u)$

$$c_3 = \frac{1}{2u^2} (\sinh u \sin u) \text{ และ } d_3 = \frac{1}{4u^3} (\cosh u \sin u - \sinh u \cos u)$$

โดยที่  $u = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{k_0}}$

### 3. สรุปผล

บทความวิจัยฉบับนี้ ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A \neq \bar{0}$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด โดยที่  $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$  เมื่อ  $\varepsilon$  เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักของ  $\varepsilon$  นั้นเป็น 1 จำนวน 2 ตำแหน่งและเป็น -1 จำนวน 2 ตำแหน่ง ส่วนสมาชิกอื่นเป็น 0 และเมทริกซ์  $A$  เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบที่แตกต่างกับเมทริกซ์  $A$  ในงานวิจัยของ L. Kula, M.K. Karacan และ Y. Yayli จึงเป็นผลให้สูตรของ  $e^A$  เมื่อ  $A \neq \bar{0}$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมดนั้นครบถ้วนทุกกรณี

### 4. References

- [1] Celledoni, E. and Iserles, A., 1998, Approximating the exponential from a Lie algebra to a Lie group, Tech. Report DAMTP 1998/ NA03. Numerical Analysis: Cambridge University. Cambridge. England.
- [2] Kula, L., 2003, Split Quaternions and Geometrical Applications, Ph.D Thesis: Graduate School and The Natural Science. Ankara University.
- [3] Kula, L., Karacan, M. K. and Yayli, Y., 2005, Formulas for the exponential of a semi

- skew-symmetric matrix of order 4, *Mathematical and Computational Applications*. 10(1): 99-104.
- [4] Moler, C. and Van Loan, C., 1978, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*. 20(4): 801-836.
- [5] Politi, T., 2001, A formula for the exponential of a real skew-symmetric matrix of order 4, *BIT Numerical Mathematics*. 41(4): 842-845.
- [6] Sylvester, J. J., 1883, On the equation to the secular inequalities in the planetary theory, *Philosophical Magazine*. 16:267–269.