



การแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน f -derivations of Weak AB-algebras

ปุนชญา พัฒนางกูร*, ธิรายุ อมฤตนาทีธ, ดนัย เขียวหวาน, ทอฝัน ห้องแสง
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Poonchayar Patthanangkoor*, Thirayu Ammaritnateetorn, Danai Kiewwan,
Torphan Hongsaeng

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 13 January 2023; Received in revised 19 April 2023; Accepted 25 April 2023

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้ได้นำเสนอโครงสร้างและศึกษาสมบัติต่างๆ ของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน

คำสำคัญ: พีชคณิต AB อย่างอ่อน; AB-อันตรัสณฐาน; การแปลง f

Abstract

In this paper, we introduce the notions of f -derivations of weak AB-algebras, and investigate their basic properties.

Keywords: Weak AB-algebra; AB-endomorphism; f -derivation

1. บทนำ (Introduction)

จากการศึกษาผลงานวิจัยเรื่องไอดีล AB ของพีชคณิต AB ซึ่งเป็นผลงานวิจัยของ A.T. Hameed และ B.N. Abbas เมื่อปี ค.ศ. 2017 ทำให้ทราบถึงบทนิยาม โครงสร้าง และสมบัติต่างๆ ของพีชคณิต AB นอกจากนี้ ยังทำให้ทราบถึงบทนิยาม โครงสร้าง และสมบัติต่างๆ ของพีชคณิตย่อย AB และไอดีล AB อีกด้วย ซึ่งในปีเดียวกันนี้ A.T. Hameed และ B.N. Abbas ก็ยังได้ศึกษาสมบัติต่างๆ ของไอดีล

AB ของพีชคณิต AB เพิ่มเติม และศึกษาเกี่ยวกับไอดีลวิกษณัย AB (fuzzy AB-ideal) ของพีชคณิต AB อีกด้วย ซึ่งในผลงานวิจัยของ A.T. Hameed และ B.N. Abbas ดังกล่าวได้ให้บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $0 \in X$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X; *, 0)$ ว่า พีชคณิต AB อย่างอ่อน (weak

*ผู้รับผิดชอบบทความ: poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

AB-algebra) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

$$(i) ((x * y) * (z * y)) \leq (x * z)$$

$$(ii) x \leq x$$

$$\text{และ } (iii) x * 0 = x$$

เมื่อความสัมพันธ์ $\leq$ บน X กำหนดโดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทตั้ง 1.2 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) ถ้า $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน แล้ว

(1) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x * z \leq y * z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

และ (2) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $z * y \leq z * x$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม 1.3 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะเรียก $a \in X$ ว่า อะตอม (atom) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า $x \leq a$ แล้ว $x = 0$ หรือ $x = a$ และจะเขียนแทนเซตของอะตอมทั้งหมดของ X ด้วย $A(X)$ กล่าวคือ $A(X) = \{a \in X \mid a \text{ เป็นอะตอมของ } X\}$

บทนิยาม 1.4 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ a เป็นอะตอมของ X จะเรียกเซต $B(a) = \{x \in X \mid a \leq x\}$ ว่าเป็น กิ่ง (branch) ของ X และจะเรียกสมาชิก a ว่า สมาชิกเริ่มต้น (initial element) สำหรับ $B(a)$

หมายเหตุ: เนื่องจาก $a \leq a$ ดังนั้น $a \in B(a)$ นั่นคือ $B(a) \neq \emptyset$

บทนิยาม 1.5 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ a เป็นอะตอมของ X

จะเรียก $B(a)$ ว่าเป็น กิ่งไม่แท้ (improper branch) ก็ต่อเมื่อ มี $b \in X$ โดยที่ b เป็นอะตอมของ X และ $b \neq a$ ที่ซึ่ง $B(a) \subset B(b)$

จะเรียก $B(a)$ ว่าเป็น กิ่งแท้ (proper branch) ก็ต่อเมื่อ ไม่มีอะตอม $b \in X$ โดยที่ $b \neq a$ ที่ทำให้ $B(a) \subset B(b)$

และจะเขียนแทนเซตของสมาชิกเริ่มต้นสำหรับกิ่งแท้ทั้งหมดของ X ด้วย $I(X)$ กล่าวคือ $I(X) = \{a \in X \mid B(a) \text{ เป็นกิ่งแท้ของ } X\}$
หมายเหตุ: $I(X) \subset A(X)$ ทั้งนี้เพราะว่าถ้า $a \in I(X)$ แล้ว $B(a)$ เป็นกิ่งแท้ของ X จึงได้ว่า a เป็นอะตอม นั่นคือ $a \in A(X)$

บทนิยาม 1.6 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่า พีชคณิตย่อย AB อย่างอ่อน (weak AB-subalgebra) ของ X ก็ต่อเมื่อ $x * y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และให้ $\phi: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน ที่กำหนดโดย

$$\phi(x) = 0 * x \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

จะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.7 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

$$(1) \phi^2(x) \leq x$$

$$(2) \text{ ถ้า } x \leq y \text{ แล้ว } \phi(x) = \phi(y)$$

$$(3) \phi^3(x) = \phi(x)$$

$$\text{และ } (4) \phi^2(x * y) = \phi^2(x) * \phi^2(y)$$

ทฤษฎีบท 1.8 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า $I(X) = \phi(X) = \{x \in X \mid \phi^2(x) = x\}$

บทแทรก 1.9 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า $I(X)$ เป็นพีชคณิตย่อย AB ของ X

บทตั้ง 1.10 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า

$$(1) \text{ ถ้า } x, y \in X \text{ แล้ว } x \text{ และ } y \text{ เป็นสมาชิก}$$

ในกึ่งเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $x * y \in B(0)$

$$(2) B(a) * B(b) = B(a * b) \text{ สำหรับทุก } a, b \in I(X)$$

บทนิยาม 1.11 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB

อย่างอ่อน จะเรียก X ว่าเป็น *พีชคณิตสมบูรณ์ (solid algebra)* ก็ต่อเมื่อถ้า $x, y \in X$ โดยที่ x และ y เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน แล้ว $(x * y) * z = (x * z) * y$ สำหรับทุก $z \in X$

ทฤษฎีบท 1.12 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ $x, y \in X$ ถ้า X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ แล้วจะได้ว่า

$x * (x * (x * y)) = x * y$ เมื่อ x และ y เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน

บทแทรก 1.13 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์และ $a \in A(X)$ จะได้ว่า ถ้า $x, y \in B(a)$ แล้ว $x * (x * y) \in B(a)$ และ $y * (y * x) \in B(a)$

ทฤษฎีบท 1.14 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ และ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

$$(i) \text{ ถ้า } x * y \text{ และ } x * z \text{ เป็นสมาชิกในกึ่ง}$$

เดียวกัน แล้ว $(x * y) * (x * z) \leq (z * y)$

$$\text{และ } (ii) \text{ ถ้า } x * y \text{ และ } z * y \text{ เป็นสมาชิกในกึ่ง}$$

เดียวกัน แล้ว $(x * y) * (x * z) \leq (z * y)$

บทนิยาม 1.15 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง

โดยที่ $0 \in X$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก ว่า $(X; *, 0)$ *พีชคณิต AB (AB-algebra)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

$$(AB_1): ((x * y) * (z * y)) * (x * z) = 0$$

$$(AB_2): 0 * x = 0$$

$$\text{และ } (AB_3): x * 0 = x$$

ซึ่งจะเรียก 0 ว่าค่าคงตัวของการดำเนินการ $*$

ทฤษฎีบท 1.16 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017)

กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

- (i) $x * x = 0$
- (ii) $(x * y) * x = 0$
- (iii) $0 * x = 0 * y$

หมายเหตุ: ถ้า $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB แล้ว $(X; *, 0)$ จะเป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน

บทนิยาม 1.17 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; ', 0')$ เป็นพีชคณิต AB (หรือพีชคณิต AB อย่างอ่อน) จะเรียก $f: X \rightarrow Y$ ว่า *สัทิสต์ฐานบนพีชคณิต AB หรือ AB-สัทิสต์ฐาน (AB-homomorphism)* ก็ต่อเมื่อ $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และถ้า $f: X \rightarrow X$ เป็น AB-สัทิสต์ฐานแล้วจะกล่าวว่า f เป็น *AB-อันตรสัณฐาน (AB-endomorphism)*

บทนิยาม 1.18 กำหนดให้ $f: X \rightarrow Y$ เป็น AB-สัทิสต์ฐาน เมื่อ $(X; *, 0)$ และ $(Y; ', 0')$ เป็นพีชคณิต AB (หรือพีชคณิต AB อย่างอ่อน)

จะกล่าวว่า f เป็น *AB-โมโนมอร์ฟิซึม (AB-monomorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะกล่าวว่า f เป็น *AB-อีพิมอร์ฟิซึม (AB-epimorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

และ จะกล่าวว่า f เป็น *AB-สมสัณฐาน (AB-isomorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ในกรณีที่มีฟังก์ชัน AB-สมสัณฐาน $f: X \rightarrow Y$ จะกล่าวว่า X *สมสัณฐาน (isomorphic)* กับ Y และเขียนแทนด้วย $X \cong Y$

ทฤษฎีบท 1.19 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จะได้ว่า ϕ เป็น AB-อันตรสัณฐาน

ต่อมาในปี ค.ศ. 2018 ได้เกิดผลงานวิจัยของ A.T. Hameed และ B.N. Abbas อีกชิ้นหนึ่ง โดยผลงานวิจัยชิ้นนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติบางประการของไอดีลวิกษณัย AB ของพีชคณิต AB จากนั้นในปี ค.ศ. 2019 R.D. Bejarasco และ N.C. Gonzaga ก็ได้ศึกษาเกี่ยวกับสัทิสต์ฐานบนพีชคณิต AB และได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.20 (Bejarasco, R.D. & Gonzaga, N.C., 2019) กำหนดให้ $f: X \rightarrow Y$ เป็น AB-สัทิสต์ฐาน เมื่อ $(X; *, 0)$ และ $(Y; ', 0')$ เป็นพีชคณิต AB (หรือพีชคณิต AB อย่างอ่อน) จะได้ว่า

- (i) $f(0) = 0'$
- (ii) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
- (iii) ถ้า $z \leq y$ แล้ว $f(x * y) \leq f(x * z)$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากผลงานวิจัยต่างๆ เกี่ยวกับพีชคณิต AB อย่างอ่อนข้างต้น จะเห็นว่ายังมีสมบัติอื่นๆ ของพีชคณิต AB อย่างอ่อนที่น่าสนใจที่จะศึกษาเพิ่มเติม ซึ่งบทความวิจัยนี้จะทำการศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่างๆ ของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน

2. ผลงานวิจัย (Main Results)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน พร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่างๆ ของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อนอีกด้วย

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f : X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน ถ้า $d_f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว

จะเรียก d_f ว่า การแปลง f แบบซ้าย-ขวา (left-right- f -derivation) ของ X ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d_f(x * y) = (d_f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_f(y))$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

จะเรียก d_f ว่า การแปลง f แบบขวา-ซ้าย (right-left- f -derivation) ของ X ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d_f(x * y) = (f(x) * d_f(y)) \wedge (d_f(x) * f(y))$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

และจะเรียก d_f ว่า การแปลง f (f -derivation) ของ X ก็ต่อเมื่อ d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาของ X และ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X

เมื่อ $x \wedge y = y * (y * x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นอกจากนี้ ถ้า $d_f(0) = 0$ แล้วจะเรียก d_f ว่า ปรกติ (regular)

เนื่องจาก $d_f(1 * 1) = d_f(0) = 0$,

$$(d_f(1) * f(1)) \wedge (f(1) * d_f(1)) = (0 * 1) \wedge (1 * 0) = 0 \wedge 1 = 1 * (1 * 0) = 1 * 1 = 0$$

และ $(f(1) * d_f(1)) \wedge (d_f(1) * f(1)) = (1 * 0) \wedge (0 * 1) = 1 \wedge 0 = 0 * (0 * 1) = 0 * 0 = 0$

ดังนั้น $d_f(1 * 1) = (d_f(1) * f(1)) \wedge (f(1) * d_f(1)) = (f(1) * d_f(1)) \wedge (d_f(1) * f(1))$

เนื่องจาก $d_f(1 * 2) = d_f(1) = 0$,

$$(d_f(1) * f(2)) \wedge (f(1) * d_f(2)) = (0 * 2) \wedge (1 * 0) = 0 \wedge 1 = 1 * (1 * 0) = 1 * 1 = 0$$

และ $(f(1) * d_f(2)) \wedge (d_f(1) * f(2)) = (1 * 0) \wedge (0 * 2) = 1 \wedge 0 = 0 * (0 * 1) = 0 * 0 = 0$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

จะได้ว่า $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน

กำหนดให้ $f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in X$

จะได้ว่า $f(x * y) = x * y = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น f เป็น AB-อันตรสัณฐาน

กำหนดให้ $d_f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$d_f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \{0, 1, 3\} \\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$$

ดังนั้น $d_f(1*2) = (d_f(1)*f(2)) \wedge (f(1)*d_f(2)) = (f(1)*d_f(2)) \wedge (d_f(1)*f(2))$

เนื่องจาก $d_f(1*3) = d_f(0) = 0$,

$$(d_f(1)*f(3)) \wedge (f(1)*d_f(3)) = (0*3) \wedge (1*0) = 0 \wedge 1 = 1*1 = 1*1 = 0$$

และ $(f(1)*d_f(3)) \wedge (d_f(1)*f(3)) = (1*0) \wedge (0*3) = 1 \wedge 0 = 0*(0*1) = 0*0 = 0$

ดังนั้น $d_f(1*3) = (d_f(1)*f(3)) \wedge (f(1)*d_f(3)) = (f(1)*d_f(3)) \wedge (d_f(1)*f(3))$

เนื่องจาก $d_f(2*1) = d_f(2) = 2$,

$$(d_f(2)*f(1)) \wedge (f(2)*d_f(1)) = (2*1) \wedge (2*0) = 2 \wedge 2 = 2*(2*2) = 2*0 = 2$$

และ $(f(2)*d_f(1)) \wedge (d_f(2)*f(1)) = (2*0) \wedge (2*1) = 2 \wedge 2 = 2*(2*2) = 2*0 = 2$

ดังนั้น $d_f(2*1) = (d_f(2)*f(1)) \wedge (f(2)*d_f(1)) = (f(2)*d_f(1)) \wedge (d_f(2)*f(1))$

เนื่องจาก $d_f(3*1) = d_f(3) = 0$,

$$(d_f(3)*f(1)) \wedge (f(3)*d_f(1)) = (0*1) \wedge (3*0) = 0 \wedge 3 = 3*(3*0) = 3*3 = 0$$

และ $(f(3)*d_f(1)) \wedge (d_f(3)*f(1)) = (3*0) \wedge (0*1) = 3 \wedge 0 = 0*(0*3) = 0*0 = 0$

ดังนั้น $d_f(3*1) = (d_f(3)*f(1)) \wedge (f(3)*d_f(1)) = (f(3)*d_f(1)) \wedge (d_f(3)*f(1))$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $d_f(x*y) = (d_f(x)*f(y)) \wedge (f(x)*d_f(y))$

และ $d_f(x*y) = (f(x)*d_f(y)) \wedge (d_f(x)*f(y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น d_f เป็นการแปลง f ของ X และเนื่องจาก $d_f(0) = 0$ จึงได้ว่า d_f เป็นการแปลง f แบบปรกติของ X

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน ถ้า $f: X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐานของ X แล้ว f เป็นการแปลง แบบปรกติของ X

พิสูจน์ สมมติให้ $f: X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐานของ X และ $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } f(0) = 0 \text{ และ } (f(x)*f(y)) \wedge (f(x)*f(y)) &= f(x*y) \wedge f(x*y) \\ &= f(x*y)*(f(x*y)*f(x*y)) \\ &= f(x*y)*0 \\ &= f(x*y) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นการแปลง f แบบปรกติของ X □

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ $d_f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f : X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน จะได้ว่า

- (1) ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาที่เป็นปรกติของ X แล้ว

$$d_f(x) = d_f(x) \wedge f(x) \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

- (2) ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X แล้ว $d_f(x) = f(x) \wedge d_f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X

พิสูจน์ (1) สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาที่เป็นปรกติของ X และ $x \in X$ จะได้ว่า

$$d_f(x * y) = (d_f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_f(y)) \text{ สำหรับทุก } y \in X \text{ และ } d_f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d_f(x) &= d_f(x * 0) \\ &= (d_f(x) * f(0)) \wedge (f(x) * d_f(0)) \\ &= (d_f(x) * 0) \wedge (f(x) * 0) \\ &= d_f(x) \wedge f(x) \end{aligned}$$

- (2) สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X จะได้ว่า

$$d_f(x * y) = (f(x) * d_f(y)) \wedge (d_f(x) * f(y)) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

$$\text{สมมติให้ } d_f(x) = f(x) \wedge d_f(x) \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d_f(0) &= f(0) \wedge d_f(0) \\ &= d_f(0) * (d_f(0) * f(0)) \\ &= d_f(0) * d_f(0) = 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X

ในทางกลับกัน สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X และ $x \in X$

$$\text{ดังนั้น } d_f(0) = 0 \text{ และจะได้ว่า } d_f(x) = d_f(x * 0)$$

$$\begin{aligned} &= (f(x) * d_f(0)) \wedge (d_f(x) * f(0)) \\ &= (f(x) * 0) \wedge (d_f(x) * 0) \\ &= f(x) \wedge d_f(x) \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ $f : X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า

- (1) ถ้า f เป็น AB-สมสัณฐาน และ $a \in A(X)$ แล้ว $f(a) \in A(X)$
- (2) ถ้า $a \in I(X)$ แล้ว $f(a) \in I(X)$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ f เป็น AB-สมสัณฐาน และ $a \in A(X)$ และให้ $y \in X$ โดยที่ $y \leq f(a)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้นจะมี $x \in X$ ที่ซึ่ง $y = f(x)$

จะได้ว่า $f(x) \leq f(a)$

นั่นคือ $f(x) * f(a) = f(x * a) = 0$

เนื่องจาก $f(0) = 0$ จึงได้ว่า $f(x * a) = f(0)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $x * a = 0$ นั่นคือ $x \leq a$

จาก $a \in A(X)$ จะได้ว่า $x = 0$ หรือ $x = a$

ดังนั้น $y = f(x) = f(0) = 0$ หรือ $y = f(x) = f(a)$

เพราะฉะนั้น $f(a) \in A(X)$

- (2) สมมติให้ $a \in I(X)$

โดยทฤษฎีบท 1.8 จะได้ว่า $a = \phi^2(a) = \phi(\phi(a)) = \phi(0 * a) = 0 * (0 * a)$

ดังนั้น $f(a) = f(0 * (0 * a)) = f(0) * f(0 * a) = f(0) * (f(0) * f(a))$
 $= 0 * (0 * f(a)) = 0 * \phi(f(a)) = \phi(\phi(f(a))) = \phi^2(f(a))$

โดยทฤษฎีบท 1.8 จึงสรุปได้ว่า $f(a) \in I(X)$ □

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ $d_f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ $f : X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูร์น และ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X หรือเป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาของ X จะได้ว่า ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบปกติของ X แล้ว $f(x)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ กำหนดให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X

สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบปกติของ X และ $x \in X$

จะได้ว่า $0 = d_f(x * x) = (f(x) * d_f(x)) \wedge (d_f(x) * f(x))$
 $= (d_f(x) * f(x)) * ((d_f(x) * f(x)) * (f(x) * d_f(x)))$

ดังนั้น $d_f(x) * f(x) \leq (d_f(x) * f(x)) * (f(x) * d_f(x))$

โดยบทตั้ง 1.2 (1) จะได้ว่า

$$0 = (d_f(x) * f(x)) * (d_f(x) * f(x)) \leq ((d_f(x) * f(x)) * (f(x) * d_f(x))) * (d_f(x) * f(x))$$

เนื่องจาก X เป็นพีชคณิตสมบรูณ์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} & ((d_f(x) * f(x)) * (f(x) * d_f(x))) * (d_f(x) * f(x)) \\ &= ((d_f(x) * f(x)) * (d_f(x) * f(x))) * (f(x) * d_f(x)) \\ &= 0 * (f(x) * d_f(x)) \end{aligned}$$

ดังนั้น $0 \leq 0 * (f(x) * d_f(x))$ และโดยทฤษฎีบท 1.7 จะได้ว่า

$$0 = 0 * (0 * (f(x) * d_f(x))) = \phi^2(f(x) * d_f(x)) \leq f(x) * d_f(x)$$

ทำให้ได้ว่า $f(x) * d_f(x) \in B(0)$ โดยบทตั้ง 1.10 จึงได้ว่า $f(x)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน

ในทำนองเดียวกัน ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาที่เป็นปรกติของ X แล้ว $f(x)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน $\square$

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดให้ $d_f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f : X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบรูณ์ จะได้ว่า ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X แล้ว $d_f(B(a)) \subseteq B(f(a))$ สำหรับทุก $a \in I(X)$

พิสูจน์ กำหนดให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X และ $a \in I(X)$

จากทฤษฎีบท 2.4 (2) จะได้ว่า $f(a) \in I(X)$

สมมติให้ $x \in B(a)$ จะได้ว่า $a \leq x$ นั่นคือ $a * x = 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 0 &= d_f(0) = d_f(a * x) \\ &= (f(a) * d_f(x)) \wedge (d_f(a) * f(x)) \\ &= ((d_f(a) * f(x)) * (d_f(a) * f(x))) * (f(a) * d_f(x)) \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } d_f(a) * f(x) \leq (d_f(a) * f(x)) * (f(a) * d_f(x))$$

โดยบทตั้ง 1.2 (1) จะได้ว่า

$$0 = (d_f(a) * f(x)) * (d_f(a) * f(x)) \leq ((d_f(a) * f(x)) * (f(a) * d_f(x))) * (d_f(a) * f(x))$$

เนื่องจาก X เป็นพีชคณิตสมบรูณ์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
& ((d_f(a) * f(x)) * (f(a) * d_f(x))) * (d_f(a) * f(x)) \\
&= ((d_f(a) * f(x)) * (d_f(a) * f(x))) * (f(a) * d_f(x)) \\
&= 0 * (f(a) * d_f(x))
\end{aligned}$$

ดังนั้น $0 \leq 0 * (f(a) * d_f(x))$ และโดยทฤษฎีบท 1.7 จะได้ว่า

$$0 = 0 * (0 * (f(a) * d_f(x))) = 0 * \phi(f(a) * d_f(x)) = \phi^2(f(a) * d_f(x)) \leq f(a) * d_f(x)$$

ทำให้ได้ว่า $f(a) * d_f(x) \in B(0)$

โดยบทตั้ง 1.10 จะได้ว่า $f(a)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน

เนื่องจาก $f(a) \in B(f(a))$ ดังนั้น $d_f(x) \subseteq B(f(a))$

เพราะฉะนั้น $d_f(B(a)) \subseteq B(f(a))$ □

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ $d_f : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f : X \rightarrow X$ เป็น AB-อันตรัสณฐาน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จะได้ว่า ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X แล้ว $d_f(a) = 0$ หรือ $d_f(a) = f(a)$ สำหรับทุก $a \in I(X)$

พิสูจน์ กำหนดให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X และ $a \in I(X)$

จากทฤษฎีบท 2.4 (2) จะได้ว่า $f(a) \in I(X)$

โดยทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า $d_f(B(a)) \subseteq B(f(a))$

เนื่องจาก $a \in B(a)$ จึงได้ว่า $d_f(a) \in B(f(a))$

ดังนั้น $f(a) \leq d_f(a)$

เนื่องจาก $d_f(a), f(a) \in B(f(a))$ ดังนั้น $d_f(a)$ และ $f(a)$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน

โดยทฤษฎีบท 2.3 (2) จะได้ว่า $d_f(a) = f(a) \wedge d_f(a) = d_f(a) * (d_f(a) * f(a))$

เนื่องจาก X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
d_f(a) * f(a) &= (d_f(a) * (d_f(a) * f(a))) * f(a) \\
&= (d_f(a) * f(a)) * (d_f(a) * f(a)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $d_f(a) \leq f(a)$

เนื่องจาก $f(a) \in I(X)$ ดังนั้น $d_f(a) = 0$ หรือ $d_f(a) = f(a)$ □

3. References

- [1] Bejarasco, R. D. and Gonzaga, N. C., 2019, On Homomorphisms of AB-algebras, Missouri J. Math. Sci. 31(2): 121-129.
- [2] Hameed, A.T. and Abbas, B.N., 2017, AB-ideals of AB-algebras, Applied Mathematical Sciences. 11(35): 1715-1723.
- [3] Hameed, A.T. and Abbas, B.N., 2018, Fuzzy AB-ideals of AB-algebra, Journal of AL-Qadisiyah for computer science and mathematics. 10(1): 1-7.