



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 68 เล่มที่ 709 มกราคม – เมษายน 2566

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คณิตศาสตร์ของเราแต่เก่าก่อน : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส Our Mathematics From the Past : Pythagoras' Theorem

DOI: 10.14456/mj-math.xxxx.x

จินนดิษฐ์ ละออปักชิน^{1,*} และ สมภาพ วัชฤทธิ์²

¹สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

²กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมวัดเบญจมบพิตร กรุงเทพมหานคร 10300

Jinnadit Laorpaksin^{1,*} and Sompob Watcharit²

¹Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction,
Faculty of Education, Chulalongkorn University, Bangkok 10330

²Mathematics Department, Mattayom Watbenchamabophit School, Bangkok 10300

Email: ¹jinnadit.l@chula.ac.th ²Sompob.wt@gmail.com

วันที่รับบทความ : 4 สิงหาคม 2565

วันที่แก้ไขบทความ : 26 กุมภาพันธ์ 2566

วันที่ตอบรับบทความ : 17 เมษายน 2566

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอประวัติโดยย่อของพีทาโกรัส และความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามอารยธรรมต่าง ๆ ตลอดจนการปรากฏของเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัสในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของไทย และร่องรอยของทฤษฎีบทพีทาโกรัสจากคัมภีร์เลขปกรณ์ในสมัยต้นรัตนโกสินทร์

คำสำคัญ: พีทาโกรัส ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

This article presents a brief of Pythagoras' biography and the knowledge of Pythagoras' theorem from various ancient civilizations. In addition, Pythagoras' theorem in Thai mathematics curriculum and the clue of Pythagoras' theorem from Lakepakorn book in early Rattanakosin period.

Keywords: Pythagoras, Pythagoras' theorem

1. บทนำ

ในบรรดานักคณิตศาสตร์ที่ได้รับการออกชื่อในบทเรียนตามแบบเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไปนั้น ชื่อที่ติดหูและเป็นที่รู้จักกันในอันดับต้น ๆ คงหนีไม่พ้น “พีทาโกรัส” และทฤษฎีบทของเขา นักเรียนส่วนใหญ่ในระบบการศึกษาปัจจุบันของไทยทั้งที่ศึกษาในสายการเรียนที่เน้นคณิตศาสตร์ หรือไม่เน้นคณิตศาสตร์ ก็น่าจะจดจำเนื้อหาของทฤษฎีบทนี้ได้ หรืออย่างน้อยก็น่าจะคุ้นเคยกับชุดตัวเลข 3, 4 และ 5 อยู่บ้าง แม้ว่าองค์ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะมีชื่อพีทาโกรัสกำกับอยู่ หากแต่พีทาโกรัสไม่ใช่บุคคลแรกที่ค้นพบความสัมพันธ์พิเศษนี้ และสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยก็เป็นที่น่าสนใจว่า ได้เริ่มกำหนดให้มีการเรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสในชื่อทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาตั้งแต่เมื่อใด

2. ในความเป็นพีทาโกรัส

ตามประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์นั้น พีทาโกรัส (Pythagoras : ประมาณ 580–496 ปีก่อนคริสตกาล) คือหนึ่งในนักคณิตศาสตร์ยุคแรกที่คนทั่วไปคุ้นเคยชื่อของเขาเป็นอย่างดี โดยหากนับตามช่วงอายุแล้วเขามีชีวิตอยู่ในช่วงปลายพุทธกาล และเกิดช้ากว่าทาเลสแห่งมิลีตุส (Thales of Miletus : ประมาณ 640–546 ปีก่อนคริสตกาล) ผู้ซึ่งได้รับการยกย่องว่าเป็นนักคณิตศาสตร์คนแรกของโลกอยู่เพียงราว 60 ปี ด้วยเหตุที่ทั้งพีทาโกรัสและทาเลสมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาและสถานที่ที่ใกล้เคียงกันจนอาจสันนิษฐานได้ว่าทั้งสองคนมีโอกาสได้พบเจอกัน จึงเชื่อกันว่าพีทาโกรัสเป็นลูกศิษย์คนหนึ่งของทาเลส (หรือสำนักเรียนสายทาเลส) และทาเลสเองก็เป็นแรงบันดาลใจสำคัญที่ทำให้พีทาโกรัสออกเดินทางไปเรียนรู้สรรพสิ่งในโลกกว้าง ทั้งอียิปต์ บาบิโลน รวมไปถึงดินแดนที่ไกลออกไปทางฝั่งตะวันออก โดยการเดินทางครั้งนั้นนับได้ว่าเป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่ทำให้ชื่อของเขานั้นยังคง

ได้รับการเล่าขานอยู่ตามตำราเรียนทั่วไปในปัจจุบันผ่านทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงมากทฤษฎีบทหนึ่ง [22]

เมื่อเอ่ยนามพีทาโกรัส นอกจากจะต้องระวังไม่ให้สับสนกับ โปรทาโกรัส (Protagoras : ประมาณ 490–420 ปีก่อนคริสตกาล) นักปรัชญากลุ่มโซฟิสต์ (Sophists) [4] แล้ว นามพีทาโกรัสก็มักจะตามท้ายด้วยสร้อยชื่อเมืองสำคัญในช่วงชีวิตกว่าแปดสิบปีของเขา ทั้งซามอส (Samos) โครโตนา (Crotona) และเมตาปอนตัม (Metapontum) [6] พีทาโกรัสเกิดที่เกาะซามอส ในทะเลอีเจียน (Aegean) ริมชายฝั่งของประเทศตุรเคีย (ในปัจจุบันเมืองด้านทิศตะวันออกเฉียงใต้ของเกาะซึ่งเชื่อว่าเป็นถิ่นเกิดของพีทาโกรัส ก็ได้รับการตั้งชื่อใหม่ว่าเมืองพีทาโกรอน (Pythagorion) และมีอนุสาวรีย์ของเขาตั้งอยู่บริเวณอ่าวพีทาโกรอน) พีทาโกรัสใช้ช่วงครึ่งแรกของชีวิตในการออกศึกษาหาความรู้ ก่อนที่จะกลับมาก่อตั้งสำนักพีทาโกเรียน (Pythagorean School) ที่เมืองโครโตนา ซึ่งสอนสรรพวิทยาความรู้ทั้ง คณิตศาสตร์ ปรัชญา ธรรมชาติวิทยา ดนตรี ดาราศาสตร์ และอื่น ๆ [18] สำนักเรียนนี้นอกจากจะมีแนวคิดหลักที่เชื่อว่า “จำนวน” คือกุญแจไขความลับของจักรวาลแล้วยังเชื่อในหลักภราดรภาพ (Brotherhood) คือ ความเป็นพี่เป็นน้องร่วมสำนัก ความรู้ของสำนักถือเป็นความลับที่จะถ่ายทอดกันในเฉพาะสำนัก มีความคิดความเชื่อร่วมกันจนคล้ายเป็นลัทธิ ที่สำคัญยังยึดหลักการว่าผลงานของสมาชิกในสำนักก็คือผลงานในนามของสำนัก ด้วยเหตุนี้จึงทำให้เกิดแนวคิดที่ว่า ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสอาจไม่ใช่ผลงานของพีทาโกรัส เป็นแต่เพียงผลงานของสมาชิกคนใดคนหนึ่งของสำนักพีทาโกเรียนก็เป็นได้ นอกจากนี้สำนักพีทาโกเรียนยังเชื่อในชีวิตหลังความตาย การกลับชาติมาเกิด การถือมั่งสวัสดิ งตทานถั่วและของมีนเมา และมีแนวคิดที่ออกจะล้าสมัยก็คือการเปิดกว้างด้านสิทธิสตรี และการให้ความสำคัญกับความเสมอภาคของหญิงและชาย जबจนกาลต่อมาสำนักพีทาโกเรียนได้เกิดความขัดแย้งทางความคิดกับผู้นำท้องถิ่น จนต้องประสบกับภัยทางการเมือง สำนักพีทาโกเรียนจึงถูกต่อต้าน เผาทำลาย และพีทาโกรัสก็จำต้องย้ายหนีเอาชีวิตรอดไปยังเมืองเมตาปอนตัม และจบชีวิตลงที่นั่น

3. ในความหลากหลายของผู้มาก่อนและมาหลัง

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า องค์ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ ไม่ได้ถูกค้นพบขึ้นครั้งแรกโดยพีทาโกรัส หากแต่เขาในฐานะอาจารย์ผู้ยิ่งใหญ่ อาจจะเป็นผู้ที่ได้พร่ำสอน ขยายความ หรือแสดงผลของความสัมพันธ์นี้ ให้กับสานุศิษย์ในแบบมุขปาฐะ [19]

โดยไม่บันทึกหลักฐานไว้ ชื่อของเขาจึงได้กลายเป็นชื่อทฤษฎีบท และเรียกขานสืบเนื่องต่อกันมา แม้ในปัจจุบันจะไม่หลงเหลือหลักฐานอะไรเกี่ยวกับบทพิสูจน์แบบพีทาโกรัสเลยก็ตาม ในขณะที่ตามอารยธรรมต่าง ๆ หลายแห่ง ยังปรากฏร่องรอยหลักฐานชัดเจนที่สะท้อนว่าพวกเขาเข้าใจ รู้จัก และใช้งาน “ทฤษฎีบทรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” กันมาก่อนหน้านั้นแล้ว

บาบิโลน : มีการค้นพบแผ่นดินเหนียวซึ่งต่อมาได้รับการตั้งชื่อว่า พลิมป์ตัน 322 (Plimpton 322) ซึ่งมีอายุช่วงประมาณ 1,800 ปีก่อนคริสต์ศักราช ในรัชสมัยพระเจ้าฮัมมูราบี แห่งอาณาจักรบาบิโลนเก่า หรือก่อนยุคพีทาโกรัสราว 1,200 ปี พลิมป์ตัน 322 เป็นแผ่นดินเหนียวขนาดประมาณหนึ่งฝ่ามือ จารึกอักษรลิ่ม (Cuneiform) เป็นตัวเลข 15 บรรทัด แบ่งออกเป็น 4 สดมภ์ โดยสองสดมภ์กลางแสดงจำนวนเต็มสองจำนวนในระบบสัณฐานหรือระบบฐานหกสิบ ที่แทนความยาวด้านประกอบมุมฉากด้านสั้น (สดมภ์ที่ 2) และความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก (สดมภ์ที่ 3) ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็นจำนวนเต็ม แม้ในการจารึกจะไม่ได้ระบุความยาวด้านประกอบมุมฉากที่เหลือ แต่เห็นได้ชัดว่ามีการนำความยาวนี้ไปใช้ในการคำนวณเป็นจำนวนในสดมภ์ที่ 1 แสดงว่าในสมัยนั้นมีความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว ทั้งนี้เมื่อถอดความแล้วสามสิ่งอันดับที่แสดงชุดความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ปรากฏในแผ่นดินเหนียวมีทั้งชุดขนาดเล็กอย่าง (119, 120, 169) (45, 60, 75) และรวมไปจนถึงชุดขนาดใหญ่อย่าง (4961, 6480, 8161) (12709, 13500, 18541)



รูปที่ 1 (ก) แผ่นดินเหนียวพลิมป์ตัน 322 รูปที่ 1 (ข) แผ่นดินเหนียวเยล 7289

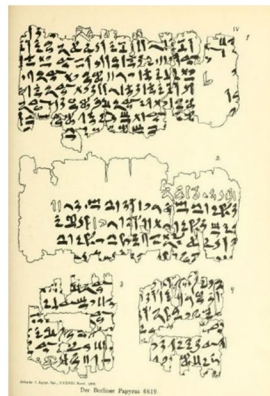
แหล่งที่มารูปที่ 1 (ก): <https://scientificgems.wordpress.com/2017/08/27/the-plimpton-322-tablet-re-examined/>

รูปที่ 1 (ข): <https://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/ybc-7289/>

นอกจากพลิมป์ตัน 322 แล้ว ยังมีแผ่นดินเหนียวเยล 7289 (Yale Babylonian Collection, YBC 7289) ซึ่งมีอายุอยู่ในช่วงราวศตวรรษที่ 19 – ศตวรรษที่ 17 ก่อนคริสต์ศักราช จารึกบนก้อนดิน

เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บริเวณแนวเส้นทแยงมุมมีอักษรลิ่มแสดงความยาวของเส้นทแยงมุมเป็นค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ ในกรณีนี้อาจพิจารณาได้เป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว

อียิปต์ : มีเรื่องเล่าขานเกี่ยวกับต้นเค้าแนวคิดที่พีทาโกรัสนำมาใช้สร้างเป็นทฤษฎีบทว่า ในช่วงหนึ่งของการท่องเที่ยวโลกเรียนรู้ พีทาโกรัสได้เดินทางไปยังอียิปต์และพบเห็นชาวพื้นเมืองใช้เชือกที่แบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน โดยผูกเป็นปม 11 ปม นำมาซึ่งเพื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาว 3, 4 และ 5 หน่วย [8] ซึ่งในปัจจุบันเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตำนานนี้นับเป็นหนึ่งในหลักฐานที่สะท้อนว่าอียิปต์มีความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์นี้อยู่ก่อนหน้าพีทาโกรัส แต่นอกเหนือจากเรื่องเล่านี้แล้วยังมีหลักฐานที่เป็นวัตถุอีกหนึ่งชิ้นที่ช่วยเชื่อมโยงถึงความรู้นี้ได้ก็คือ เบอ์ลินพาไพรัส 6619 (Berlin Papyrus 6619) กระดาษพาไพรัสโบราณ ที่บันทึกข้อความไว้ตั้งแต่สมัยอาณาจักรกลาง (ประมาณ 2,000–1,580 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ซึ่งขุดพบบริเวณสุสานเก่าในเมืองซัคคารา (Saqqara) ความส่วนหนึ่งในเบอ์ลินพาไพรัสระบุว่า “พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เท่ากับ 100 (ตารางหน่วย) จะเท่ากับ (ผลรวมของ) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (ที่มี) ขนาดเล็กกว่าอีกสองรูป ซึ่งความยาวด้านของ (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก) รูปหนึ่งนั้นเป็น $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ เท่าของความยาวด้านของ (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก) อีกรูปหนึ่ง (แล้วความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองนั้นจะเท่ากับเท่าไร)”



รูปที่ 2 เบอ์ลินพาไพรัส 6619

แหล่งที่มา: https://en.wikipedia.org/wiki/Berlin_Papyrus_6619

ปัญหานี้เมื่อมองจากมุมมองปัจจุบัน จะได้เป็นสมการกำลังสอง $x^2 + \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x\right)^2 = 100$ ซึ่งหาค่าของ x ได้เป็น 8 และจะได้ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามเป็น 6, 8 และ 10 ซึ่ง (6, 8, 10) เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส แม้จะไม่ชัดเจนนักแต่ก็สามารถเชื่อมโยงและสันนิษฐานได้ว่าปัญหานี้เกี่ยวข้องกับความรู้ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

กรีก : พีทาโกรัสเป็นหนึ่งในนักคิดคนสำคัญในช่วงต้นของอารยธรรมกรีก ที่มีอิทธิพลต่อนักคิดของกรีกในรุ่นต่อ ๆ มา นักคณิตศาสตร์กรีกคนหนึ่งที่ได้รับอิทธิพลนั้น และมีบทบาททำให้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้สืบทอดต่อมาอย่างเป็นระบบไม่ขาดสายก็คือ ยูคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria : ประมาณ 325–265 ปีก่อนคริสต์ศักราช) เจ้าของดิ เอเลเมนต์ส์ (The Elements) ตำราชุดทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญของโลก ประกอบด้วยตำราย่อย 13 เล่ม โดยในเล่มที่ 1 ทฤษฎีบทที่ 47 ก็คือทฤษฎีบทพีทาโกรัสในแนวทางเรขาคณิต ซึ่งในตำรานี้ได้แสดงบทพิสูจน์ที่รัดกุมไว้ เชื่อกันว่ายูคลิดเป็นผู้คิดการพิสูจน์ในแนวทางนี้ด้วยตนเอง บางครั้งพบการเรียกบทพิสูจน์ลักษณะนี้ว่าบทพิสูจน์แบบคลาสสิก หรือแบบกังหันลม เพราะภาพที่ใช้ประกอบการพิสูจน์มีลักษณะคล้ายกับกังหันลม

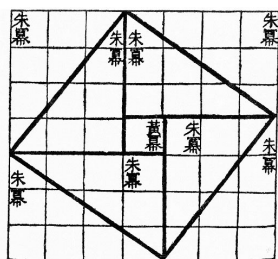


รูปที่ 3 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสใน ดิ เอเลเมนต์ส์
ตามแนวทางการอธิบายของ โอลิเวอร์ เบิร์น (Oliver Byrne) [12]

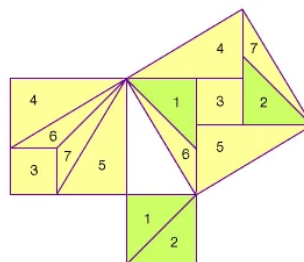
หลังจากแสดงทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว ในทฤษฎีบทที่ 48 ทฤษฎีบทสุดท้ายของเล่ม 1 ยูคลิดยังได้แสดงบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไว้ด้วย นอกจากนี้ก็ยังได้แสดงทฤษฎีบทพีทาโกรัสในกรณีทั่วไปพร้อมบทพิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบทที่ 31 ของเล่มที่ 6 โดยขยายความจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปสู่รูปเรขาคณิตที่คล้ายกันตามสัดส่วนของความยาวด้านทั้งสาม

ข้อสังเกตประการหนึ่งเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสใน ดี เอลเลเมนต์ส์ ก็คือชื่อของพีทาโกรัสได้รับการอ้างถึงว่าเกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทนี้อีกครั้ง ในงานเขียนเรื่อง “ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับ ดี เอลเลเมนต์ส์ เล่มแรกของยุคลิด” (A Commentary on the First Book of Euclid's Elements หรือ Commentary on Euclid, Book I) ของ โพรคลุส (Proclus : ค.ศ. 410–485) ซึ่งห่างไกลมาจากยุคของยุคลิด และห่างไกลมาก ๆ จากยุคของพีทาโกรัส [11, 14]

จิน : โจวปีซ่วนจิง (Zhou Bi Suan Jing หรือ Chou Pei Suan Ching) เป็นเอกสารโบราณเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของจีนที่เก่าแก่และมีชื่อเสียงมาก คาดว่าเขียนขึ้นในยุครณรัฐ (จันกั๋ว : ประมาณ 475–221 ปีก่อนคริสต์ศักราช) สมัยราชวงศ์โจว ในตำรานี้ปรากฏแผนภาพเสียนถู (Hsuan–Thu) ซึ่งแสดงตารางขนาด 7×7 ภายในแบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 และ 4 หน่วย จำนวน 4 รูป และด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่รูปต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 และ 4 หน่วย อีก 4 รูป และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วยอีก 1 รูป ดังรูปที่ 4 (ก) ทำให้สรุปได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น มีพื้นที่ 25 ตารางหน่วย หรือมีความยาวด้านเท่ากับ 5 หน่วย แม้เอกสารจะไม่ได้แสดงบทพิสูจน์ที่รัดกุม แต่ก็สะท้อนได้ถึงการใช้ความรู้เกี่ยวกับสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (3, 4, 5) ซึ่งยังสามารถขยายเป็นกรณีทั่วไปเพื่อสรุปเป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ [13]



รูปที่ 4 (ก) แผนภาพเสียนถู



รูปที่ 4 (ข) การพิสูจน์ของ หลิว ฮุย

แหล่งที่มารูปที่ 4 (ก): https://de.wikipedia.org/wiki/Zhoubi_suanjing

รูปที่ 4 (ข): <https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem>

หลังการเสื่อมสลายของราชวงศ์โจว จินเข้าสู่ยุคราชวงศ์จิ้น (ประมาณ 221–206 ปีก่อนคริสต์ศักราช) และด้วยนโยบายการปกครอง “เผด็จการ ฆ่าบัณฑิต” ของ จินซีฮ่งเต้ (Qin Shi Huang : ประมาณ 260–210 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ทำให้ตำราวิชาการส่วนใหญ่ถูกเผาทำลาย ส่วนที่

เหลือตกทอดมาก็เป็นเพราะการชุกช่อนหรือการเรียบเรียงขึ้นใหม่ของเหล่านักปราชญ์ โดยหนึ่งในตำราคณิตศาสตร์ที่เชื่อกันว่าเกิดขึ้นใหม่อีกครั้งจากผลกระทบของสถานการณ์นี้ก็คือ จิวจางซวนซู (Jiuzhang Suanshu) หรือ ตำราเลขคณิตเก้าบท (The Nine Chapters on the Mathematical Art หรือ Arithmetic in Nine Sections) ซึ่งต่อมาอีกราว 470 ปี คือในปี ค.ศ. 263 หลิว ฮุย (Liu Hui : ประมาณศตวรรษที่ 3) นักคณิตศาสตร์จีนคนสำคัญแห่งแคว้นวุยในยุคสามก๊ก ก็ได้ปรับปรุงและเรียบเรียงตำราเล่มนี้ใหม่ จนกลายเป็นหนึ่งในตำราที่มีอิทธิพลมากต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ของจีนโบราณ โดยในงานของ หลิว ฮุย ยังปรากฏการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยการใช้การตัดรูปไว้ด้วย [24] ดังแสดงในรูปที่ 4 (ข)

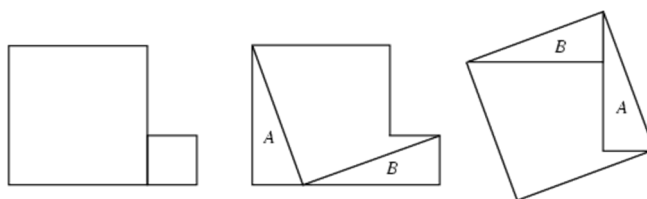
อินเดีย : ในยุคพระเวท ซึ่งมีอายุช่วงประมาณ 1,500–500 ปีก่อนคริสต์ศักราช ปรากฏคัมภีร์ศุลปสูตร (Sulba Sutras) รจนาด้วยภาษาสันสกฤตสมัยพระเวท โดยเป็นส่วนที่แต่งเสริมจากคัมภีร์พระเวท ซึ่งเป็นบทสวดพิธีกรรมของศาสนาพราหมณ์ หนึ่งในศุลปสูตรที่สำคัญ คือ เพาธยานศุลปสูตร (Baudhayana Sulba Sutras) สันนิษฐานว่าแต่งขึ้นเมื่อราว 800 ปีก่อนคริสต์ศักราช [21] ปรากฏข้อความเกี่ยวกับการใช้ความรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

“เมื่อรวมพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูป ซึ่งสร้างแยกกันจากความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง จะได้เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างจากความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนั้น นี่คือนสิ่งที่สังเกตได้จากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดความยาวด้านทั้งสองเป็น 3 และ 4 , 12 และ 5 , 15 และ 8 , 7 และ 24 , 12 และ 35 , 15 และ 36” [17]

แม้ว่าบทพิสูจน์เชิงเรขาคณิตที่รัดกุมและเป็นกรณีทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้รับการเรียบเรียงขึ้นภายหลังเมื่อราวกลางศตวรรษที่ 16 แต่ก็เห็นได้ชัดจากเพาธยานศุลปสูตรว่า อินเดียมีความรู้นี้อยู่ก่อนหน้าพีทาโกรัสแล้ว นอกจากนี้จากเรื่องราวการเดินทางท่องโลกมาทางบูรพาทิศของพีทาโกรัส และการที่สำนักพีทาโกเรียนมีหลักปรัชญา หลักคิด หลักปฏิบัติบางส่วน ที่คล้ายแนวทางของศาสนาเชนและศาสนาพุทธ จึงมีบางแนวคิดที่เชื่อว่าพีทาโกรัสได้เดินทางมาทางตะวันออกจนไกลมากพอที่จะได้ยิน ได้ศึกษา และได้รับแรงบันดาลใจจากเพาธยานศุลปสูตรแล้วนำกลับไปสอน จนต่อมาได้กลายเป็นทฤษฎีบทในชื่อของเขาเอง [19]

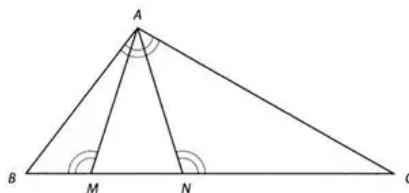
อาหรับ : ศาสนาอิสลามคือปัจจัยสำคัญที่ทำให้ก่อเกิดและสร้างสรรค์อารยธรรมอาหรับ กอปรกับแนวคิดในการเปิดรับความรู้จากดินแดนรอบข้าง จึงมีการแปลตำราสำคัญของกรีกทั้ง ดี เอลเลเมนต์ส์ของยูคลิด (The Elements of Euclid) อัลมาเจสต์ของทอเลมี (Almagest of

Ptolemy) อะริทเมติกของไดโอแฟนทัส (Arithmetica of Diophantus) [23] รวมถึงยอมรับและนำความรู้ของกรีกและอินเดียมาใช้งาน โดยในช่วงราชวงศ์อับบาซิด (Abbasid) ราวกลางศตวรรษที่ 8 ถึงต้นศตวรรษที่ 13 ซึ่งเป็นยุคทองที่มีความเจริญสูงสุด มีการจัดตั้งสภาแห่งภูมิปัญญา (The House of Wisdom) เพื่อเป็นห้องสมุดที่รวบรวมตำราสำคัญและเป็นสถานชุมนุมของเหล่านักคิด ในรัชสมัยของเคาะลีฟะฮ์ ฮารูน อัลรอชิด (Harun Al-Rashid : ค.ศ. 763–809) ในช่วงนี้มีนักคิดที่มีบทบาทต่อวงการคณิตศาสตร์อาหรับคนสำคัญ โดยเฉพาะการวางรากฐานงานด้านพีชคณิตก็คือ มุฮัมมัด อิบน์ มูซา อัลควาริซมี (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi : ค.ศ. 780–850) ซึ่งเขามีผลงานเกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสด้วย แต่เป็นกรณีเฉพาะรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว [10, 23] นอกจากนี้ ทาบิท อิบน์ กุรเราะฮ์ (Thabit ibn Qurra : ค.ศ. 836–901) นักคณิตศาสตร์ นักดาราศาสตร์ และปราชญ์ผู้รอบรู้ ก็มีผลงานการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้การตัดรูป ดังรูปที่ 5 และเขายังได้วางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมคล้าย ดังรูปที่ 6



รูปที่ 5 การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสของ ทาบิท อิบน์ กุรเราะฮ์

แหล่งที่มา: <https://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/p/p747.htm>



รูปที่ 6 การวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดย ทาบิท อิบน์ กุรเราะฮ์

แหล่งที่มา: <https://owlcation.com/stem/Early-Proofs-of-the-Pythagorean-Theorem>

จากรูปที่ 6 จะได้ความสัมพันธ์ว่า $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BM + NC)$ ซึ่งในกรณีที่ $\widehat{BAC}$ เป็นมุมฉาก ก็จะได้เป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั่นเอง

ในความหลากหลายของผู้มาก่อนและผู้มาหลังที่รู้จัก ค้นพบ และใช้งานทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั้น สะท้อนให้เห็นถึงเรื่องราวและความเป็นไปของตัวทฤษฎีบทในหลายแง่มุม เช่น การค้นพบความรู้ใน

หลายถิ่นที่ที่เกิดขึ้นอย่างเป็นอิสระต่อกัน การได้รับแนวคิดหรือแรงบันดาลใจจากการติดต่อสื่อสาร การสร้างองค์ความรู้ไว้เพื่อรองรับการใช้งาน การใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นพื้นฐานความรู้สำหรับการเรียนรู้ในขั้นที่สูงขึ้น หรือการขยายความรู้ให้กว้างขวางขึ้น บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่มีความเป็นมายาวนานนี้จึงมีอยู่อย่างมากมายหลายแนวคิด คล้ายเป็นเกมของนักคณิตศาสตร์ในการไล่ล่าหาแนวทางการพิสูจน์ใหม่ ๆ ดังที่ เอลิชา สก็อตต์ ลูมิส (Elisha Scott Loomis : ค.ศ. 1852–1940) ได้นำเสนอไว้ในหนังสือชื่อ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (The Pythagorean Proposition) ซึ่งรวบรวมบทพิสูจน์ที่เกิดขึ้นตั้งแต่ราว 900 ปีก่อนคริสตกาล จนถึง ค.ศ. 1940 ไว้ถึง 370 แบบ [16] ในจำนวนนี้นอกจากจะมีผลงานของนักคณิตศาสตร์ชื่อดังตามอารยธรรมต่าง ๆ แล้ว ก็ยังมีบทพิสูจน์ของเลโอนาร์โด ดา วินชี (Leonardo da Vinci : ค.ศ. 1452–1519) และประธานาธิบดีคนที่ 20 ของสหรัฐอเมริกา เจมส์ เอ. การ์ฟิลด์ (James Abram Garfield : ค.ศ. 1831–1881) ซึ่งตีพิมพ์ไว้เมื่อ ค.ศ. 1876 [13] ก่อนเข้ารับตำแหน่ง จำนวนแนวทางการพิสูจน์ที่มากมายนี้ยังได้รับการบันทึกสถิติโลกไว้ในกินเนสส์ เวิลด์ เรคคอร์ด (Guinness World Records) ใน ค.ศ. 1991 ว่าเป็นทฤษฎีบทที่มีบทพิสูจน์มากที่สุด (Most-Proved Theorem) [20]

4. ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในไทย

ตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้น กำหนดให้ในสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต มาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้ ชั้น ม. 2 มีตัวชี้วัดที่ 5 ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวคือ “เข้าใจและใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง” และมีสาระการเรียนรู้แกนกลางอยู่สองประการคือ 1) ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ 2) การนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ในชีวิตจริง โดยตามหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) [8] ได้กำหนดให้ “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส” เป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์บทเรียนแรกของการเรียนในภาคการศึกษาต้น ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยเริ่มต้นด้วยการนำเสนอทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงพีชคณิต ความเป็นจริงว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้าน

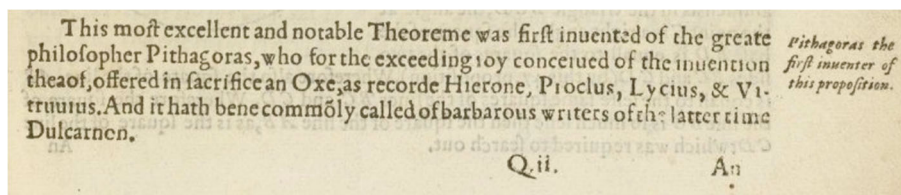
ประกอบมุมฉาก” แล้วจึงตามมาด้วยการนำเสนอทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงเรขาคณิต ความว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก” หลังจากนั้นจึงนำเสนอบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงพีชคณิต ความว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” ทั้งนี้ ได้มีการแทรกการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงเรขาคณิต (เหมือนใน ดี เอลเลเมนต์ส์ เล่ม 6 ทฤษฎีบทที่ 31) กล่าวคือ ขยายจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปสู่รูปเรขาคณิตที่คล้ายกันตามอัตราส่วนของความยาวด้านทั้งสาม ในลักษณะคำถามชวนคิด (ชวนคิด 1.2) โดยตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้สำรวจและค้นพบด้วยตนเองสำหรับในบางกรณี แต่ไม่ได้แสดงบทพิสูจน์ไว้

แน่นอนว่านี่ไม่ใช่ครั้งแรกที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ภาคบังคับ กำหนดให้มีการเรียนเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยเมื่อย้อนกลับไปในตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางฯ ฉบับก่อนปรับปรุง ก็จะพบว่ามีการกำหนดให้เรียนเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไว้เช่นเดียวกัน โดยมีตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องระบุว่า “ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา” แม้จะมีการเปลี่ยนจุดเน้นไปบ้าง เช่น ลดข้อความ “การให้เหตุผล” มาขยายความการแก้ปัญหา เพิ่มเป็นทั้งการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง แต่ก็ยังเห็นได้ถึงการให้ความสำคัญกับเนื้อหาเรื่องนี้

เมื่อพิจารณาในประเด็นของการที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ของไทย กำหนดให้เรียน “เนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส” และเรียกทฤษฎีบทที่เรียนว่า “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส” มาตั้งแต่เมื่อใดนั้น พบว่าตั้งแต่ในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.ศ. 1-2-3) พุทธศักราช 2503 โดยกระทรวงศึกษาธิการ [2] รายวิชาคณิตศาสตร์ เฉพาะสายสามัญ จะต้องเรียนเรขาคณิต (เรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง) โดยในชั้น ม.ศ. 2 เนื้อความตอนหนึ่งกำหนดให้เรียน “ทฤษฎีบทของ Pythagoras” ไว้อย่างชัดเจน และในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. 4-5-6) พุทธศักราช 2503 [1] เฉพาะคณิตศาสตร์ ข (เรียนสัปดาห์ละ 4 ชั่วโมง) พบรายการสอนเรขาคณิตมีเนื้อหาส่วนหนึ่งคือ “ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์ของจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยม และจัตุรัสบนเส้นมัธยฐาน” โดยในส่วนจัตุรัสบนเส้นมัธยฐาน น่าจะหมายถึงทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีจุด D อยู่บน $\overline{BC}$ โดยที่ $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐานแล้ว จะได้ว่า $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ นั่นแปลว่าอย่าง

น้อยในราว พ.ศ. 2503 ก็เริ่มมีการกำหนดให้เรียนเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส และเรียกในชื่อทฤษฎีบทพีทาโกรัสกันแล้ว แล้วก่อนหน้านั้นเราเรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสกันมาตั้งแต่เมื่อไร ?

เป็นที่แน่นอนว่าการเรียนคณิตศาสตร์ของไทยในสมัยโบราณ ตั้งแต่ในช่วงรัตนโกสินทร์ตอนต้น เรื่อยขึ้นไปจนถึงธนบุรี อยุธยา ไม่ได้มีการกำหนดเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เรียนไว้ชัดเจน เป็นแต่การเรียนกับพระหรือผู้รู้อย่างไม่เป็นทางการ ส่วนใหญ่เป็นการสอนสูตรและฝึกให้รู้จักคำนวณ ฝึกให้ทำ โจทย์ตลาด มาตรา เสนา หน้าไม้ เพื่องานทั้งทางโหราศาสตร์ การค้าขาย และการใช้งานในชีวิตประจำวัน การเรียนคณิตศาสตร์ที่กำหนดเนื้อหาที่ชัดเจนเพิ่งจะเริ่มขึ้นในราว พ.ศ. 2438 หรือ ร.ศ. 114 ด้วยอิทธิพลของการศึกษาแบบตะวันตก โดยในประโยค 3 ตั้งแต่ปีที่ 1–4 กำหนดให้เรียน “โคมาตร” ซึ่งหมายถึงวิชา “เรขาคณิต” [3] (ในที่นี้ โค หมายถึง แผ่นดิน และ มาตร หมายถึง การวัด จึงเป็นการถอดความจาก Geometry โดยตรง) จาก A School Geometry ของ ฮอลล์และ สตีเวนส์ (Hall and Stevens) ครอบคลุมเนื้อหาในเล่ม 1–3 และการฝึกทำโจทย์ ซึ่งตำราเรขาคณิตของฮอลล์และสตีเวนส์ชุดนี้เป็นการนำ ดิ เอลเลเมนต์ส์ มาเรียบเรียงใหม่เพื่อให้เหมาะกับการใช้สอนนักเรียน โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสถูกจัดให้อยู่ใน A School Geometry เล่ม 1 โดยเป็นทฤษฎีบทที่ 29 และท้ายการพิสูจน์ทฤษฎีบท ฮอลล์และสตีเวนส์ยังได้เพิ่มเติมว่า “This is known as the Theorem of Pythagoras” ก่อนนำเสนอทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงพีชคณิต ให้เป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการนำไปใช้งาน [15] เหมือนดังเช่นในตำรา ดิ เอลเลเมนต์ส์ ฉบับพิมพ์ภาษาอังกฤษครั้งแรก โดย เซอร์ เฮนรี บิลลิงสเลย์ (Sir Henry Billingsley) เมื่อ ค.ศ. 1570 ก็ได้อธิบายความในเชิงอรรถท้ายทฤษฎีบทที่ 47 ดังรูปที่ 7 นอกจากนี้ตำราเรขาคณิตฉบับภาษาไทยซึ่งเป็นการนำ A School Geometry มาแปลเพื่อช่วยให้การจัดการเรียนการสอนเป็นไปได้อย่างกว้างขวางขึ้นนั้น ก็มีการระบุชื่อเจ้าของทฤษฎีบทว่าเป็นพีทาโกรัสเช่นกัน เช่นในหนังสือ “เรขาคณิต มัธยมปีที่ 5” เรียบเรียงโดย พระสันธิวิทย์พัฒน์ [7]



รูปที่ 7 ข้อความท้ายทฤษฎีบทที่ 47 ใน ดิ เอลเลเมนต์ส์

ฉบับพิมพ์เป็นภาษาอังกฤษครั้งแรกโดย เซอร์ เฮนรี บิลลิงสเลย์

แหล่งที่มา: <https://galileo.ou.edu/exhibits/elements-geometry-1570>

ทั้งนี้ในช่วงเวลาที่กำหนดให้เรียนเรขาคณิต โดยใช้ตำราฉบับสำนวนของฮอลล์และสติเวนส์ หรือฉบับแปลนั้น อาจเป็นเพราะแนวทางการสอนที่ให้ความสำคัญกับการท่องหมายเลขของทฤษฎีบทและเนื้อความ เพื่อใช้ในการอ้างอิงเหตุผลอย่างรัดกุมเป็นสำคัญ จึงทำให้แม้จะรู้จักเนื้อความของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นอย่างดี แต่ก็อาจจะไม่ทราบว่าทฤษฎีบทนี้เรียกอีกชื่อว่าทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังเช่นที่ในหนังสือวิทยากร เล่ม 31 ตอนที่ 5 วันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2473 ที่ หลวงกิตติวิทย์โยธาร (กัศุนวัต) ได้เขียนบทความเรื่อง “ศาสตาศิปะกอร์ส และบทพิสูจน์ที่ 29” มีความตอนหนึ่ง (สะกดตามต้นฉบับ ยกเว้นคำว่า ปะกอร์ส ที่ต้นฉบับสะกดแบบมีทัณฑฆาตเหนือ ป ได้สระออี) ระบุว่า

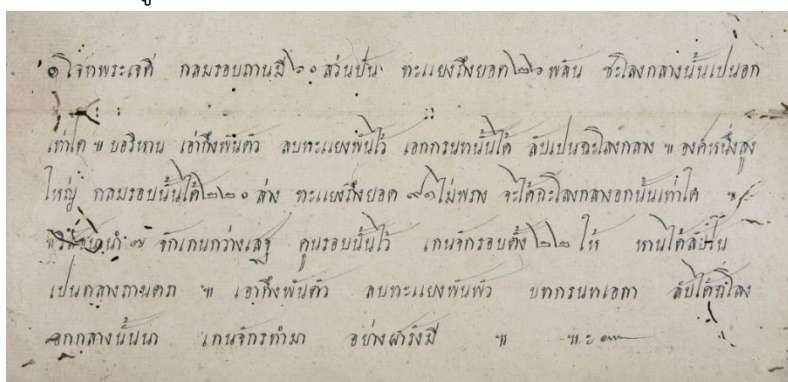
“ปะกอร์ส ได้เกิดในสมัยพระพุทธเจ้า และได้ค้นคว้า “ความจริง” เนื้อที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นทแยงมุมเท่ากับเนื้อที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปบนด้านประกอบมุมฉาก รวมกัน ซึ่งเราทั้งหลายได้พากันจำขึ้นใจว่าเป็น “Theorem 29” ทั้งนักเรียนบางคนหารู้จักชื่อท่านศาสตาศิปะกอร์สไม่ นี่ก็เพราะเราลืมตาขึ้นมาสู่โลกก็พบ ฮอลล์ และสติเวนส์ (Hall และ Stevens) เป็นเจ้าตำราของ ยีออเมตรีอยู่แล้ว และได้โอกาสสืบต่อไปถึงโลกอันกว้างขวางในตำราอื่น ๆ อีกเลย เด็กบางคนข้าบอกเสียด้วยว่า ฮอลล์ และสติเวนส์ เป็นผู้แต่งบทพิสูจน์ที่ 29 และ ยูคลิด (Euclid) นั้น คือใครก็ไม่รู้” [9]

หลังจากนั้นท่านก็ได้เสนอให้มีการสอนทฤษฎีบทนี้ด้วยวิธี “Heuristic” โดยใช้การตัดกระดาษ จัดกิจกรรมให้นักเรียนเกิด “สังหรใจ ถามตนเอง ลงความเห็นเอง และตั้งบทเอง ซึ่งครูผู้สอนเป็นแต่เพียงผู้แนะทุกขณะ” เพื่อให้นักเรียนสนุก และ “รักเรียนยีออเมตรีมากขึ้น” [9] แนวทางการสอนและจุดประสงค์ในการสอนเช่นนี้ แม้จะเป็นข้อเสนอเมื่อราวเกือบหนึ่งร้อยปีที่แล้ว แต่ก็ยังมีความร่วมสมัยมากเลยทีเดียว

ในสมัยโบราณคำที่เป็นภาษาต่างประเทศซึ่งแปลเอาความไม่ได้ ก็มักจะถูกคนไทยแปลงเสียงลากเข้าความเพื่อให้พอแปลความได้ การนี้คำว่า Pythagoras หากจะต้องถูกลากเสียงมาก็ น่าจะไม่ไกลห่างไปจากคำว่า “ปิตากะรัต” มากเท่าใดนัก แต่ไม่ว่าจะเรียกด้วยชื่อเรื่องเสียงใด หลักฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการศึกษายุคเก่าของไทยนั้น ก็แทบไม่พบร่องรอยโดยอยู่เลย ในสมัยอยุธยาที่มีการนำความรู้คณิตศาสตร์เข้ามาในราชอาณาจักร ผ่านทางคณะบาทหลวงราชทูต พ่อค้า และทหาร โดยเฉพาะในรัชสมัยของสมเด็จพระนารายณ์มหาราช (ครองราชย์ พ.ศ. 2199–2231) จนกล่าวได้ว่าเป็นยุคที่วิทยาการความรู้ทางคณิตศาสตร์เฟื่องฟูมากที่สุด และตำรา ดิ เอลเลเมนต์ส์ ก็น่าจะถูกนำเข้ามาตั้งแต่ในสมัยนั้น นอกจากนี้ในอีกทางหนึ่งไทยก็

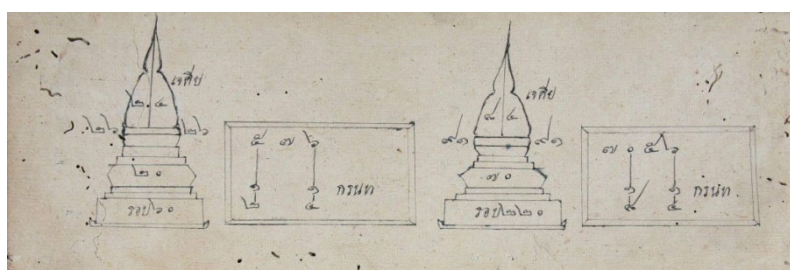
รับความรู้คณิตศาสตร์โบราณมาจากอินเดีย ด้วยความใกล้ชิดทางวัฒนธรรมผ่านศาสนาและการค้า [5] สืบต่อมาจนถึงต้นรัตนโกสินทร์ การบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับความรู้และตัวอย่างการใช้คณิตศาสตร์จะอยู่ในรูปของสมุดไทย

ในที่นี้จะนำเสนอส่วนหนึ่งของโจทย์ของคัมภีร์ ที่สำนักหอสมุดแห่งชาติ กรมศิลปากร ได้บันทึกที่หน้าปกไว้ว่า “แบบเรียนเลขโคศัพท หรือแม่นยำพรรณและฉวางคำฉันท์” พระยาปฏิญาณพิเศษ (อาเล็กแซนเดอร์ อดายกุล) มอบให้ พ.ศ. 2472 ซึ่งเป็นสมุดไทยขาว สันนิษฐานว่าเขียนขึ้นก่อนสมัยรัชกาลที่ 3 ซึ่งจะขอเรียกว่า “โจทย์พระเจดีย์” มีจำนวน 2 ข้อ บันทึกเนื้อหาเป็นภาพยี่สุรางคนางค์ 28 มีข้อความ ดังรูปที่ 8 และมีภาพเจดีย์พร้อมตัวเลขและการทดเพื่อถอดครณท์กำกับ ดังรูปที่ 9



รูปที่ 8 โจทย์พระเจดีย์สองข้อ ในสมุดไทย

แหล่งที่มา: สำเนาภาพถ่ายไมโครฟิล์ม สำนักหอสมุดแห่งชาติ



รูปที่ 9 ภาพพระเจดีย์ ประกอบการคำนวณ

แหล่งที่มา: สำเนาภาพถ่ายไมโครฟิล์ม สำนักหอสมุดแห่งชาติ

จากรูปที่ 8 บรรทัดที่ 2 มีข้อความหายไป 3 บรรทัด สันนิษฐานว่าเกิดจากการคัดลอกผิดพลาด โดยเมื่อได้สอบถามกับคัมภีร์เลขปรกณ์ ตำราคณิตศาสตร์โบราณของไทย ฉบับสมุดไทยคำอีกสาม

ฉบับ จะได้เนื้อความตามภาพยู่สร้างคนางค์ 28 (สะกตตามต้นฉบับตามรูปที่ 8 เป็นหลัก) โจทย์และเฉลยของทั้งสองข้อ เป็นดังนี้

สะกตแบบต้นฉบับ		สะกตแบบปัจจุบัน	
โจทยพระเจดีย์		โจทย์พระเจดีย์	
กลมรอบถานมี	๖๐ ส่วนป็น	กลมรอบฐานมี	๖๐ ส่วนป็น
ทะแยงถึงยอด	๒๖ พัลัน	ทะแยงถึงยอด	๒๖ พัลัน
ชะโลงกลางนั้น	เปนอกเท่าใด	โฉลงกลางนั้น	เป็นอกเท่าใด
บอริหาน (ตั้งรอบ)		บริหาร (ตั้งรอบ)	
๓ ทารลัษชอบ	เปนกลางถานใน)	๓ ทารลัษชอบ	เป็นกลางฐานใน)
เอากิ่งพันตัว	ลบทะแยงพันไว้	เอากิ่งพันตัว	ลบทะแยงพันไว้
เอกรณทนั้นได้	ลับเปนฉะโลงกลาง	เอกรณทนั้นได้	ลัษเป็นโฉลงกลาง
องค์หนึ่งสูงใหญ่		องค์หนึ่งสูงใหญ่	
กลมรอบนั้นได้	๒๒๐ ล่าง	กลมรอบนั้นได้	๒๒๐ ล่าง
ทะแยงถึงยอด	๙๑ ไม่พราง	ทะแยงถึงยอด	๙๑ ไม่พราง
จะได้ฉะโลงกลาง	อกนั้นเท่าใด	จะได้โฉลงกลาง	อกนั้นเท่าใด
วิสัยขนานำ ๗		วิสัยขนานำ ๗	
จักเกณกว้างเสฐ	คูนรอบนั้นไว้	จักรเกณท์กว้างเสร็จ	คูนรอบนั้นไว้
เกณจักรรอบตั้ง	๒๒ ให้	เกณท์จักรรอบตั้ง	๒๒ ให้
หานั้นได้ลับใน	เปนกลางถานตรา	หานั้นได้ลัษใน	เป็นกลางฐานตรา
เอากิ่งพันตัว		เอากิ่งพันตัว	
ลบทะแยงพันพั	บทกรณทเอกา	ลบทะแยงพันพั	บทกรณท์เอกา
ลับได้ฉะโลง	อกกลางนั้นนา	ลัษได้โฉลง	อกกลางนั้นนา
เกณจักรทำมา	อย่างฝรังมี	เกณท์จักรทำมา	อย่างฝรังมี

สมภพ วัชฤทธิ์ ได้อธิบายความหมายของศัพท์บางคำในภาพยู่ไว้ว่า

ชะโลง/ฉะโลง/ฉโลง คือ ส่วนสูงตรงของกรวย

เอากิ่ง หรือ เอากิ่ง	คือ	เอาค้างหนึ่ง
พัน	คือ	คุณตัวเองหรือยกกำลังสอง
กรณท	คือ	ถอดกรณท
เกนจักร	คือ	การคำนวณความยาวเกี่ยวกับวงกลม

พร้อมถ่ายถอดโจทย์และเฉลยของทั้งสองข้อ สรุปความได้ดังนี้ (ความในวงเล็บมาจากภาพเพื่อใช้เทียบเคียง)

โจทย์พระเจดีย์ (โจทย์พระเจดีย์) ข้อที่ 1

โจทย์ : เจดีย์ทรงกรวย มีเส้นรอบวงที่ฐานยาว 60 หน่วย (กลมรอบฐานมี / ๖๐ ส่วนปัน) สูงเอียง 26 หน่วย (ทะแยงถึงยอด / ๒๖ พัน) จะมีความสูงเท่าใด (ชะโลงกลางนั้น / เปนอกเท่าใด)

เฉลย (บอริทาน) : นำความยาวเส้นรอบวงที่ฐาน 60 หน่วย มาหารด้วย 3 (ตั้งรอบ / ๓ ทารลับขอบ) จะได้เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม (เปนกลางถานใน) ยาว 20 หน่วย จากนั้นนำค้างหนึ่ง (เอากิ่ง) คือ 10 ไปยกกำลังสอง (พันตัว) แล้วลบออกจากสูงเอียงที่ยกกำลังสอง (ลบทะแยงพันไว้) นำผลลัพธ์ที่ได้ไปถอดกรณทอันดับที่สอง จะได้ (เอกรณทนั้นได้) $\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = 24$ หน่วย เป็นผลลัพธ์คือความสูงของพระเจดีย์ (ลับเปนชะโลงกลาง)

โจทย์พระเจดีย์ ข้อที่ 2

โจทย์ : เจดีย์ทรงกรวยขนาดใหญ่องค์หนึ่ง (องค์หนึ่งสูงใหญ่) มีเส้นรอบวงที่ฐานยาว 220 หน่วย (กลมรอบนั้นได้ ๒๒๐ ล่าง) สูงเอียง 91 หน่วย (ทะแยงถึงยอด / ๙๑ ไม่พราง) จะมีความสูงเท่าใด (จะได้ชะโลงกลาง / ออกนั้นเท่าใด)

เฉลย (วิสันา) : นำ 7 ไปคูณความยาวเส้นรอบวงที่ฐาน 220 หน่วย (นำ ๗ / จักเกนกว้างเสฐ / คูณรอบนั้นไว้) แล้วนำมาหารด้วย 22 จะได้ (เกนจักรรอบตั้ง / ๒๒ ให้ / หานได้ลับใน) เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม (เปนกลางถานตรา) ยาว 70 หน่วย จากนั้นนำไปแบ่งครึ่งได้ 35 แล้ว ยกกำลังสอง (เอากิ่งพันตัว) แล้วลบออกจากสูงเอียงที่ยกกำลังสอง (ลบทะแยงพันไว้) นำผลลัพธ์ที่ได้ไปถอดกรณทอันดับที่สอง (บทกรณทเอกา) จะได้ $\sqrt{91^2 - 35^2} = \sqrt{8281 - 1225} = \sqrt{7056} = 84$ หน่วย เป็นผลลัพธ์คือความสูงของพระเจดีย์ (ลับได้ชะโลง / ออกกลางนั้นนา) วิธีคำนวณเกี่ยวกับวงกลมนั้น เป็นวิธีการแบบฝรั่ง (เกนจักรท่ามา / อย่างฝรั่งมี)

จากโจทย์และเฉลยทั้งสองข้อนี้ มีข้อสังเกตสำคัญสามประการ คือ

1) การกำหนดค่า π เพื่อใช้ในการคำนวณของทั้งสองข้อนั้นแตกต่างกัน ข้อที่ 1 ใช้ $\pi = 3$ แต่ข้อที่ 2 ใช้ $\pi = \frac{22}{7}$ โดยมีข้อความระบุว่า “เกนจักรท่ามา อย่างฝรั่งมี” คือ การคำนวณความยาวเกี่ยวกับวงกลมแบบนี้ เป็นการทำตามอย่างฝรั่ง โดยการใช้ $\pi = \frac{22}{7}$ นี้เป็นความรู้ใหม่ที่รับเข้ามาจากตะวันตก ต่างจากการคำนวณเกี่ยวกับวงกลม ซึ่งพบตามเอกสารโบราณเดิมเช่นในไตรภูมิพระร่วงหรือเตภูมิกถา ซึ่งใช้ค่า $\pi = 3$

2) โจทย์และเฉลยทั้งสองข้อมีการใช้ความรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส แต่เป็นการเขียนให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่กำหนดเป็นขั้น ๆ ไม่ได้อธิบายหรือระบุในเชิงหลักการ ดังเห็นได้จาก “เอากิ่งพันตัว ลบทะแยงพันไว้ เอกกรณนั้นได้ ลับเป็นฉะโลงกลาง” และ “เอากิ่งพันตัว ลบทะแยงพันพัว บทกรณทเอกา ลับได้ฉะโลง ออกกลางนั้นนา” แต่จากร่องรอยนี้ ก็ทำให้พอทราบได้ว่าในช่วงต้นกรุงรัตนโกสินทร์ก็มีการใช้และถ่ายทอดความรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกันแล้ว

3) ลักษณะโจทย์ทั้งสองข้อนี้ มีความใกล้ชิดกับวิถีชีวิตของคนในสมัยนั้นมาก สำหรับครูที่กำลังสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสอยู่ ก็อาจนำตัวอย่างทั้งสองข้อนี้มาใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนบรรยากาศให้กับผู้เรียน โดยอาจสอดแทรกเกร็ดในเชิงภาษา ทั้งฉันทลักษณ์ของคำประพันธ์ การคาดเดาความหมายของคำศัพท์ การเทียบเคียงคำศัพท์คณิตศาสตร์ในสมัยโบราณกับปัจจุบัน ทั้งนี้ ยังมีโจทย์โบราณในสมุดไทยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสอีกหลายข้อ โดยจะได้นำเสนอในโอกาสต่อไป

5. บทสรุป

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นหนึ่งในทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงเป็นที่รู้จักของทั้งนักเรียนไทยและคนทั่วไปทั่วโลก มีประวัติความเป็นมาย้อนไปไกลได้มากกว่ายุคของพีทาโกรัสเอง และตามอารยธรรมต่าง ๆ ก็มีการค้นพบ ถ่ายทอด ขยายความ และสืบทอดความรู้นี้ ในประเทศไทยมีการกำหนดให้เรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสในชื่อทฤษฎีบทพีทาโกรัส อย่างน้อยก็ตั้งแต่หลักสูตร พ.ศ. 2503 เรื่อยมา โดยก่อนหน้านั้นราวครึ่งแรกของพุทธศตวรรษที่ 24 ช่วงที่ไทยเริ่มกำหนดหลักสูตรคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการในระบบการศึกษา ทฤษฎีบทพีทาโกรัส น่าจะอยู่ในฐานะของทฤษฎีบทที่ 29 ใน A School Geometry ของ ฮอลล์และสตีเวนส์ โดยดูเหมือนผู้เรียนทั่วไปจะไม่ค่อยทราบกันเท่าใดนักว่า “พีทาโกรัส” เป็นชื่อของทฤษฎีบทนี้ แม้จะไม่มีหลักฐานแน่ชัดมากนัก แต่จากข้อมูลโจทย์คณิตศาสตร์ในสมุดไทย ที่มีอายุในช่วงรัชกาลที่ 3 ขึ้นไป (ก่อน พ.ศ. 2400) จะเห็นได้ว่า ไทยมี

การนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้งานแล้ว หากแต่ยังเป็นเพียงเฉพาะการให้แนวทางปฏิบัติตามขั้นตอน เพื่อให้ผู้เรียนลอกเลียนการดำเนินการตามแบบแผน โดยไม่ได้แสดงเนื้อหาตัวทฤษฎีบทไว้หรืออธิบายบทพิสูจน์ไว้

เอกสารอ้างอิง

- [1] กระทรวงศึกษาธิการ. (2505). *หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. 4-5-6) พุทธศักราช 2503*. นครหลวงกรุงเทพมหานครบุรี: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
Ministry of Education. (1962). *Syllabus for the Upper Secondary Education B.E. 2503*. Bangkok Thonburi Capital: Kurusapha Press.
- [2] กระทรวงศึกษาธิการ. (2515). *หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.ศ. 1-2-3) พุทธศักราช 2503*. นครหลวงกรุงเทพมหานครบุรี: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
Ministry of Education. (1972). *Syllabus for the Lower Secondary Education B.E. 2503*. Bangkok Thonburi Capital: Kurusapha Press.
- [3] เขมรุตัย บุญวรรณ. (2003). *การวิเคราะห์การใช้ภาษาและกลวิธีการเขียนในหนังสือราชกิจจานุเบกษา สมัยพระบาทสมเด็จพระจุลจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว* (Doctoral dissertation, มหาวิทยาลัยศิลปากร).
Khemruthai Boonwan. (2003). *The Analysis of Language Use and Writing Style in King Rama V's Royal Gazette* (Doctoral dissertation, Silpakorn University).
- [4] คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2539). *อารยธรรม สมัยโบราณ – สมัยกลาง*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
Faculty of Art Chulalongkorn University. (1996). *Civilization: Prehistoric – Middle Age*. Bangkok: Chulalongkorn University Publisher.
- [5] จริยา นวลนิรันดร์. (2565). *ยิ่งอ่านยิ่งงง! โจทย์เลขของคนไทยสมัยโบราณยาวนานนับสิบบรรทัด ลองแก้กันดู*. สืบค้น 3 สิงหาคม 2565, จาก : https://www.silpa-mag.com/history/article_19989.

- Chariya Nuanniran. (2022). *The more we read, the confusing we are. Ten line long of Thai math problem from the past, Let us try to solved it*. Retrieved 3 August 2022, from https://www.silpa-mag.com/history/article_19989.
- [6] จินดิษฐ์ ละออปักชิน และรตินันท์ บุญเคลือบ. (2558). คำคม คณิตศาสตร์ พีทาโกรัส : The most favorite theorem. *วารสารคณิตศาสตร์*, 60 (680 – 682), น. 3 – 6.
- Laorpaksin, J. and Boonklurb, R. (2015). Mathematician Quote Pythagoras : The most favorite theorem. *Mathematical Journal*, 60(680 – 682), 3 – 6.
- [7] พระสันธิวิทยาพัฒน์. (2481). *เรขาคณิต มัธยมปีที่ 5*. พระนคร: โรงพิมพ์ศรีสุเทพ.
- Phra Santhiwithayapat. (1938). *Geometry Mattayom 5th*. Phranakon: Srisuthep Press.
- [8] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 (พิมพ์ครั้งที่ 2)*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology, Ministry of Education. (2019). *Basic Mathematics for 8th Grade, No. 1 (2nd ed.)*. Bangkok: Chulalongkorn University Publisher.
- [9] หลวงกীরติวิทย์พาร (กี๋ ศุนวัต). (2473). ศาสดาปีทะกอร์ส และบทพิสูจน์ที่ 29. *วิทยาจารย์*, เล่ม 31 ตอนที่ 5 วันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2473. สามัคยาจารย์สมาคม ในพระราชูปถัมภ์. บางขุนพรหม กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์อักษรนิติ. สืบค้น 3 สิงหาคม 2565, จาก <http://eresource.car.chula.ac.th/chula-ebooks/detail.php>
- Loung Keeratiwittayoran (Kee Soonwat). (1930). The Prophet Pythagoras and the 29th proof. *Widhajarn*, Book 31 Section 5 1 March 1930. Samakhayajarn Association Under the Patronage of His Majesty the King. Bangkhunphrom Bangkok: Aksornnit Press. Retrieved 3 August 2022, from <http://eresource.car.chula.ac.th/chula-ebooks/detail.php>
- [10] Anglin, W. S. and Lambek, J. (1998). *The heritage of Thales*. Springer Science & Business Media.

- [11] Bruce, R. (2009). *Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him*. Retrieved 19 July 2022, from <https://link.springer.com/article/10.1057/jt.2009.16>
- [12] Byrne, O. (1847). *The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. William Pickering.
- [13] Dunham, W. (1994). *The mathematical universe. An alphabetical journey through the great proofs, problems, and personalities*. New York: Wiley.
- [14] Gabrielle, B. (2022). *It Didn't Belong to Pythagoras*. Retrieved 19 July 2022, from https://mathsciencehistory.com/2022/03/08/it-didnt-belong-to-pythagoras/#_ftnref1
- [15] Hall, H. S. and Stevens, F. H. (1949). *A school geometry parts I-V*. London: Macmillan and Company, limited.
- [16] Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics Inc.
- [17] Maor, E. (2019). *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history*. Princeton University Press.
- [18] Math IPST. (2020, May 19). *The Great Mathematicians: Pythagoras of Samos [Video file]*. Retrieved 19 July 2022, from <https://www.youtube.com/watch?v=S5wAtiFOwrE>
- [19] Moledina, A. (2013). *Should the Pythagorean Theorem Actually be Called the 'Pythagorean' Theorem* (Doctoral dissertation).
- [20] Mcwhirter, N. (1990). *Guinness Book of World Records 1991*. Bantam, New York.
- [21] Pickover, C. A. (2009). *The Math Book: 250 Milestones in the History of Mathematics*. Barnes & Noble.

- [22] Posamentier, A. S. and Lehmann, I. (2012). *The secrets of triangles: a mathematical journey*. Prometheus Books.
- [23] Sasser, J. E. (2000). *The Islamic Connection*. Conshohocken, PA: Infinity Publishing
- [24] Stewart, I. (2017). *Significant figures: The lives and work of great mathematicians*. Basic Books.