



บทความวิจัย

การไม่มีของผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $$a^x + b^y = z^2$$

อภิรัฐ ศิระวรกุล และ สุธน ตาดี*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี

*Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

รับบทความ: 2 สิงหาคม 2565 แก้ไขบทความ: 26 สิงหาคม 2565 ยอมรับตีพิมพ์: 29 สิงหาคม 2565

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้แสดงว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก และมีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv 1 \pmod{p}$ และ $b \equiv 1 \pmod{p}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x + b^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Research Article

Non-Existence of Non-Negative Integer Solutions of the Diophantine Equation

$$a^x + b^y = z^2$$

Apirat Siraworakun and Sutton Tadee*

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi

**Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th*

Received <2 August 2022>; Revised <26 August 2022>; Accepted <29 August 2022>

Abstract

In this paper, we show that if a and b are positive integers and there exists a prime p with $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ such that $a \equiv 1 \pmod{p}$ and $b \equiv 1 \pmod{p}$, then the Diophantine equation $a^x + b^y = z^2$ has no non-negative integer solution.

Keywords: Diophantine equation, non-negative integer solution

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นอีกสมการหนึ่งที่ได้รับ ความสนใจในการหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เช่น ในปี ค.ศ. 2007 Acu (2007) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (2, 1, 3)\}$ ต่อมา Chotchaisthit (2012) ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็น จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป $(x, p, y, z) \in \{(2, 3, 2, 5)\} \cup \{(r, 2^{r+1} + 1, 1, 2^r + 1) | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(r, 2, 2r + 3, 3 \cdot 2^r) | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ และ Asthana and Singh (2017) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียง 4 ผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2), (1, 1, 4), (3, 2, 14), (5, 1, 16)\}$ และในปี ค.ศ. 2021 Paisal and Chayapham (2021) ได้แสดงว่า $(x, y, z) = (1, 1, 10)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียง ผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x + 83^y = z^2$ และ $29^x + 71^y = z^2$

นอกจากนี้ยังมีการค้นพบว่าบางสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เช่น ในปี ค.ศ. 2011 Suvarnamani *et al.* (2011) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + 7^y = z^2$ และ $4^x + 11^y = z^2$ ไม่มีผล เฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมา Sroysang (2014a; 2014b) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 19^y = z^2$ $7^x + 91^y = z^2$ และ $7^x + 31^y = z^2$ พบว่าทั้งสามสมการไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ หลังจากนั้น Kumar *et al.* (2020) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $601^x + 619^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปีเดียวกัน Aggarwal and Sharma (2020) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $379^x + 397^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และเมื่อไม่นานมานี้ Kumar and Aggarwal (2021) ได้ค้นพบว่า $439^x + 457^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เช่นกัน

ด้วยเหตุนี้ จึงทำให้เกิดความน่าสนใจในการหาเงื่อนไขของจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้ สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x + b^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x + b^y = z^2$ ไม่มีผล เฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

วิธีดำเนินการวิจัย

ก่อนที่จะพิจารณาหาเงื่อนไขของจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x + b^y = z^2$ ไม่มีผล เฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบนั้น จะขอทบทวนความหมายของส่วนตกค้างกำลังสอง (Quadratic Residue) และทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้อง ซึ่งมีความสำคัญในการนำไปใช้พิจารณาเงื่อนไขดังกล่าว

บทนิยาม 1 (Redmond, 1996) ให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $(a, m) = 1$ ถ้ามีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $x^2 \equiv a \pmod{m}$ จะเรียก a ว่า ส่วนตกค้างกำลังสอง (Quadratic Residue) ของ m และถ้าไม่มีจำนวนเต็ม x ดังกล่าว จะเรียก a ว่า ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง (Quadratic Non-Residue) ของ m

ทฤษฎีบท 2 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

1. ถ้า $p \equiv 1, 7 \pmod{8}$ แล้ว 2 เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง ของ p
2. ถ้า $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ แล้ว 2 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง ของ p

ทฤษฎีบท 3 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ถ้ามีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv 1 \pmod{p}$ และ $b \equiv 1 \pmod{p}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$a^x + b^y = z^2 \quad (1)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) เนื่องจาก $a \equiv 1 \pmod{p}$ และ $b \equiv 1 \pmod{p}$ ดังนั้น $a^x \equiv 1 \pmod{p}$ และ $b^y \equiv 1 \pmod{p}$ เพราะฉะนั้น $a^x + b^y \equiv 2 \pmod{p}$ และจาก

สมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ดังนั้น 2 เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง ของ p ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ และทฤษฎีบท 2 เพราะฉะนั้น สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 3 ทำให้สามารถตรวจสอบได้ง่ายว่า สมการไดโอแฟนไทน์ต่อไปนี้ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $4^x + 7^y = z^2$ (Suvanamani *et al.*, 2011), $7^x + 19^y = z^2$, $7^x + 91^y = z^2$ (Sroysang, 2014a), $7^x + 31^y = z^2$ (Sroysang, 2014b), $601^x + 619^y = z^2$ (Kumar *et al.*, 2020), $379^x + 397^y = z^2$ (Aggarwal and Sharma, 2020) และ $439^x + 457^y = z^2$ (Kumar and Aggarwal, 2021)

บทแทรก 4 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ถ้ามีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv 1 \pmod{p}$ และ $b \equiv 1 \pmod{p}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$a^x + b^y = z^{2c} \quad (2)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่า x_1, y_1 และ z_1 เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (2) จะเห็นได้ชัดว่า $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ซึ่งเป็นไปไม่ได้จากทฤษฎีบท 3 เพราะฉะนั้น สมการ (2) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

จากทฤษฎีบท 3 และบทแทรก 4 ทำให้ได้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับที่ทำให้สมการ (1) และ (2) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและสามารถนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่มีผู้วิจัยได้พิสูจน์ไว้ก่อนหน้านี้ได้ ดังนี้

บทแทรก 5 (Gupta and Kumar, 2020) ให้ a และ c เป็นจำนวนเต็มบวก และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนที่อยู่ในรูป $5k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$a^x + (a + 5r)^y = z^{2c} \quad (3)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $5k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า $a \equiv 1 \pmod{5}$ และจาก $5r \equiv 0 \pmod{5}$ ดังนั้น $a + 5r \equiv 1 \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น จากบทแทรก 4 จะได้ว่า สมการ (3) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

บทแทรก 6 (Aggarwal and Kumar, 2021a) ให้ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$19^{2x} + (6r + 1)^y = z^2 \quad (4)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เนื่องจาก $6r \equiv 0 \pmod{3}$ ดังนั้น $6r + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ และจาก $19^2 \equiv 1 \pmod{3}$ เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า สมการ (4) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

บทแทรก 7 (Aggarwal and Kumar, 2021b) ให้ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$13^{2x} + (6^{r+1} + 1)^y = z^2 \quad (5)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เนื่องจาก $6 \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้ว่า $6^{r+1} \equiv 6 \cdot 6^r \equiv 0 \pmod{3}$ ดังนั้น $6^{r+1} + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ และจาก $13^2 \equiv 1 \pmod{3}$ เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า สมการ (5) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

บทแทรก 8 (Aggarwal and Kumar, 2021c) ให้ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$13^{2x} + (6r + 1)^y = z^2 \quad (6)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เนื่องจาก $6r \equiv 0 \pmod{3}$ ดังนั้น $6r + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ และจาก $13^2 \equiv 1 \pmod{3}$ เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า สมการ (6) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

บทแทรก 9 (Aggarwal and Kumar, 2021d) ให้ m และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$(2^{2m+1} - 1) + (6r + 1)^y = z^2 \quad (7)$$

ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เนื่องจาก $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ดังนั้น $2^{2m} \equiv 1 \pmod{3}$ เพราะฉะนั้น $2^{2m+1} = 2 \cdot 2^{2m} \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $2^{2m+1} - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ และจาก $6r \equiv 0 \pmod{3}$ ดังนั้น $6r + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า สมการ (7) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ■

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ในงานวิจัยนี้ได้แสดงว่า ถ้ามีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv 1 \pmod{p}$ และ $b \equiv 1 \pmod{p}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x + b^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นการนำเสนอเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b เพื่อรับรองว่าสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และเป็นขยายผลงานวิจัยที่ได้มีการศึกษาก่อนหน้านี้อีกด้วย แต่อย่างไรก็ตามสิ่งที่ได้ยังไม่ครอบคลุมทุกกรณี เช่น ในกรณี $p \equiv 1, 7 \pmod{8}$ จำนวนเต็มบวก a และ b ควรมีเงื่อนไขอย่างไรจึงจะทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นจึงยังคงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- Acu, D. (2007). On a Diophantine equation. **General Mathematics**, 15(4), 145-148.
- Aggarwal, S. and Kumar, S. (2021a). On the exponential Diophantine equation $(19^{2m}) + (6r + 1)^n = p^2$. **International Journal of Research and Innovation in Applied Science**, 6(3), 128 – 130.
- Aggarwal, S. and Kumar, S. (2021b). On the exponential Diophantine equation $(13^{2m}) + (6^{r+1} + 1)^n = p^2$. **International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science**, 10(3), 1 – 3.
- Aggarwal, S. and Kumar, S. (2021c). On the exponential Diophantine equation $(13^{2m}) + (6r + 1)^n = z^2$. **Journal of Scientific Research**, 13(3), 845-849. doi: 10.3329/jsr.v13i3.52611
- Aggarwal, S. and Kumar, S. (2021d). On the exponential Diophantine equation $(2^{2m+1} - 1) + (6r + 1)^n = z^2$. **International Journal of Research and Innovation in Applied Science**, 6(4), 49 – 51.
- Aggarwal, S. and Sharma, N. (2020). On the non-linear Diophantine equation $379^x + 397^y = z^2$. **Open Journal of Mathematical Sciences**, 4(1), 397 – 399. doi: 10.30538/oms2020.0129
- Asthana, S. and Singh, M.M. (2017). On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, 114(2), 301 – 304. doi: 10.12732/ijpam.v114i2.12
- Burton, D. M. (2007). **Elementary Number Theory**, 6th ed., McGraw-Hill, Singapore.
- Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. **American Journal of Mathematics and Sciences**, 1(1), 191 – 193.
- Gupta, D. and Kumar, S. (2020). On the exponential Diophantine equation $a^u + (a + 5b)^v = c^{2w}$. **International Journal of Interdisciplinary Global Studies**, 14(4), 233 – 236.
- Kumar, S. and Aggarwal, S. (2021). On the exponential Diophantine equation $439^p + 457^q = r^2$. **Journal of Emerging Technologies and Innovative Research**, 8(3), 2357 – 2361.
- Kumar, A., Chaudhary, L. and Aggarwal, S. (2020). On the exponential Diophantine equation $601^p + 619^q = r^2$. **International Journal of Interdisciplinary Global Studies**, 14(4), 29 – 30.
- Paisal, K. and Chayapham, P. (2021). On exponential Diophantine equation $17^x + 83^y = z^2$ and $29^x + 71^y = z^2$. **Journal of Physics**, 2070, 1 – 3. doi: 10.1088/1742-6596/2070/1/012015

Redmond, D. (1996). **Number theory: an introduction**, Marcel Dekker, Inc., New York.

Sroysang, B. (2014a). On two Diophantine equations $7^x + 19^y = z^2$ and $7^x + 91^y = z^2$. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, 92(1), 113 – 116. doi: 10.12732/ijpam.v92i1.10

Sroysang, B. (2014b). On the Diophantine equation $7^x + 31^y = z^2$. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, 92(1), 109 – 112. doi: 10.12732/ijpam.v92i1.9

Suvarnamani, A., Singta, A. and Chotchaisthit, S. (2011). On two Diophantine equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. **Science and Technology RMUTT Journal**, 1(1), 25 - 28.