P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 31 ฉบับที่ 1 (มกราคม-กุมภาพันธ์ 2566) หน้า [14-26]

นอร์มของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

On the Norms of Geometric and Symmetric Geometric Circulant Matrices with the Exponential Function

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์*, เจนจิรา จันทร์แก้ว, ปณิธิ วิทย์ชัยวุฒิวงศ์, นัฎฐ์นรี แซ่ด่าน
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Archara Pacheenburawana*, Jenjira Jankaew, Paniti Witchaivuttiwong, Natnaree Saedan
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 13 December 2022; Received in revised 7 February 2023; Accepted 22 February 2023

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล พร้อมทั้งหา 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล นอกจากนี้ ได้ให้ตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลขซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น

คำสำคัญ: ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล; เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต; เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร; เมทริกซ์นอร์ม

Abstract

In this research, we give the upper and lower bounds for the spectral norm of geometric and symmetric geometric circulant matrices with the exponential function, and we obtain 1-norm and ∞-norm for them. Furthermore, some numerical examples for demonstrating the validity of the hypotheses of our results are given.

Keywords: Exponential function; Geometric circulant matrix; Symmetric geometric circulant matrix; Matrix norm

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** archara@mathstat.sci.tu.ac.th

doi:

1. บทนำ

ที่ผ่านมามีผู้วิจัยหลายท่าน ได้ศึกษาเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนต่างๆ ดังเช่น ในปี ค.ศ. 2016 Kızılates และ Tuglu ได้ศึกษาขอบเขตของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต [5] ในปี ค.ศ. 2018 Kızılates และ Tuglu ได้ศึกษาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไตรโบนักชี [6] ในปี ค.ศ. 2019 Baijuan ได้ศึกษานอร์มของเมทริกซ์อาร์-ฮังเคิล และเมทริกซ์อาร์-โทพลิทซ์ [1] และได้ศึกษานอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์บางเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ [3] และในปี ค.ศ. 2021 Baijuan ได้ศึกษาเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ RFMLR กับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันตรีโกณมิติ [2]

ในปัจจุบัน ยังไม่มีผู้วิจัยท่านใดที่ศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e(x)$ ที่นิยามโดย $e(x)=e^{2\pi ix}$ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ศึกษาหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล พร้อมทั้งหา 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

2. ความรู้พื้นฐาน

ให้ $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน บทนิยามและบทตั้งที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ มีดังนี้

บทนิยาม 2.1 [5] $C_{r^*} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ เรียกว่า **เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต** (Geometric circulant matrix) ถ้า

$$C_{r*} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ r^2c_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r^{n-2}c_2 & r^{n-3}c_3 & r^{n-4}c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ r^{n-1}c_1 & r^{n-2}c_2 & r^{n-3}c_3 & \cdots & rc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

เมื่อ r และ c_i เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับทุก $i = 0,1,2,\dots,n-1$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$C_{r^*} = Circ_{r^*}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_{n-1})$$

บทนิยาม 2.2 [6] $SC_{r^*} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ เรียกว่า **เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร** (Geometric symmetric circulant matrix) ถ้า

$$SC_{r^*} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & rc_0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & rc_0 & r^2c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & rc_0 & \cdots & r^{n-3}c_{n-4} & r^{n-2}c_{n-3} \\ c_{n-1} & rc_0 & r^2c_1 & \cdots & r^{n-2}c_{n-3} & r^{n-1}c_{n-2} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

เมื่อ r และ c_i เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับทุก $i = 0,1,2,\dots,n-1$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$SC_{r^*} = SCirc_{r^*}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_{n-1})$$

บทนิยาม 2.3 [5] ให้ $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ **นอร์มสเปกตรัม** (Spectral norms) ของ A เขียนแทนด้วย $\| A \|_2$ และ **นอร์มแบบยุคลิด** (Euclidean norms) ของ A เขียนแทนด้วย $\| A \|_E$ นิยามโดย

$\| A \|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda_i(A^H A)}$ และ $\| A \|_E = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ ตามลำดับ

เมื่อ $\lambda_i(A^H A)$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A^H A$ และ A^H เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคของ A

อสมการต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างนอร์มแบบยุคลิดและนอร์มสเปกตรัม [4]

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_E \le \| A \|_2 \le \| A \|_E \qquad (1)$$

ซึ่งอสมการนี้จะใช้สำหรับพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของงานวิจัยนี้

บทนิยาม 2.4 [5] ให้ $A=(a_{ij})$ และ $B=(b_{ij})$ เป็นสมาชิกของ $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า **ผลคูณฮาดามาร์ด** (Hadamard product) ของ A และ B คือ เมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ที่สมาชิกของเมทริกซ์เกิดจากการคูณของสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B นั่นคือ

$$A \circ B = (a_{ij} b_{ij})$$

และจะได้อสมการต่อไปนี้ [4]

$$\| A \circ B \|_2 \le r_1(A) c_1(B) \qquad (2)$$

เมื่อ $r_1(A) = \max_{1\le i\le m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ และ $c_1(B) = \max_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|^2}$

บทนิยาม 2.5 ให้ $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า **1-นอร์ม** (1-norm) ของ A เขียนแทนด้วย $\| A \|_1$ นิยามโดย

$$\| A \|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

บทนิยาม 2.6 ให้ $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า ∞-**นอร์ม** (∞-norm) ของ A เขียนแทนด้วย $\| A \|_\infty$ นิยามโดย

$$\| A \|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e(x) = e^{2\pi i x}$ และจากสูตร $e^{\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ จะได้ว่า $|e(x)| = 1$ และสังเกตได้ว่า $e(1) = e(0) = 1$

บทตั้ง 2.7 [2] สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e\left(\frac{k}{n}\right)$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 = n$$

3. ผลการวิจัย

หัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้ให้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล กรณีที่ $|r| > 1$ และ $|r| < 1$ สำหรับกรณีที่ $|r| = 1$ ได้มีผู้วิจัยศึกษาไปแล้ว (ดูได้จาก [1]) นอกจากนี้ ได้ให้ 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ทฤษฎีบท 3.1 เป็นการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $P_{r^*} = Circ_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

(i) ถ้า $|r| > 1$ แล้ว

$$\sqrt{n} \le \|P_{r^*}\|_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}} \cdot \sqrt{n}$$

(ii) ถ้า $|r| < 1$ แล้ว

$$|r|^n \sqrt{\frac{1-|r|^{-2n}}{1-|r|^{-2}}} \le \|P_{r^*}\|_2 \le n$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $P_{r^*} = Circ_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

$$= \begin{pmatrix} e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ re\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ r^2 e\left(\frac{n-2}{n}\right) & re\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-3}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{n-1} e\left(\frac{1}{n}\right) & r^{n-2} e\left(\frac{2}{n}\right) & r^{n-3} e\left(\frac{3}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{0}{n}\right) \end{pmatrix}$$

จากบทนิยามของนอร์มแบบยุคลิด จะได้

$$\|P_{r^*}\|_E^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k |r^{n-k}|^2 \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2$$

(i) สำหรับกรณี $|r| > 1$ จะได้

$$\begin{aligned} \|P_{r^*}\|_E^2 &\ge \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 \end{aligned}$$

และจากบทตั้ง 2.7 จะได้

$$\|P_{r^*}\|_E^2 \ge n \cdot n = n^2$$

ดังนั้น

$$\|P_{r^*}\|_E \ge n \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|P_{r^*}\|_E \ge \sqrt{n}$$

จากอสมการ (1) จะได้

$$\|P_{r^*}\|_2 \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \|P_{r^*}\|_E \ge \sqrt{n}$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของ P_{r^*}

ลำดับต่อไป กำหนดให้ $S, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ นิยามโดย

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r^2 & r & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

และ

$$Q = \begin{pmatrix} e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ e\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ e\left(\frac{n-2}{n}\right) & e\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-3}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{0}{n}\right) \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $S \circ Q = P_{r^*}$ เนื่องด้วย $|r| > 1$ ดังนั้น

$$r_1(S) = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |s_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |s_{nj}|^2} = \sqrt{1 + |r|^2 + |r^2|^2 + \cdots + |r^{n-2}|^2 + |r^{n-1}|^2}$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้ว่า

$$r_1(S) = \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}$$

และจากบทตั้ง 2.7 จะได้

$$c_1(Q) = \max_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |q_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |q_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2} = \sqrt{n}$$

ดังนั้น จากอสมการ (2) จะได้

$$\|P_{r^*}\|_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}} \cdot \sqrt{n}$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของ P_{r^*} ฉะนั้น

$$\sqrt{n} \le \|P_{r^*}\|_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}} \cdot \sqrt{n}$$

(ii) สำหรับกรณี $|r| < 1$ จากบทนิยามของนอร์มแบบยุคลิด จะได้

$$\begin{aligned} \|P_{r^*}\|_E^2 &\ge \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)|r^{n-k}|^2 \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r^{n-k}|^2 \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 \\ &= n|r|^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} |r|^{-2k} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 \end{aligned}$$

สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e(x) = e^{2\pi i x}$ จะได้ว่า $|e(x)| = 1$ ดังนั้น

$$\|P_{r^*}\|_E^2 \ge n|r|^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} |r|^{-2k}$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$\|P_{r^*}\|_E^2 \geq n|r|^{2n}\frac{1-|r|^{-2n}}{1-|r|^{-2}}$$

ดังนั้น

$$\|P_{r^*}\|_E \geq \sqrt{n}|r|^n\sqrt{\frac{1-|r|^{-2n}}{1-|r|^{-2}}} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|P_{r^*}\|_E \geq |r|^n\sqrt{\frac{1-|r|^{-2n}}{1-|r|^{-2}}}$$

จากอสมการ (1) จะได้

$$\|P_{r^*}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|P_{r^*}\|_E \geq |r|^n\sqrt{\frac{1-|r|^{-2n}}{1-|r|^{-2}}}$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของ P_{r^*}

จาก $S \circ Q = P_{r^*}$ เมื่อ S และ Q เป็นเมทริกซ์ที่นิยามข้างต้น จะได้ว่า

$$r_1(S) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|s_{1j}|^2} = \sqrt{\underbrace{|1|^2+|1|^2+|1|^2+\cdots+|1|^2}_{n\text{ พจน์}}} = \sqrt{n}$$

และจากบทตั้ง 2.7 จะได้

$$c_1(Q) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|q_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|q_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2} = \sqrt{n}$$

ดังนั้น จากอสมการ (2) จะได้

$$\|P_{r^*}\|_2 \leq \sqrt{n}\cdot\sqrt{n} = n$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของ P_{r^*} ฉะนั้น

$$|r|^n\sqrt{\frac{1-|r|^{-2n}}{1-|r|^{-2}}} \leq \|P_{r^*}\|_2 \leq n$$

ตัวอย่าง 3.2 ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตขนาด $n\times n$ ที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

Table 1 Upper and lower bounds for the spectral norms of $n\times n$ geometric circulant matrices with the exponential function.

$\|r\|$	$n\times n$	r	Lower bound	$\|P_{r^*}\|_2$	Upper bound
$\|r\|>1$	5×5	$r=3$	2.23607	91.13888	192.10674
		$r=-5i$	2.23607	651.04123	1426.36075
		$r=3+i$	2.23607	111.12052	235.70108
	6×6	$r=3$	2.44949	273.38100	631.33193
		$r=-5i$	2.44949	3255.20822	7812.49998
		$r=3+i$	2.44949	351.36799	816.49617
$\|r\|<1$	5×5	$r=0.3$	0.31449	3.69854	5
		$r=-0.5i$	0.57707	3.49911	5
		$r=0.2+0.3i$	0.02146	3.62378	5
	6×6	$r=0.3$	0.31449	4.34649	6
		$r=-0.5i$	0.57728	4.11576	6
		$r=0.2+0.3i$	0.01203	4.25561	6

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหา 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ $P_{r^*} = Circ_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

(i) ถ้า $|r| > 1$ แล้ว

$$\|P_{r^*}\|_1 = \|P_{r^*}\|_\infty = \frac{|r^n| - 1}{|r| - 1}$$

(ii) ถ้า $|r| \le 1$ แล้ว

$$\|P_{r^*}\|_1 = \|P_{r^*}\|_\infty = n$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $P_{r^*} = Circ_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

$$= \begin{pmatrix} e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ re\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ r^2e\left(\frac{n-2}{n}\right) & re\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-3}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{n-1}e\left(\frac{1}{n}\right) & r^{n-2}e\left(\frac{2}{n}\right) & r^{n-3}e\left(\frac{3}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{0}{n}\right) \end{pmatrix}$$

(i) สำหรับกรณี $|r| > 1$ และจากบทนิยามของ 1-นอร์ม จะได้ว่า

$$\|P_{r^*}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |p_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |p_{i1}| = \left|e\left(\frac{0}{n}\right)\right| + \sum_{k=1}^{n-1} |r^{n-k}| \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e(x) = e^{2\pi ix}$ จะได้ว่า $|e(x)| = 1$ ดังนั้น

$$\|P_{r^*}\|_1 = 1 + |r^n| \sum_{k=1}^{n-1} |r^{-k}| = 1 + |r^n| \left(\sum_{k=0}^{n-1} |r^{-k}| - 1\right)$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$\|P_{r^*}\|_1 = 1 + |r^n| \left(\frac{1 - |r^{-n}|}{1 - |r^{-1}|} - 1\right) = \frac{|r^n| - 1}{|r| - 1}$$

และจากบทนิยามของ ∞-นอร์ม จะได้

$$\|P_{r^*}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |p_{nj}| = \left|e\left(\frac{0}{n}\right)\right| + \sum_{k=1}^{n-1} |r^{n-k}| \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$= 1 + |r^n| \sum_{k=1}^{n-1} |r^{-k}| = 1 + |r^n| \left(\sum_{k=0}^{n-1} |r^{-k}| - 1\right)$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$\|P_{r^*}\|_\infty = 1 + |r^n| \left(\frac{1 - |r^{-n}|}{1 - |r^{-1}|} - 1\right) = \frac{|r^n| - 1}{|r| - 1}$$

(ii) สำหรับกรณี $|r| \le 1$ และจากบทนิยามของ 1-นอร์ม และบทตั้ง 2.7 จะได้

$$\|P_{r^*}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |p_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |p_{in}| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right| = n$$

จากบทนิยามของ ∞-นอร์ม และบทตั้ง 2.7 จะได้

$$\|P_{r^*}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |p_{1j}| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right| = n$$

ตัวอย่าง 3.4 ตารางแสดง 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตขนาด $n\times n$ ใดๆ ที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

Table 2 1-norm and ∞-norm of $n\times n$ geometric circulant matrices with the exponential function

$\lvert r\rvert$	$n\times n$	r	$\lVert P_{r^*}\rVert_1 = \lVert P_{r^*}\rVert_\infty$
$\lvert r\rvert > 1$	5×5	$r=3$	121
		$r=-5i$	781
		$r=3+i$	145.78505
	6×6	$r=3$	364
		$r=-5i$	3906
		$r=3+i$	462.01282
$\lvert r\rvert \le 1$	5×5	$r=0.3$	5
		$r=-0.5i$	5
		$r=0.2+0.3i$	5
	6×6	$r=0.3$	6
		$r=-0.5i$	6
		$r=0.2+0.3i$	6

สำหรับทฤษฎีบท 3.5 เป็นการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนดให้ $SC_{r^*} = SCirc_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

(i) ถ้า $|r| > 1$ แล้ว

$$\sqrt{n} \le \lVert SC_{r^*}\rVert_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}\cdot\sqrt{n}$$

(ii) ถ้า $|r| < 1$ แล้ว

$$|r|\sqrt{\frac{1-|r^{2n}|}{1-|r^2|}} \le \lVert SC_{r^*}\rVert_2 \le n$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $SC_{r^*} = SCirc_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

$$= \begin{pmatrix} e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & \cdots & re\left(\frac{0}{n}\right) \\ e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & e\left(\frac{4}{n}\right) & \cdots & r^2e\left(\frac{1}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e\left(\frac{n-1}{n}\right) & \mathrm{re}\left(\frac{0}{n}\right) & r^2e\left(\frac{1}{n}\right) & \cdots & r^{n-1}e\left(\frac{n-2}{n}\right) \end{pmatrix}$$

จากบทนิยามของนอร์มแบบยุคลิด จะได้

$$\lVert SC_{r^*}\rVert_E^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 + \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)|r^{k+1}|^2\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2$$

(i) สำหรับกรณี $|r| > 1$ จะได้

$$\begin{aligned}\|SC_{r^*}\|_E^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 + \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2\end{aligned}$$

จากบทตั้ง 2.7 จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_E^2 \geq n \cdot n = n^2$$

ดังนั้น

$$\|SC_{r^*}\|_E \geq n \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|SC_{r^*}\|_E \geq \sqrt{n}$$

จากอสมการ (1) จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|SC_{r^*}\|_E \geq \sqrt{n}$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของ SC_{r^*}

ลำดับต่อไป ให้ X และ Y เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ นิยามโดย

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r & r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \end{pmatrix}$$

และ

$$Y = \begin{pmatrix} e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{0}{n}\right) \\ e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & e\left(\frac{4}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{1}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e\left(\frac{n-1}{n}\right) & e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-2}{n}\right) \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $X \circ Y = SC_{r^*}$ เนื่องด้วย $|r| > 1$ ดังนั้น

$$r_1(X) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}|r|^{2k}}$$

จากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$r_1(X) = \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}$$

และจากบทตั้ง 2.7 จะได้

$$c_1(Y) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2} = \sqrt{n}$$

ดังนั้น จากอสมการ (2) จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}} \cdot \sqrt{n}$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของ SC_{r^*} ฉะนั้น

$$\sqrt{n} \le \|SC_{r^*}\|_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}} \cdot \sqrt{n}$$

(ii) สำหรับกรณี $|r| < 1$ จากบทนิยามของนอร์มแบบยุคลิด จะได้

$$\begin{aligned}\|SC_{r^*}\|_E^2 &\ge \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)|r^{k+1}|^2 \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)|r^{k+1}|^2 \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 \\ &= n|r^2| \sum_{k=0}^{n-1}|r^{2k}| \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2\end{aligned}$$

สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e(x) = e^{2\pi i x}$ จะได้ว่า $|e(x)| = 1$ ดังนั้น

$$\|SC_{r^*}\|_E^2 \ge n|r^2| \sum_{k=0}^{n-1}|r^{2k}|$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$\|SC_{r^*}\|_E^2 \ge n|r^2| \frac{1-|r^{2n}|}{1-|r^2|}$$

ดังนั้น

$$\|SC_{r^*}\|_E \ge \sqrt{n}|r|\sqrt{\frac{1-|r^{2n}|}{1-|r^2|}} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|SC_{r^*}\|_E \ge |r|\sqrt{\frac{1-|r^{2n}|}{1-|r^2|}}$$

จากอสมการ (1) จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_2 \ge \frac{1}{\sqrt{n}}\|SC_{r^*}\|_E \ge |r|\sqrt{\frac{1-|r^{2n}|}{1-|r^2|}}$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของ SC_{r^*}

จาก $X \circ Y = SC_{r^*}$ เมื่อ X และ Y เป็นเมทริกซ์ที่นิยามข้างต้น จะได้ว่า

$$r_1(X) = \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_{1j}|^2} = \sqrt{\underbrace{|1|^2+|1|^2+|1|^2+\cdots+|1|^2}_{n \text{ พจน์}}} = \sqrt{n}$$

และจากบทตั้ง 2.7 จะได้

$$c_1(Y) = \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2} = \sqrt{n}$$

ดังนั้น จากอสมการ (2) จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_2 \le \sqrt{n}\cdot\sqrt{n} = n$$

นั่นคือ จะได้ขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของ SC_{r^*} ฉะนั้น

$$|r|\sqrt{\frac{1-|r^{2n}|}{1-|r^2|}} \le \|SC_{r^*}\|_2 \le n$$

ตัวอย่าง 3.6 ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

Table 3 Upper and lower bounds for the spectral norms of $n \times n$ symmetric geometric circulant matrices with the exponential function.

$\|r\|$	$n \times n$	r	Lower bound	$\\|SC_{r^*}\\|_2$	Upper bound
$\|r\| > 1$	5×5	$r = 3$	2.23607	91.13888	192.10674
		$r = -5i$	2.23607	651.04123	1426.36075
		$r = 3 + i$	2.23607	111.12052	235.70108
	6×6	$r = 3$	2.44949	273.38100	631.33193
		$r = -5i$	2.44949	3255.20822	7812.49998
		$r = 3 + i$	2.44949	351.36799	816.49617
$\|r\| < 1$	5×5	$r = 0.3$	0.31449	3.69854	5
		$r = -0.5i$	0.57707	3.49911	5
		$r = 0.2 + 0.3i$	0.02146	3.62378	5
	6×6	$r = 0.3$	0.31449	4.34649	6
		$r = -0.5i$	0.57728	4.11576	6
		$r = 0.2 + 0.3i$	0.01203	4.25561	6

สำหรับทฤษฎีบท 3.7 เป็นการหา 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดให้ $SC_{r^*} = SCirc_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

(i) ถ้า $|r| > 1$ แล้ว

$$\|SC_{r^*}\|_1 = \|SC_{r^*}\|_\infty = \frac{|r^n| - 1}{|r| - 1}$$

(ii) ถ้า $|r| \leq 1$ แล้ว

$$\|SC_{r^*}\|_1 = \|SC_{r^*}\|_\infty = n$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $SC_{r^*} = SCirc_{r^*}\left(e\left(\frac{0}{n}\right), e\left(\frac{1}{n}\right), e\left(\frac{2}{n}\right), \dots, e\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

$$= \begin{pmatrix} e\left(\frac{0}{n}\right) & e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & e\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ e\left(\frac{1}{n}\right) & e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & \cdots & re\left(\frac{0}{n}\right) \\ e\left(\frac{2}{n}\right) & e\left(\frac{3}{n}\right) & e\left(\frac{4}{n}\right) & \cdots & r^2 e\left(\frac{1}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e\left(\frac{n-1}{n}\right) & \mathrm{re}\left(\frac{0}{n}\right) & r^2 e\left(\frac{1}{n}\right) & \cdots & r^{n-1} e\left(\frac{n-2}{n}\right) \end{pmatrix}$$

(i) ถ้า $|r| > 1$ และจากบทนิยามของ 1-นอร์ม จะได้

$$\begin{aligned} \| SC_{r^*} \|_1 &= \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |s_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |s_{in}| \\ &= \left|e\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\right| + \sum_{k=0}^{n-2} \left|r^{k+1} e\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \\ &= \left|e\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\right| + \sum_{k=0}^{n-2} |r^{k+1}| \left|e\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \end{aligned}$$

สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e(x) = e^{2\pi i x}$ จะได้ว่า $|e(x)| = 1$ ดังนั้น

$$\|SC_{r^*}\|_1 = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} |r^{k+1}| = 1 + |r| \sum_{k=0}^{n-1} |r^k| - |r^n|$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$\|SC_{r^*}\|_1 = 1 + |r| \frac{1 - |r^n|}{1 - |r|} - |r^n| = \frac{|r^n| - 1}{|r| - 1}$$

และจากบทนิยามของ ∞-นอร์ม จะได้

$$\begin{aligned}
\|SC_{r^*}\|_\infty &= \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |s_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |s_{nj}| \\
&= \left|e\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\right| + \sum_{k=1}^{n-2} \left|r^{k+1} e\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \\
&= \left|e\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\right| + \sum_{k=1}^{n-2} |r^{k+1}| \left|e\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-2} |r^{k+1}| = 1 + |r| \sum_{k=0}^{n-1} |r^k| - |r^n|
\end{aligned}$$

และจากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$\|SC_{r^*}\|_\infty = 1 + |r| \frac{1 - |r^n|}{1 - |r|} - |r^n| = \frac{|r^n| - 1}{|r| - 1}$$

(ii) ถ้า $|r| \le 1$ และจากบทนิยามของ 1-นอร์ม และบทตั้ง 2.7 จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |s_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |s_{i1}| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right| = n$$

และจากบทนิยามของ ∞-นอร์ม และบทตั้ง 2.7 จะได้

$$\|SC_{r^*}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |s_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |s_{1j}| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e\left(\frac{k}{n}\right)\right| = n$$

ตัวอย่าง 3.8 ตารางแสดง 1-นอร์ม และ ∞-นอร์มของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ ใดๆ ที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

Table 4 1-norm and ∞-norm of $n \times n$ symmetric geometric circulant matrices with the exponential function.

$\|r\|$	$n \times n$	r	$\|SC_{r^*}\|_1 = \|SC_{r^*}\|_\infty$
$\|r\| > 1$	5×5	$r = 3$	121
		$r = -5i$	781
		$r = 3 + i$	145.78505
	6×6	$r = 3$	364
		$r = -5i$	3906
		$r = 3 + i$	462.01282
$\|r\| \le 1$	5×5	$r = 0.3$	5
		$r = -0.5i$	5
		$r = 0.2 + 0.3i$	5
	6×6	$r = 0.3$	6
		$r = -0.5i$	6
		$r = 0.2 + 0.3i$	6

4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ ∞-นอร์มของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตและเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ผลของการวิจัยทำให้ได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ ∞-นอร์มของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ดังทฤษฎีบท 3.1 และ 3.3 ตามลำดับ และผู้วิจัยได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ดังทฤษฎีบท 3.5 และ 3.7 ตามลำดับ

5. References

[1] Baijuan S., 2019, On the Norms of r-Hankel and r-Toeplitz Matrices, Mathematical Problems in Engineering, 1, 1-4, doi: 10.1155/2019/6729701.

[2] Baijuan S., 2021, On the Norms of RFM-LR-Circulant Matrices with the Exponential and Trigonometric Functions, J. Math., doi:10.1155/2021/2079104.

[3] Baijuan S., 2021, On the spectral norms of some circulant matrices with the trigonometric functions, J. Inequal. Appl., 225.

[4] Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1991). Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Kizilates, C., Tuglu, N., 2016, On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices, J. Inequal. Appl., 312, doi:10.1186/s13660-016-1255-1.

[6] Kizilates, C., Tuglu, N., 2018, On the Norms of Geometric and Symmetric Geometric Circulant Matrices with the Tribonacci Number, J. Sci., 31(2), 555-567.