วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองบนลำดับวนกลับ
The Second Order of Reflection Operators on Circular Sequences

DOI: 10.14456/mj-math.2022.x

ชนินาถ จันทร
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Chaninat Chanthorn
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai 50300

Email: chaninat_cha@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 25 พฤษภาคม 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 25 สิงหาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 16 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ขยายแนวคิดมาจากงานของ Alon, Krasikov และ Peres ซึ่งศึกษาการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนของลำดับวนกลับ โดยที่งานของเขาพัฒนามาจากปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ในงานวิจัยนี้เราได้ปรับแนวคิดของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งให้เป็นตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสอง โดยตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองนี้มีความซับซ้อนในการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนของลำดับวนกลับมากกว่าในกรณีของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่ง ผลการวิจัยนี้ได้นำเสนอแนวคิดการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนแบบใหม่

คำสำคัญ: การดำเนินการสะท้อน ลำดับวนกลับ ลำดับการดำเนินการสะท้อน

ABSTRACT

This research extend the idea from the work of Alon, Krasikov and Peres which investigate calculating the numbers of reflection operators on an arbitrary circular sequences. This is a generalization of a problem in International Mathematical Olympiad. In this work, we develop an idea of the first order reflection operators to be a new reflection operation which are called the second order of reflection operators. The reflection operations induce the complicate of calculating the numbers of its more than above. Finally, we introduce the numbers of the second order of reflection operators on an arbitrary circular sequences.

Keywords: Reflection operation, circular sequence, Reflection operation sequence

1. บทนำ

ในปี ค.ศ. 1989 Alon, Krasikov และ Peres [1] ได้นำเสนอแนวคิดในการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนของลำดับวนกลับ ซึ่งเป็นงานที่ขยายแนวคิดจากปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ [2] ซึ่งเป็นปัญหาคณิตศาสตร์เชิงการจัด โดยเป็นงานที่ขยายแนวคิดมาจากงานของ Mozes [3] ซึ่งเป็นแนวคิดในการทำวิจัยที่น่าสนใจ โดย Alon, Krasikov และ Peres [1] ได้กำหนดให้ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ เป็นลำดับวนกลับ (circular sequences) และนิยามตัวดำเนินการสะท้อน (reflection operators) R_i กล่าวคือ เป็นการกระทำกับพจน์ที่ i ของลำดับวนกลับ โดยที่ x_i มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนี้

<u>กรณี</u> $i \neq 1$ และ $i \neq n$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, \boxed{x_i}, \ldots, x_n\right) \xrightarrow{R_i} \left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-2}, \underline{x_{i-1} + x_i}, \boxed{-x_i}, \underline{x_{i+1} + x_i}, x_{i+2}, \ldots, x_n\right)$$

<u>กรณี</u> $i = 1$

$$\left(\boxed{x_1}, x_2, \ldots, x_n\right) \xrightarrow{R_1} \left(\boxed{-x_1}, \underline{x_2 + x_1}, x_3, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n + x_1}\right)$$

<u>กรณี</u> $i = n$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, \boxed{x_n}\right) \xrightarrow{R_n} \left(\underline{x_1 + x_n}, x_2, \ldots, x_{n-2}, \underline{x_{n-1} + x_n}, \boxed{-x_n}\right)$$

เช่น ลำดับวนกลับ $(1,\ -2,\ -3,\ 8,\ 5)$ สามารถดำเนินการสะท้อนได้กับพจน์ที่ติดลบ นั่นคือ พจน์ที่สอง และพจน์ที่สาม หากใช้ตัวดำเนินการสะท้อน R_2 จะได้

$$(1,\ -2,\ -3,\ 8,\ 5) \xrightarrow{R_2} (-1,\ 2,\ -5,\ 8,\ 5)$$

จากลำดับวนกลับ $(-1,\ 2,\ -5,\ 8,\ 5)$ มีพจน์ที่ติดลบอยู่ คือ พจน์ที่หนึ่ง และพจน์ที่สาม หากใช้ตัวดำเนินการสะท้อน R_3 จะได้

$$(-1,\ 2,\ -5,\ 8,\ 5) \xrightarrow{R_3} (-1,\ -3,\ 5,\ 3,\ 5)$$

อีกหนึ่งตัวอย่าง ลำดับวนกลับ $(2,\ 1,\ 3,\ 4,\ -2)$ มีพจน์ที่ติดลบอยู่เพียงพจน์เดียว คือ พจน์ที่ห้า หากใช้ตัวดำเนินการสะท้อน R_5 จะได้

$$(2,\ 1,\ 3,\ 4,\ -2) \xrightarrow{R_5} (0,\ 1,\ 3,\ 2,\ 2)$$

จะเห็นว่า ลำดับวนกลับ $(0,\ 1,\ 3,\ 2,\ 2)$ ไม่สามารถดำเนินารสะท้อนต่อได้ เพราะไม่มีพจน์ที่เป็นลบ ในงานของ Alon Krasikov และ Peres [1] ได้แสดงว่า ลำดับวนกลับที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม สามารถดำเนินการสะท้อนได้เพียงจำนวนจำกัดครั้ง ในกรณีที่ผลรวมของทุกพจน์ในลำดับวนกลับมีค่ามากกว่าศูนย์ และได้นำเสนอสูตรการคำนวณจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนด้วย

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยเรียกตัวดำเนินการสะท้อนข้างต้นว่า ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่ง R_i ซึ่งผู้วิจัยได้นำแนวคิดของ R_i มาสร้างตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสอง S_i ซึ่งเป็นการกระทำกับพจน์ที่ i ของลำดับวนกลับ โดยที่ x_i มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ซึ่งนิยามดังนี้

<u>กรณี</u> $i \notin \{1, 2, n-1, n\}$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, \boxed{x_i}, \ldots, x_n\right) \xrightarrow{S_i} \left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-3}, \underline{x_{i-2} + x_i}, x_{i-1}, \boxed{-x_i}, x_{i+1}, \underline{x_{i+1} + x_i}, x_{i+3}, \ldots, x_n\right)$$

<u>กรณี</u> $i = 1$

$$\left(\boxed{x_1}, x_2, \ldots, x_n\right) \xrightarrow{S_i} \left(\boxed{-x_1}, x_2, \underline{x_3 + x_1}, x_4, \ldots, x_{n-2}, \underline{x_{n-1} + x_1}, x_n\right)$$

<u>กรณี</u> $i = 2$

$$\left(x_1, \boxed{x_2}, x_3, \ldots, x_n\right) \xrightarrow{S_i} \left(x_1, \boxed{-x_2}, x_3, \underline{x_4 + x_2}, x_5, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n + x_2}\right)$$

<u>กรณี</u> $i = n-1$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, \boxed{x_{n-1}}, x_n\right) \xrightarrow{S_i} \left(\underline{x_1 + x_{n-1}}, x_2, \ldots, x_{n-4}, \underline{x_{n-3} + x_{n-1}}, x_{n-2}, \boxed{-x_{n-1}}, x_n\right)$$

กรณี $i=n$

$$\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},\boxed{x_n}\right)\xrightarrow{S_i}\left(x_1,\underline{x_2+x_n},x_3,\ldots,x_{n-3},\underline{x_{n-2}+x_n},x_{n-1},\boxed{-x_n}\right)$$

เช่น ลำดับวนกลับ $(1,\ -2,\ -3,\ 8,\ 5)$ หากเราใช้ตัวดำเนินการสะท้อน S_3 ได้ว่า

$$(1,\ -2,\ -3,\ 8,\ 5)\xrightarrow{S_3}(-2,\ -2,\ 3,\ 8,\ 2)$$

ในงานวิจัยนี้ จะพิจารณาลำดับวนกลับกรณีที่ $n\geq 4$ เท่านั้น จากนิยามลำดับวนกลับข้างต้น พบว่าการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองซึ่งมีความซับซ้อนกว่าการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งเป็นอย่างมาก ในงานวิจัยนี้จะแสดงว่า ลำดับวนกลับสามารถดำเนินการสะท้อนอันดับสองไปได้เพียงจำนวนจำกัดครั้งในบางกรณี พร้อมทั้งนำเสนอสูตรการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนด้วย

2. ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองบนลำดับวนกลับ

บทนิยาม 2.1 ลำดับเสถียร (stable sequence) คือ ลำดับวนกลับที่ไม่มีสมาชิกที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ลำดับไม่เสถียร (unstable sequence) คือ ลำดับวนกลับที่มีสมาชิกที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์

ทฤษฎีบท 2.1 [1] ถ้า $X=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ เป็นลำดับวนกลับไม่เสถียร ซึ่ง $\sum_{i=1}^{n}x_i>0$ แล้วจะมีการสะท้อนอันดับหนึ่งได้จำนวนจำกัดครั้ง นั่นคือ จะมี $R_{i_1},R_{i_2},\ldots,R_{i_m}$ ที่ซึ่ง $R_{i_m}\cdots R_{i_2}R_{i_1}(X)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาลำดับวนกลับ $\left(1,-2,-1,3\right)$ จะเห็นว่า $\sum_{i=1}^{4}x_i=1>0$ เมื่อดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\begin{aligned}\left(1,-2,-1,3\right)&\xrightarrow{R_2}\left(-1,2,-3,3\right)\xrightarrow{R_3}\left(-1,-1,3,0\right)\xrightarrow{R_1}\left(1,-2,3,-1\right)\\&\xrightarrow{R_2}\left(-1,2,1,-1\right)\xrightarrow{R_1}\left(1,1,1,-2\right)\xrightarrow{R_4}\left(-1,1,-1,2\right)\\&\xrightarrow{R_1}\left(1,0,-1,1\right)\xrightarrow{R_3}\left(1,-1,1,0\right)\xrightarrow{R_2}\left(0,1,0,0\right)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\left(0,1,0,0\right)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร ไม่สามารถดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งได้อีก

หมายเหตุ จากทฤษฎีข้างต้น เรียก $R_{i_1},R_{i_2},\ldots,R_{i_m}$ ว่า ลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่งของ X เขียนแทนด้วย $\left(R_{i_\alpha}\right)$ และเรียก m ว่า จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ X

ให้ลำดับวนกลับ $X=(x_1,\ldots,x_n)$ และ $u,v\in\{1,2,3,...,n\}$
กำหนดสัญลักษณ์

$$\langle u,v\rangle=\begin{cases}\{u,u+1,\ldots,v\} & ,\ u\le v\\ \{u,u+1,\ldots,n,1,\ldots,v\} & ,\ u>v\end{cases}$$

และ

$$\operatorname{sum}\langle u,v\rangle=\sum_{i\in\langle u,v\rangle}x_i$$

หมายเหตุ $\langle u\rangle$ แทน $\langle u,u\rangle$

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $X=(1,-2,-1,3)$ จะได้ว่า

$\langle 1,4\rangle=\{1,2,3,4\}$ และ $\operatorname{sum}\langle 1,4\rangle=\sum_{i\in\langle 1,4\rangle}x_i=x_1+x_2+x_3+x_4=1+(-2)+(-1)+3=1$

$\langle 1,3\rangle=\{1,2,3\}$ และ $\operatorname{sum}\langle 1,3\rangle=\sum_{i\in\langle 1,3\rangle}x_i=x_1+x_2+x_3=1+(-2)+(-1)=-2$

$\langle 1,2\rangle=\{1,2\}$ และ $\operatorname{sum}\langle 1,2\rangle=\sum_{i\in\langle 1,2\rangle}x_i=x_1+x_2=1+(-2)=-1$

$\langle 3,1\rangle=\{3,4,1\}$ และ $\operatorname{sum}\langle 3,1\rangle=\sum_{i\in\langle 3,1\rangle}x_i=x_3+x_4+x_1=(-1)+3+1=3$

$\langle 2\rangle=\langle 2,2\rangle=\{2\}$ และ $\operatorname{sum}\langle 2\rangle=\sum_{i\in\langle 2\rangle}x_i=x_2=-2$

กำหนดให้ $\lceil a\rceil$ คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ a

ทฤษฎีบท 2.2 [1] ถ้า $(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นลำดับวนกลับที่ไม่เสถียร ซึ่ง $\sum_{i=1}^{n}x_i>0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของลำดับวนกลับ $(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle<0}\left\lceil\frac{\left|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle\right|}{\operatorname{sum}\langle 1,n\rangle}\right\rceil$$

ตัวอย่าง 2.3 ลำดับวนกลับ $(1,-2,-1,3)$ มี $\operatorname{sum}\langle u,v\rangle$ ทั้งหมดดังนี้

$\operatorname{sum}\langle 1\rangle=1$	$\operatorname{sum}\langle 1,2\rangle=-1$	$\operatorname{sum}\langle 1,3\rangle=-2$	$\operatorname{sum}\langle 1,4\rangle=1$
$\operatorname{sum}\langle 2,1\rangle=1$	$\operatorname{sum}\langle 2\rangle=-2$	$\operatorname{sum}\langle 2,3\rangle=-3$	$\operatorname{sum}\langle 2,4\rangle=0$
$\operatorname{sum}\langle 3,1\rangle=3$	$\operatorname{sum}\langle 3,2\rangle=1$	$\operatorname{sum}\langle 3\rangle=-1$	$\operatorname{sum}\langle 3,4\rangle=2$

$\operatorname{sum}\langle 4,1\rangle = 4$ $\quad$ $\operatorname{sum}\langle 4,2\rangle = 2$ $\quad$ $\operatorname{sum}\langle 4,3\rangle = 1$ $\quad$ $\operatorname{sum}\langle 4\rangle = 3$

จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของลำดับบวนกลับ $(1,-2,-1,3)$ คือ

$$\begin{aligned}\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle<0}\left\lceil\frac{|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle|}{\operatorname{sum}\langle 1,4\rangle}\right\rceil &= \sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle<0}\left\lceil|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle|\right\rceil \\ &= \sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle<0}|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle| \\ &= |\operatorname{sum}\langle 1,2\rangle| + |\operatorname{sum}\langle 1,3\rangle| + |\operatorname{sum}\langle 2\rangle| + |\operatorname{sum}\langle 2,3\rangle| + |\operatorname{sum}\langle 3\rangle| \\ &= 1+2+2+3+1 = 9\end{aligned}$$

จะได้ว่า ลำดับบวนกลับ $(1,-2,-1,3)$ เมื่อดำเนินการสะท้อนไป 9 ครั้ง จะเกิดลำดับบวนกลับเสถียร

ถัดไป จะนำเสนอการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสอง โดยแยกการวิเคราะห์ตามจำนวนสมาชิกของลำดับบวนกลับ กล่าวคือ กรณีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มคี่ และกรณีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ เป็นลำดับบวนกลับ ที่มีสมาชิก n ตัว กำหนดสัญลักษณ์เพิ่มเติมดังนี้

$$\operatorname{sum} X = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{และ} \quad \operatorname{sum}\langle u,v\rangle_X = \sum_{i\in\langle u,v\rangle} x_i$$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ เป็นลำดับบวนกลับไม่เสถียร ที่มีสมาชิก n ตัว ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\operatorname{sum} X > 0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil\frac{|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y|}{\operatorname{sum} Y}\right\rceil$$

โดย $Y=(x_1,x_3,x_5,\ldots,x_n,x_2,x_4,\ldots,x_{n-1})$

บทพิสูจน์ ให้ $n=2k+1$ สำหรับบางจำนวนนับ k

ให้ $\mathcal{X}_n$ เป็นเซตของลำดับบวนกลับทั้งหมดที่มีจำนวนสมาชิก n ตัว

กำหนดการแปลงลำดับ $T:\mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_n$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$T(X) = (x_1,x_3,\ldots,x_{2k+1},x_2,x_4,\ldots x_{2k})$$

สำหรับทุก $X=(x_1,x_2,\ldots,x_{2k+1})\in\mathcal{X}_n$

เห็นได้ว่า T เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง และ $\operatorname{sum} T(X) = \operatorname{sum} X > 0$

ดังนั้นจะได้ว่า ลำดับวนกลับ X จะเป็นลำดับวนกลับเสถียร ก็ต่อเมื่อ ลำดับวนกลับ $T(X)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร

ให้ $\mathcal{R}$ และ $\mathcal{S}$ เป็นเซตของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งและอันดับสองทั้งหมดบน $\mathcal{X}_n$ ตามลำดับ พิจารณาการแปลงการสะท้อน $F:\mathcal{S}\to\mathcal{R}$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$F(S_i)=\begin{cases} R_\ell & \text{ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคี่ และ } i=2l+1 \\ R_{k+\ell} & \text{ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคู่ และ } i=2l \end{cases} \qquad \text{สำหรับทุก } S_i\in\mathcal{S}$$

เห็นได้ว่า F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

สำหรับ $X\in\mathcal{X}_n$ และ $S_i\in\mathcal{S}$ ใด ๆ สามารถสร้างแผนภาพความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S_i} & X_1 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ T(X) & \xrightarrow{F(S_i)} & T(X_1) \end{array}$$

ให้ $\left(S_{i_\alpha}\right)$ เป็นลำดับการสะท้อนอันดับสองของ X

จากแผนภาพข้างต้น จะได้

$$\begin{array}{ccccccccc} X & \xrightarrow{S_{i_1}} & X_1 & \xrightarrow{S_{i_2}} & X_2 & \xrightarrow{S_{i_3}} & X_3 & \cdots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ T(X) & \xrightarrow{F(S_{i_1})} & T(X_1) & \xrightarrow{F(S_{i_2})} & T(X_2) & \xrightarrow{F(S_{i_3})} & T(X_3) & \cdots \end{array}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\left(F\left(S_{i_\alpha}\right)\right)$ เป็นลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่งของ $T(X)$ และได้ว่า จำนวนสมาชิกใน $\left(F\left(S_{i_\alpha}\right)\right)$ กับ $\left(S_{i_\alpha}\right)$ เท่ากัน

จาก $\operatorname{sum}T(X)=\operatorname{sum}X>0$ และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ $T(X)=Y$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\displaystyle\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil\frac{\left|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y\right|}{\operatorname{sum}Y}\right\rceil$

ดังนั้น จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ $\displaystyle\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil\frac{\left|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y\right|}{\operatorname{sum}Y}\right\rceil$ □

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ $X=(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})$ เป็นลำดับวนกลับไม่เสถียร และให้ $Y=(x_1,x_3,\ldots,x_{2n-1})$ และ $Z=(x_2,x_4,\ldots,x_{2n})$ ถ้า $\operatorname{sum}Y>0$ และ $\operatorname{sum}Z>0$ แล้ว จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil\frac{\left|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Y\right|}{\operatorname{sum}Y}\right\rceil+\sum_{\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Z<0}\left\lceil\frac{\left|\operatorname{sum}\langle u,v\rangle_Z\right|}{\operatorname{sum}Z}\right\rceil$$

บทพิสูจน์ พิจารณาการแปลง $T:\mathcal{X}_{2n}\to\left(\mathcal{X}_n\times\mathcal{X}_n\right)$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$T(X)=\left[(x_1,x_3,\ldots,x_{2n+1}),(x_2,x_4,\ldots,x_{2n})\right]=\left[Y,\mathrm{Z}\right]$$

สำหรับทุก $X=(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})\in\mathcal{X}_{2n}$
จะได้ว่า T เป็นฟังก์ขันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

เนื่องจากการสะท้อนอันดับสอง S_{2i} จะดำเนินการกับพจน์ที่เป็นจำนวนคู่เท่านั้น และการสะท้อนอันดับสอง S_{2i-1} จะดำเนินการกับพจน์ที่เป็นจำนวนคี่เท่านั้น ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ว่า ลำดับวนกลับ X เป็นลำดับวนกลับเสถียร ก็ต่อเมื่อ ลำดับวนกลับ Y กับลำดับวนกลับ Z เป็นลำดับวนกลับเสถียร

เนื่องจาก $\operatorname{sum}Y>0,\operatorname{sum}Z>0$ และทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า จะมีลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่ง $\left(R_{i_m}\right)$ และ $\left(R'_{j_l}\right)$ ซึ่ง $R_{i_m}\cdots R_{i_2}R_{i_1}\left(Y\right)$ กับ $R'_{j_l}\cdots R'_{j_2}R'_{j_1}\left(Z\right)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร

สร้างลำดับการสะท้อนอันดับสอง $\left(S_{\ell_\alpha}\right)$ จากลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่ง $\left(R_{i_m}\right)$ และ $\left(R'_{j_l}\right)$ ดังนี้

1. แปลงตำแหน่งพจน์ i_m ของ $\left(R_{i_m}\right)$ มาเป็นตำแหน่งพจน์ของ $S_{\ell_1},S_{\ell_2},S_{\ell_3},\ldots,S_{\ell_m}$ ดังนี้

$$S_{\ell_1}=S_{2i_1-1},S_{\ell_2}=S_{2i_2-1},S_{\ell_3}=S_{2i_3-1},\ldots,S_{\ell_m}=S_{2i_m-1}$$

2. แปลงตำแหน่งพจน์ j_l ของ $\left(R'_{j_l}\right)$ มาเป็นตำแหน่งพจน์ของ $S_{\ell_{m+1}},S_{\ell_{m+2}},S_{\ell_{m+3}},\ldots,S_{\ell_{m+l}}$ ดังนี้

$$S_{\ell_{m+1}}=S_{2j_1},S_{\ell_{m+2}}=S_{2j_2},S_{\ell_{m+3}}=S_{2j_3},\ldots,S_{\ell_{m+l}}=S_{2j_l}$$

ซึ่งจะทำให้ $S_{\ell_{m+l}}\cdots S_{\ell_2}S_{\ell_1}\left(X\right)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร และจำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X เท่ากับ จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ Y รวมกับจำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ Z

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil\frac{\left|\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Y\right|}{\mathrm{sum}\ Y}\right\rceil+\sum_{\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Z<0}\left\lceil\frac{\left|\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Z\right|}{\mathrm{sum}\ Z}\right\rceil \qquad \square$$

นอกจากนี้พบว่า การดำเนินการสะท้อนอันดับสองมีความสัมพันธ์กับการดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่ง สูตรต่าง ๆ ที่ได้ เกิดจากการนำลำดับวนกลับมาจัดเรียงและสร้างความเชื่อมโยง เพื่อให้สามารถใช้การคำนวณด้วยทฤษฎีของ Alon Krasikov และ Peres ได้ ซึ่งในที่นี้จำแนกสูตรที่ได้ตามจำนวนสมาชิกของลำดับวนกลับ ว่าเป็นจำนวนคู่ หรือจำนวนคี่ ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างข้อคาดการณ์เกี่ยวกับตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสาม Γ_i นิยามดังนี้

สำหรับลำดับวนกลับ $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ซึ่งมีพจน์ที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ $(x_i<0)$
จะมีการดำเนินการสะท้อนอันดับสาม Γ_i คือ

$$\left(x_1,x_2,\dots,\boxed{x_i},\dots,x_n\right)\xrightarrow{\Gamma_i}\left(x_1,\dots,\underline{x_{i-3}+x_i},x_{i-2},x_{i-1},\boxed{-x_i},x_{i+1},x_{i+2},\underline{x_{i+3}+x_i},\dots,x_n\right)$$

และมีการจำแนกสูตรตามจำนวนสมาชิกของลำดับวนกลับ เป็น

$$n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3),\ \ n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\ \text{ และ }\ n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$$

3. สรุป

ในงานวิจัยนี้ ได้ทฤษฎีบทของลำดับวนกลับไม่เสถียร $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ โดยที่ $n\geq 4$ ดังนี้

<u>กรณี</u> n เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $Y=(x_1,x_3,,x_5,\dots,x_n,x_2,x_4,\dots,x_{n-1})$

ถ้า $\mathrm{sum}\,X>0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil\frac{\left|\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Y\right|}{\mathrm{sum}\ Y}\right\rceil$$

<u>กรณี</u> n เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $Y=(x_1,x_3,,x_5,\dots,x_{n-1})$ และ $Z=(x_2,x_4,\dots,x_n)$

ถ้า $\mathrm{sum}\,Y>0$ และ $\mathrm{sum}\,Z>0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Y<0}\left\lceil \frac{\left|\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Y\right|}{\mathrm{sum}\ Y}\right\rceil+\sum_{\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Z<0}\left\lceil \frac{\left|\mathrm{sum}\langle u,v\rangle_Z\right|}{\mathrm{sum}\ Z}\right\rceil$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Alon, N., Krasikov, I. and Peares, Y. (1989). Reflection Sequences. *The American Mathematical Monthly*, *96* (9), p. 820 – 823.

[2] Chakerian, G. D., Klamkin, M. S. and Hermann, H. (1979). News & Letters. *Mathematics Magazine*, 59, p. 154 – 155.

[3] Mozes, S. (1990). Reflection Processes on Graphs and Weyl Groups. *Journal of Combinatorial Theory*, *53*, p. 128 – 142.