**วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์**
**ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565**
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

# นัยทั่วไปแบบหนึ่งของทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์

# A Generalization of Marion Walter's Theorem

DOI: 10.14456/mj-math.2022.x

รักษ์เกียรติ รักษ์อุดมการณ์[1,*] และ เกษสุดา บูรณพันศักดิ์[2]
[1,2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ บุรีรัมย์ 31000

Rakkiad RakUdomkan[1,*] and Ketsuda Buranaphansak[2]
[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Education, Buriram Rajabhat University, Buriram 31000

Email: [1]rakkiad.rak@bru.ac.th [2]katsuda.bp@bru.ac.th

วันที่รับบทความ : 1 สิงหาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 1 พฤษภาคม 2564 วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

**บทคัดย่อ**

ในบทความนี้ ได้ทำการศึกษานัยทั่วไปแบบหนึ่งของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยนำทฤษฎีบทชูเลซมาประยุกต์ใช้ในการหานัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่ดังกล่าว

**คำสำคัญ:** ทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ ทฤษฎีบทชูเลซ

* ผู้เขียนหลัก

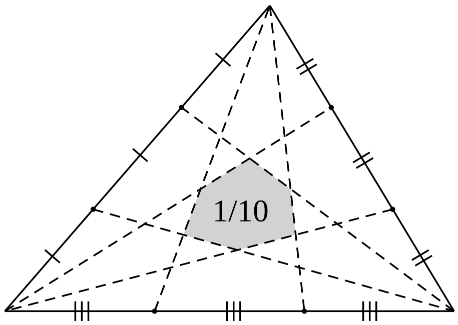
## ABSTRACT

In this paper, we provide a generalization of Marion Walter's theorem by applying Shoelace theorem.


**Keywords:** Marion Walter's theorem, Shoelace theorem

## 1. บทนำ

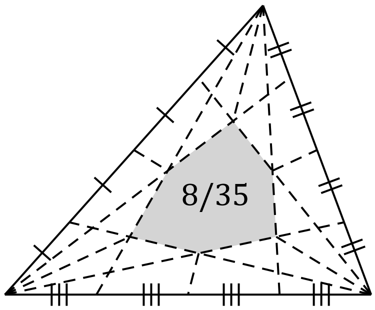
จากทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ (Marion Walter's theorem) [2] ซึ่งกล่าวถึงอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่แบ่งด้านตรงข้ามของจุดยอดนั้นออกเป็น 3 ส่วน เท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 1 ว่าอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเป็น $\mathbf{1:10}$ เสมอ




รูปที่ 1 ความสัมพันธ์ของรูปหกเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีของแมเรียน วอลเตอร์

จากการศึกษางานวิจัยที่ผ่านมาพบว่า นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะนำสมบัติหรือทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาพิสูจน์ว่าอัตราส่วนดังกล่าวเป็นจริงตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ หรือไม่ โดยในปี ค.ศ. 1994 ไรอัน มอร์แกน [7] ได้ทำขยายทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ ด้วยการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น $\boldsymbol{N}$ ส่วน โดยที่ $\boldsymbol{N}$ เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 ซึ่งผลการศึกษาพบว่า พื้นที่หกเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}\boldsymbol{N}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}$ เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ. 2016 ลูกา โกลโดนิ [4] ได้ศึกษาอัตราส่วนของพื้นที่ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 2 ซึ่งผลการศึกษาพบว่า พื้นที่รูปหกเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{35}}$ เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม




รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ของรูปหกเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมตามการศึกษาของลูกา โกลโดนิ

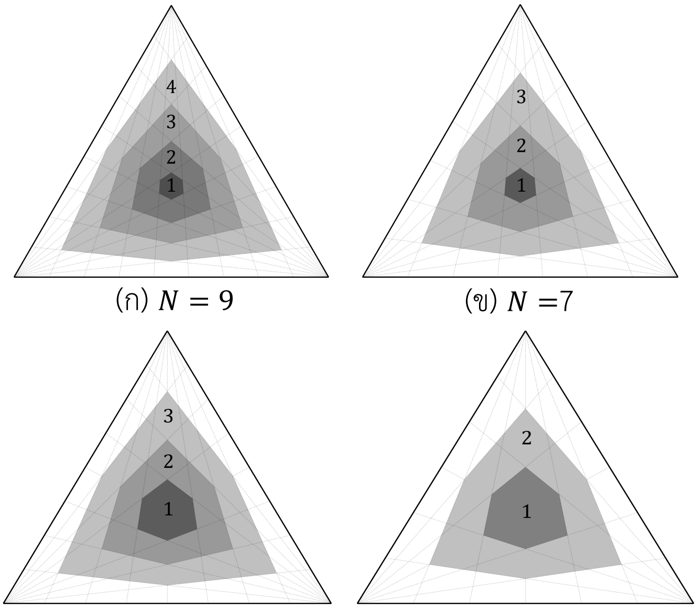
ต่อมาปี ค.ศ. 2018 โอซามา อับดัลลา [5] ได้ศึกษารูปทั่วไปของอัตราส่วนของพื้นที่ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยแยกพิจารณาการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่ ผลการศึกษาพบว่า

| $N$ **จำนวนคี่** | $N$ **เป็นจำนวนคู่** |
|---|---|
| $Ae = \dfrac{32}{\left(\dfrac{6N}{2c-1}\right)^2 - 4}$ <br> เมื่อ $N \geq 3$ และ <br> $c = 1, 2, \ldots, \dfrac{N-1}{2}$ | $Ae = \dfrac{32}{9\left(\dfrac{N}{c}\right)^2 - 4}$ <br> เมื่อ $N \geq 3$ และ <br> $c = 1, 2, \ldots, \dfrac{N-2}{2}$ |

โดย $N$ แทน จำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

$c$ แทน ลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่

$Ae$ แทน อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม




(ก) $N = 9$ (ข) $N =7$

(ค) $N = 8$ (ง) $N = 6$

รูปที่ 3 ตัวอย่างลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่กรณี $N = 9, 7, 8$ และ $6$ ตามลำดับ ตามการศึกษาของโอซามา อับดัลลา

จากการศึกษาของโอซามา อับดัลลา ข้างต้น ทำให้เราสนใจที่จะศึกษาต่อยอดเพื่อหานัยทั่วไปแบบอื่นของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมในรูปของ $N$ ใด ๆ เมื่อ $N$ เป็นจำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม และ $N \geq 3$ เพียงสูตรเดียวโดยไม่ต้องแบ่ง $N$ ออกเป็นกรณีจำนวนคู่และกรณีจำนวนคี่

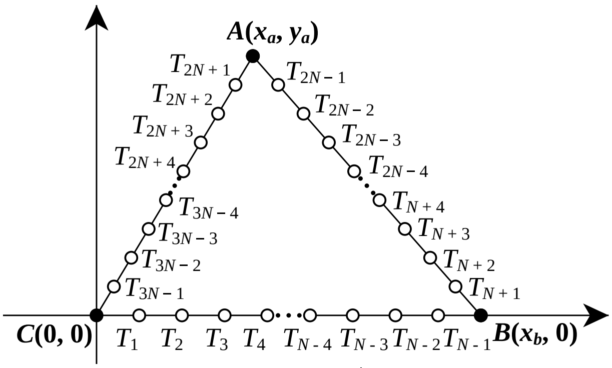
## 2. ผลการศึกษา

การหานัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ มีขั้นตอนและรายละเอียดดังนี้

### 2.1 เงื่อนไขเบื้องต้น

ให้ $ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $A(x_a, y_a), B(x_b, 0)$ และ $C(0,0)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมนั้น

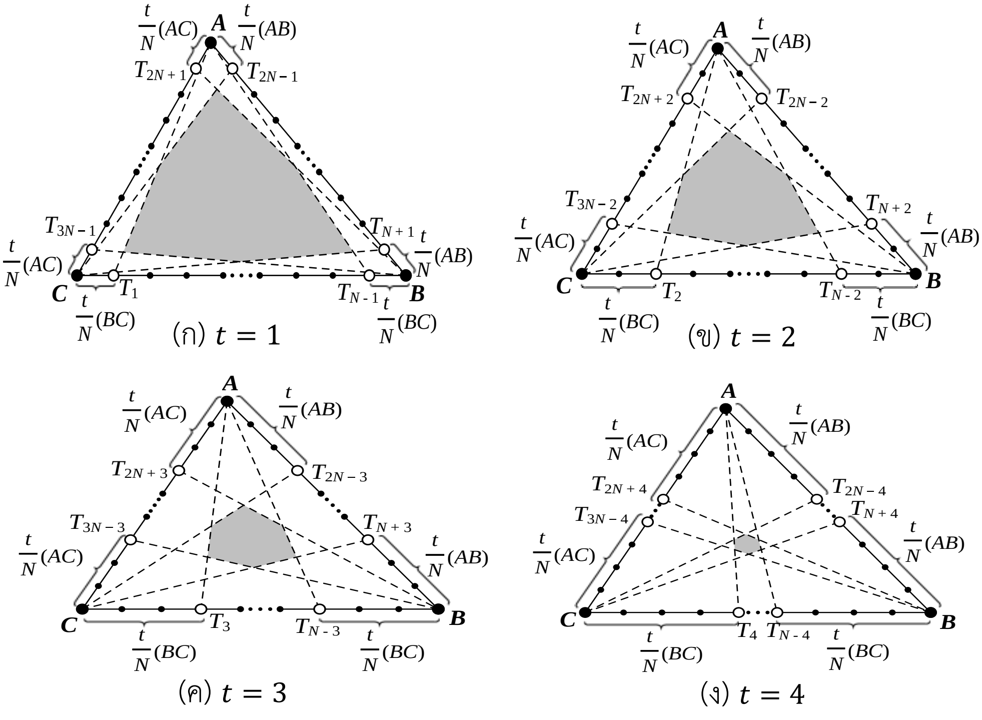
แบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม $ABC$ ออกเป็น $N$ ส่วน เท่า ๆ กัน โดยที่ $N \geq 3$ และให้ $T_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, 3N$ เป็นจุดแบ่งด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม $ABC$ ดังรูปที่ 4




รูปที่ 4 การแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม $ABC$ ออกเป็น $N$ ส่วนเท่า ๆ กัน

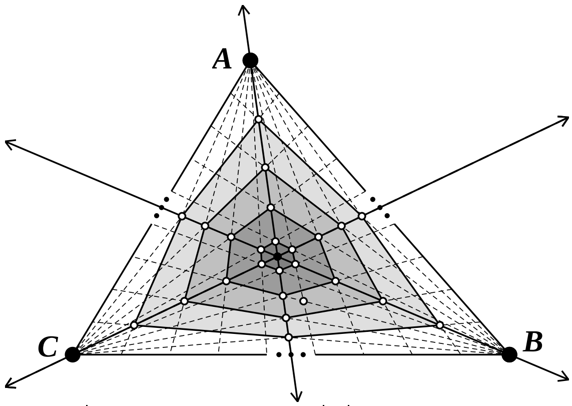
จากรูปที่ 4 จะเห็นว่าจุดแบ่งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมี $N-1$ จุด (ไม่นับจุดยอด)

ให้ $t$ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{N}{2}$ เราสามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดแบ่ง 2 จุดที่อยู่บนด้านตรงข้าม โดยจุดแบ่ง 2 จุดนั้น อยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่อยู่ใกล้ที่สุดในด้านตรงข้ามเป็นระยะเท่ากัน คือ $\frac{t}{N}$ เท่าของความยาวด้านตรงข้ามนั้น ดังตัวอย่างในรูปที่ 5




รูปที่ 5 รูปหกเหลี่ยมภายใต้การแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วยค่า $t$

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่ารูปเรขาคณิตตรงกลางของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้ามดังกล่าวนั้นจะเป็นรูปหกเหลี่ยมเสมอ เนื่องจากไม่มีส่วนของเส้นตรงใดที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมผ่านจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมนั้น และจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมกับจุดเซนทรอยด์ จึงเกิดเป็นรูปหกเหลี่ยมเสมอ ดังรูปที่ 6




รูปที่ 6 จุดยอดของรูปหกเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดกับจุดเซนทรอยด์เสมอ

ในขั้นตอนต่อไป จะใช้จุดแบ่ง $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ $T_{3N-t}$ สำหรับหาพื้นที่รูปหกเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยที่ $1 \le t < \frac{N}{2}$

## 2.2 พื้นที่รูปหกเหลี่ยมภายใต้เงื่อนไขการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น $N$ ส่วนเท่า ๆ กัน

2.2.1 พิกัดจุดแบ่งแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

จากจุด $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ $T_{3N-t}$ เป็นจุดแบ่งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถหาพิกัดจุดแบ่งดังกล่าวได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.1** [3] ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งบนส่วนของเส้นตรง $P_1P_2$ ซึ่งเชื่อมระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $P_1P : PP_2 = r_1 : r_2$ จะได้ว่า

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \text{ และ } y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}$$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ จุดแบ่ง $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ $T_{3N-t}$ มีพิกัดดังนี้

$$T_t = \left(\frac{tx_b}{N}, 0\right) \qquad T_{2N-t} = \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{N}, \frac{(N-t)y_a}{N}\right)$$

$$T_{N-t} = \left(\frac{(N-t)x_b}{N}, 0\right) \qquad T_{2N+t} = \left(\frac{(N-t)x_a}{N}, \frac{(N-t)y_a}{N}\right)$$

$$T_{N+t} = \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{N}, \frac{ty_a}{N}\right) \qquad T_{3N-t} = \left(\frac{tx_a}{N}, \frac{ty_a}{N}\right)$$

2.2.2 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและจุดแบ่งที่อยู่บนด้านตรงข้าม

กำหนดให้เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและจุดแบ่งที่อยู่บนด้านตรงข้ามทั้ง 6 จุดข้างต้น คือ เส้นตรง $l_1, l_2, \ldots, l_6$ ตามลำดับ โดยมีมีสมการดังนี้

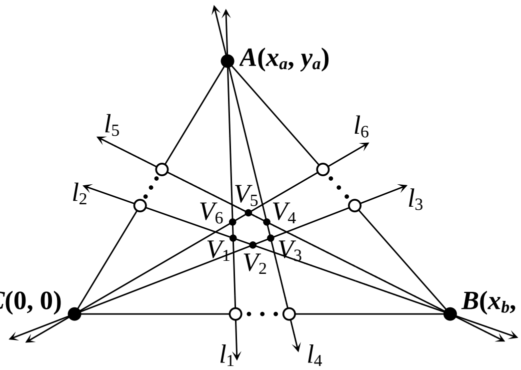
$$l_1 : y = \frac{Ny_a}{Nx_a - tx_b}(x - x_a) + y_a \qquad l_2 : y = \frac{ty_a}{tx_a - Nx_b}(x - x_a)$$

$$l_3 : y = \frac{ty_a}{tx_a + (N-t)x_b}x \qquad l_4 : y = \frac{Ny_a}{Nx_a - (N-t)x_b}(x - x_a) + y_a$$

$$l_5 : y = \frac{(N-t)y_a}{(N-t)x_a - Nx_b}(x - x_b) \qquad l_6 : y = \frac{(N-t)y_a}{(N-t)x_a + tx_b}x$$

2.2.3 พิกัดจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างเส้นตรง $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ และ $l_6$

กำหนดให้ $V_i$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง $l_i$ และ $l_{i+1}$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, 6$ และ $l_7 = l_1$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 7




รูปที่ 7 จุดยอด $V_1$ ถึง $V_6$ ของรูปหกเหลี่ยม ที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง $l_1$ ถึง $l_6$

จะได้ จุดยอด $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ และ $V_6$ ของรูปหกเหลี่ยม มีพิกัดดังนี้

$$V_1 = \left(\frac{t(x_a + x_b)}{N+t}, \frac{ty_a}{N+t}\right) \qquad V_2 = \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{2N-t}, \frac{ty_a}{2N-t}\right)$$

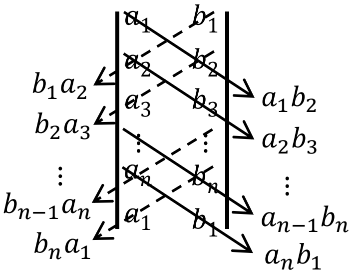
$$V_3 = \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{N+t}, \frac{ty_a}{N+t}\right) \qquad V_4 = \left(\frac{(N-t)(x_a + x_b)}{2N-t}, \frac{(N-t)y_a}{2N-t}\right)$$

$$V_5 = \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{N+t}, \frac{(N-t)y_a}{N+t}\right) \qquad V_6 = \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{2N-t}, \frac{(N-t)y_a}{2N-t}\right)$$

2.2.4 พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$

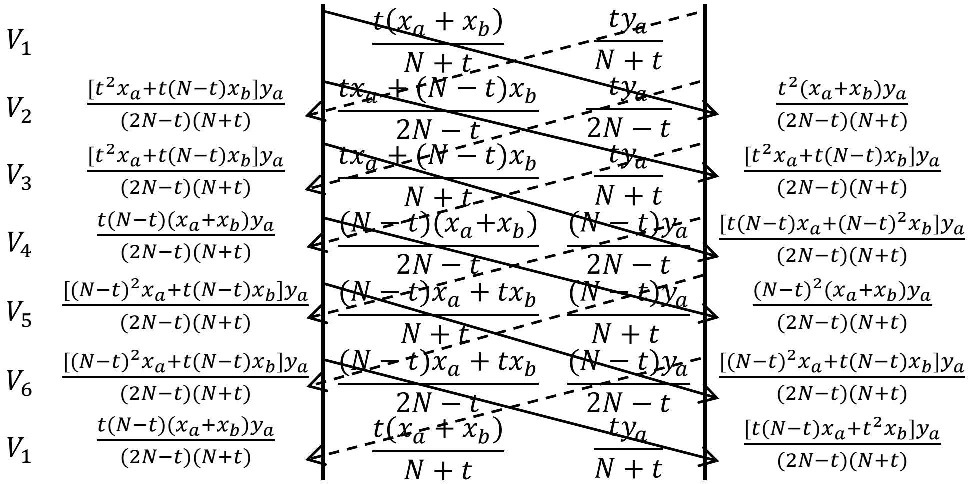
**ทฤษฎีบท 2.2** (ทฤษฎีบทชูเลซ (Shoelace Theorem)) [1] กำหนดให้ $P$ เป็นรูป $n$ เหลี่ยม ที่มีจุดยอดเป็นจุด $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_n, b_n)$ ซึ่งเรียงกันในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา พื้นที่ของรูป $P$ คือ

$$\frac{1}{2}[(a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_{n-1}b_n + a_nb_1) - (b_1a_2 + b_2a_3 + \cdots + b_{n-1}a_n + b_nab_1)]$$




ดังนั้น จากทฤษฎีบทชูเลซและจุดยอด $V_1,V_2,V_3,V_4,V_5$ และ $V_6$ ของรูปหกเหลี่ยมวางเรียงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะได้พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}y_a\Bigg(\bigg(\frac{t^2(x_a+x_b)}{(2N-t)(N+t)}+\frac{t^2x_a+t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)}+\frac{t(N-t)x_a+(N-t)^2x_b}{(2N-t)(N+t)}\\
&\quad+\frac{(N-t)^2(x_a+x_b)}{(2N-t)(N+t)}+\frac{(N-t)^2x_a+t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)}+\frac{t(N-t)x_a+t^2x_b}{(2N-t)(N+t)}\bigg)\\
&\quad-\bigg(\frac{t^2x_a+t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)}+\frac{t^2x_a+t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)}+\frac{t(N-t)(x_a+x_b)}{(2N-t)(N+t)}\\
&\quad+\frac{(N-t)^2x_a+t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)}+\frac{(N-t)^2x_a+t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)}+\frac{t(N-t)(x_a+x_b)}{(2N-t)(N+t)}\bigg)\Bigg)\\
&=\frac{x_by_a(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}
\end{aligned}$$




ให้พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC$ คือ $[ABC]$ จะได้ว่า $[ABC]=\frac{x_by_a}{2}$ หรือ $x_by_a=2[ABC]$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ $\dfrac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$

## 2.3 รูปทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

จากพื้นที่รูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ $\dfrac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC$ คือ $[ABC]$ จะได้ อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\frac{\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}}{[ABC]} = \frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$$

สรุปได้ว่า รูปทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)} \qquad (*)$$

เมื่อ $N$ แทน ส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $N \geq 3$

$t$ แทน จำนวนส่วนที่นับจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปถึงจุดแบ่งใกล้ที่สุดที่เลือกบนแต่ละด้าน

## 2.4 ความสัมพันธ์กับทฤษฎีบทอื่น ๆ

จากนัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของบทความนี้ คือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ เมื่อแทน $t = \frac{N-1}{2}$ จะได้ว่า (*) คือ $\frac{8}{9N^2-1}$ ซึ่งคือ อัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมที่เล็กที่สุดต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ซึ่งเท่ากับอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่ด้านถูกแบ่งออกเป็นจำนวนคี่ของทฤษฎีบทของไรอัน มอร์แกน ซึ่งคือ $\frac{8}{9N^2-1}$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีบทของโอซามา อับดัลลา ที่แยกพิจารณาการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่ โดยกำหนด $c$ เป็นลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่ ซึ่งเป็นแนวคิดกลับกันกับบทความนี้ที่กำหนดให้ $t$ เป็นลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากใหญ่ไปเล็ก เช่น ถ้าหากแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 9 ส่วน จะเกิดรูปหกเหลี่ยมภายในขึ้นทั้งหมด 4 รูป ซึ่งทฤษฎีบทของโอซามา อับดัลลา จะให้ $c$ เป็น $1, 2, 3, 4$ โดยเรียงตามลำดับขนาดของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่ ดังรูปที่ 3(ก) แต่ในบทความนี้จะให้ $t$ เป็น $1, 2, 3, 4$ ซึ่งเรียงตามลำดับขนาดรูปหกเหลี่ยมจากใหญ่ไปเล็ก ดังรูปที่ 5 ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $t$ และ $c$ มีการเรียงลำดับขนาดของรูปหกเหลี่ยมแบบสวนทางกัน โดยที่ $t = \frac{N+1}{2} - c$ ทำให้ได้ว่าอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่เขียนในรูป $t$ และ $c$ มีความสัมพันธ์กัน ดังตารางที่ 2.1 และ 2.2

ตารางที่ 2.1 กรณีที่ $N$ เป็นจำนวนคี่ (เกิดรูปหกเหลี่ยม $\frac{N-1}{2}$ รูป)

<table>
<tr><th>$c$</th><th>$t$</th><th>อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ($Ae$)</th></tr>
<tr><td>$1$</td><td>$\frac{N-1}{2}$</td><td rowspan="7">จาก $t = \frac{N+1}{2} - c = \frac{N+1-2c}{2}$<br>แทน $t$ ใน (*) จะได้ว่า<br>$Ae = \frac{2\left[N-2\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]^2}{\left[2N-\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]\left[N+\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]}$<br>$= \frac{2(2c-1)^2}{\frac{[3N+(2c-1)][3N-(2c-1)]}{4}}$<br>$= \frac{8(2c-1)^2}{9N^2-(2c-1)^2}$<br>$= \frac{8}{\left(\frac{3N}{2c-1}\right)^2-1}$<br>$= \frac{32}{\left(\frac{6N}{2c-1}\right)^2-4}$<br>เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \ldots, \frac{N-1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$2$</td><td>$\frac{N-1}{2} - 1$</td></tr>
<tr><td>$3$</td><td>$\frac{N-1}{2} - 2$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$\frac{N-1}{2} - 2$</td><td>$3$</td></tr>
<tr><td>$\frac{N-1}{2} - 1$</td><td>$2$</td></tr>
<tr><td>$\frac{N-1}{2}$</td><td>$1$</td></tr>
</table>

ตารางที่ 2.2 กรณีที่ $N$ เป็นจำนวนคู่ (เกิดรูปหกเหลี่ยม $\frac{N-2}{2}$ รูป)

<table>
<tr><th>$c$</th><th>$t$</th><th>อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ($Ae$)</th></tr>
<tr><td>$1$</td><td>$\frac{N-2}{2}$</td><td rowspan="7">จาก $t = \frac{N}{2} - c = \frac{N-2c}{2}$<br>แทน $t$ ใน (*) จะได้ว่า<br>$Ae = \frac{2\left[N-2\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]^2}{\left[2N-\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]\left[N+\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]}$<br>$= \frac{2(2c)^2}{\frac{[3N+2c][3N-2c]}{4}}$<br>$= \frac{32c^2}{9N^2-4c^2}$<br>$= \frac{32}{9\left(\frac{N}{c}\right)^2-4}$<br>เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \ldots, \frac{N-2}{2}$</td></tr>
<tr><td>$2$</td><td>$\frac{N-2}{2} - 1$</td></tr>
<tr><td>$3$</td><td>$\frac{N-2}{2} - 2$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$\frac{N-2}{2} - 2$</td><td>$3$</td></tr>
<tr><td>$\frac{N-2}{2} - 1$</td><td>$2$</td></tr>
<tr><td>$\frac{N-2}{2}$</td><td>$1$</td></tr>
</table>

## 3. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาหานัยทั่วไปแบบหนึ่งของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยการแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น $N$ ส่วนเท่า ๆ กัน และไม่ว่าจะลากเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดแบ่ง 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ด้านตรงข้าม ซึ่งจุดแบ่ง 2 จุดนั้นอยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ใกล้ที่สุดในด้านนั้นเป็นระยะเท่ากัน จะได้ว่าอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ เมื่อ $N$ แทนจำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $N \geq 3$ และ $t$ แทนจำนวนส่วนที่นับจากจุดแบ่งไปยังจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ใกล้สุดบนแต่ละด้าน

## 4. ข้อสังเกต

จากผลการศึกษาอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ซึ่งคือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ หากพิจารณาตัวผกผันของอัตราส่วนนี้ ซึ่งคือ $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ พบว่า

4.1 ถ้า $N$ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่อยู่ในรูป $2^n$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$
จะได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม $t$ ที่ทำให้อัตราส่วน $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม
พิจารณาได้ดังนี้

<u>กรณี 1</u> ถ้า $t$ เป็นจำนวนคี่

จะทำให้ $2 \nmid 9t(2^n - t)$

ดังนั้น $1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(2^n-t)}{2(2^n-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $t$ เป็นจำนวนคี่

<u>กรณี 2</u> ถ้า $t$ เป็นจำนวนคู่ ที่อยู่ในรูป $m2^k$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$ และ $m$ เป็นจำนวนคี่

เนื่องจาก $t \leq \frac{N+1}{2} < N$ ดังนั้น $k < N$

จะได้
$$\begin{aligned} 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} &= 1 + \frac{9t(2^n-t)}{2(2^n-2t)^2} \\ &= 1 + \frac{(9m2^k)\left(2^n-(m2^k)\right)}{2\left(2^n-(2m2^k)\right)^2} \\ &= 1 + \frac{9m\left(2^{n-k}-m\right)}{2\left(2^{n-k}-2m\right)^2} \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าสำหรับ $m$ ที่เป็นจำนวนคี่ $2 \nmid 9m(2^{n-k} - m)$

ดังนั้น $1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม $t$ ที่ทำให้อัตราส่วน $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $N$ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่อยู่ในรูป $2^n$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$

4.2 เมื่อ $(N,t) = 1$ จะได้ว่า

4.2.1 ถ้า $N$ เป็นจำนวนคู่ใด ๆ โดย $N \geq 3$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณาได้ดังนี้ จาก $N$ เป็นจำนวนคู่ใด ๆ และ $(N,t) = 1$ ทำให้ได้ว่า $t$ เป็นจำนวนคี่

จะเห็นว่า $(2N-t)(N+t)$ เป็นจำนวนคี่ และ $2(N-2t)^2$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $N$ เป็นจำนวนคู่ใด ๆ โดย $N \geq 3$ และ $(N,t) = 1$

4.2.2 ถ้า $N$ เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $t = \frac{N-1}{2}$ หรือ $t = \frac{N-3}{2}$

พิจารณาได้ดังนี้

จาก $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$

เนื่องจาก $N$ เป็นจำนวนคี่ ที่ $N \geq 5$ จะได้ว่า $t(N-t)$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $2 \mid t(N-t)$ เพราะฉะนั้น

$\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $\frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ก็ต่อเมื่อ $(N-2t)^2 \mid 9$

ก็ต่อเมื่อ $N-2t = 1$ หรือ $N-2t = 3$

ก็ต่อเมื่อ $t = \frac{N-1}{2}$ หรือ $t = \frac{N-3}{2}$

ดังนั้น ถ้า $N$ เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $t = \frac{N-1}{2}$ หรือ $t = \frac{N-3}{2}$

## เอกสารอ้างอิง

[1] Beyer, W. (1978). *CRC Standard Mathematical Tables*. Boca Raton, Florida: CRC Press.

[2] Cuoco, A., Goldenberg, P., and Mark, J. (1993). Reader Reflections: Marion's Theorem. *Mathematics Teacher*, 86 (8), p. 619.

[3] Frank, A. and Philip, A. S. (1992). *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Mathematics* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill International Edition.

[4] Luca, G. (2016). A Generalization of Marion Walter's Theorem. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/301284954.

[5] Osama, A. (2018). The Relationship Between The Different Central Hexagons Formed Through Odd/Even-Secting The Lengths of Triangles. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/322477444.

[6] Riddle, D. F. (1996). *Analytic Geometry* (6th ed.). Boston: PWS Publishing company.

[7] Ryan, M. (1994). Reader Reflections: No Restrictions need, *Mathematics Teacher*, 87, p. 726, 743.