วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา

Existence of Solution to q-Hilfer Fractional Difference Equation with A Time-varying Order of Operations

DOI: 10.14456/mj-math.2022.x

นรวิชญ์ ลิมปานุกร
โครงการนิติศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชากฎหมายธุรกิจ หลักสูตรนานาชาติ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Norravich Limpanukorn
International Program in Business Law, Faculty of Law, Thammasat University,
Pathum Thani 12120

Email: norravich.lim@dome.tu.ac.th

วันที่รับบทความ : 24 เมษายน 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 17 พฤษภาคม 2564 วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ศึกษาสมการผลต่างสืบเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha(t) < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ และ $0 < q < 1$ และการดำรงอยู่ของผลเฉลยพิสูจน์ด้วยทฤษฎีจุดตรึงของบานาค

คำสำคัญ: อนุพันธ์เชิงเศษส่วน อนุพันธ์ q ทฤษฎีจุดตรึงของบานาค

ABSTRACT

In this article, the solution to q-Hilfer fractional difference equation with orders $0 < \alpha(t) < 1, 0 \le \beta \le 1$ and $0 < q < 1$ will be studied. The existence of solution is proved by Banach's fixed point theorem.

Keywords: Fractional derivative, q-derivative, Banach's fixed point theory

1. บทนำ

แคลคูลัสเชิงเศษส่วนถือเป็นสาขาหนึ่งในศาสตร์คณิตวิเคราะห์ที่แยกออกจากแคลคูลัสทั่วไปโดยมีการใช้อนุพันธ์และปริพันธ์ที่มีลำดับการดำเนินการที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ดังนั้นแคลคูลัสเชิงเศษส่วนเปรียบเสมือนส่วนขยายที่เข้ามาเติมเต็มการพิจารณาอนุพันธ์และปริพันธ์ที่มีลำดับการดำเนินการเป็นจำนวนเต็ม โดยที่อนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน $f(t)$ มีนิยามว่า

$$\frac{df}{dt} = Df(t) = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ในปี ค.ศ. 1695 Guillaume de L'Hôpital ได้ตั้งคำถามกับ Gottfried Wilhelm Leibniz เกี่ยวกับอนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน y ว่าจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อ $n = \frac{1}{2}$ ซึ่งนับเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาแคลคูลัสเชิงเศษส่วน ภายหลังปริพันธ์และอนุพันธ์เชิงเศษส่วนมีการให้นิยามหลายรูปแบบ โดยบทนิยามที่มีชื่อเสียงถูกนำเสนอโดย Riemann-Liouville, Caputo และ Hilfer

บทนิยาม 1.1 [1] กำหนดให้ $\alpha > 0$ ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย

$$I_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \ , t \ge a$$

โดย $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ สำหรับจำนวนจริง $z > 0$

บทนิยาม 1.2 [1] กำหนดให้ $n-1 < \alpha < n$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $D_{a,t}^{\alpha} f(t) = D^n I_{a,t}^{n-\alpha} f(t)$ โดยที่ $D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$

บทนิยาม 1.3 [1] กำหนดให้ $n-1 < \alpha < n$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Caputo ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $\mathrm{D}_{a,t}^{\alpha} f(t) = I_{a,t}^{n-\alpha} D^n f(t)$

บทนิยาม 1.4 [5] กำหนดให้ $n-1<\alpha<n$ และ $0\leq\beta\leq 1$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ α และ β นิยามโดย $\mathrm{D}_{a,t}^{\alpha,\beta}f(t)=I_{a,t}^{\beta(n-\alpha)}D^{n}I_{a,t}^{(1-\beta)(n-\alpha)}f(t)$

จะพบว่า กรณี $\beta=0$ บทนิยาม 1.4 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.2 และกรณี $\beta=1$ บทนิยาม 1.4 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.3

ในปี ค.ศ. 1909 Jackson [6] ได้นิยามอนุพันธ์ q ไว้ดังนี้

$$D_q f(t)=\frac{f(qt)-f(t)}{qt-t}, q\in\mathbb{R}$$

และปริพันธ์ q ได้นิยามดังนี้

$$I_q f(t)=\int_0^x f(t)d_q t=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} tq^n f(tq^n)$$

อนุพันธ์ q และ ปริพันธ์ q สามารถนิยามในเชิงเศษส่วนดังนี้

บทนิยาม 1.5 [8] กำหนดให้ $\alpha>0$ ปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย

$$I_{q,t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t (t-qs)^{(\alpha-1)}f(s)ds\ , t\geq 0$$

โดยที่ $(n-m)^{(k)}=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{n-mq^i}{n-mq^{i+k}}\ , n\neq 0, k\in\mathbb{R}$ กรณี $m=0$ ให้ $(n)^{(k)}=n^k$
และ $\Gamma_q(t)=\frac{(1-q)^{(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}, t\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$ กรณี $q=1$ ให้ $\Gamma_q(t)=\Gamma(t)$
เห็นได้อย่างชัดเจนว่า $\Gamma_q(t+1)=[t]_q\Gamma_q(t)$ เมื่อ $[k]_q=\frac{1-q^k}{1-q}\ , k\in\mathbb{R}$

บทนิยาม 1.6 [2] กำหนดให้ $n-1<\alpha<n$ อนุพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $D_{q,t}^{\alpha}f(t)=D_q^n I_{q,t}^{n-\alpha}f(t)$

บทนิยาม 1.7 [2] กำหนดให้ $n-1<\alpha<n$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Caputo ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $\mathrm{D}_{q,t}^{\alpha}f(t)=I_{q,t}^{n-\alpha}D_q^n f(t)$

จะสังเกตเห็นว่า เมื่อ $q=1$ อนุพันธ์ q และปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนก็คือ อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงเศษส่วนปกติ ในบทความนี้ ผู้เขียนจึงสนใจที่จะศึกษานิยามของอนุพันธ์แบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการ

ดำเนินการแปรผันตามเวลา เพื่อให้ได้นิยามที่เป็นรูปทั่วไปและครอบคลุมบทนิยามที่ผ่านมาให้ได้มากที่สุด

2. อนุพันธ์แบบ q-Hilfer

ในหัวข้อนี้ผู้เขียนได้แรงบันดาลใจมาจากนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Hilfer และอนุพันธ์ q ดังนั้นผู้เขียนจึงได้ให้นิยามของอนุพันธ์แบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ และ $q \in (0,1)$ ดังนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $\mu \in \mathbb{R}$ เซตย่อย A ของ $\mathbb{C}$ จะเรียกว่า μ-geometric หาก $\mu z \in A$ ตราบเท่าที่ $z \in A$

บทนิยาม 2.2 ฟังก์ชัน f ที่นิยามบนเซต A ที่เป็น q-geometric โดยที่ $0 \in A$ จะกล่าวว่าเป็น q-regular ที่ 0 เมื่อ $\lim_{n\to\infty} f(zq^n) = f(0)$ สำหรับทุก ๆ $z \in A$

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ $0 < \alpha < 1$ และ $0 \leq \beta \leq 1$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer นิยามโดย

$$D_{q,t}^{\alpha,\beta} f(t) = I_{q,t}^{\beta(1-\alpha)} D_q I_{q,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t) = I_{q,t}^{\gamma-\alpha} D_{q,t}^{\gamma} f(t)$$

เมื่อ $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$

จะพบว่า กรณี $\beta = 0$ บทนิยาม 2.3 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.6 กรณี $\beta = 1$ บทนิยาม 2.3 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.7 และกรณี $q = 1$ บทนิยาม 2.3 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.4

บทนิยาม 2.4 [2] สำหรับจำนวนจริง $p \geq 1$ ปริภูมิ $L_q^p(a,b)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันที่

$$\left(\int_a^b |f(t)|^p d_q t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

สำหรับ $p = 1$ เขียนแทน $L_q^p(a,b)$ ด้วย $L_q(a,b)$

บทนิยาม 2.5 [2] สำหรับจำนวนจริง $p > 0$ ปริภูมิ $\mathbb{L}_q^p[a,b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันทั้งหมดบนช่วง $(a,b]$ ปริภูมิ $\mathbb{L}_q^p[a,b]$ เป็นปริภูมิบานาคที่มี supremum norm $||.||_p$ โดยที่

$$||f||_p = \sup_{t\in(a,b]} \left(\int_a^b |f(t)|^p d_q t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

สำหรับ $p = 1$ เขียนแทน $\mathbb{L}_q^p[a,b]$ ด้วย $\mathbb{L}_q[a,b]$

บทนิยาม 2.6 [2] ปริภูมิ $C_q^{(n)}[a,b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ที่มีอนุพันธ์ q จนถึงลำดับการดำเนินการของอนุพันธ์ที่ $n-1$, $D_q^{n-1}f(t) \in C[a,b]$, ปริภูมิ $C_q^{(n)}[a,b]$ เป็นปริภูมิบานาคที่มี supremum norm $||.||$ โดยที่

$$||f|| = \sum_{k=0}^{n-1} \max_{t\in[a,b]} |D_q^k f(t)| < \infty$$

สำหรับ $n=1$ เขียนแทน $C_q^{(n)}[a,b]$ ด้วย $C_q[a,b]$ และสำหรับ $q=1$ เขียนแทน $C_q^{(n)}[a,b]$ ด้วย $C^{(n)}[a,b]$

บทนิยาม 2.7 ฟังก์ชัน f ที่นิยามบนช่วงปิด $[0,a]$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บนช่วง $[0,a]$ เมื่อ f เป็น q-regular ที่ 0 และมีค่าคงที่ $K>0$ ที่ทำให้

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left|f\left(tq^i\right)-f\left(tq^{i+1}\right)\right| \le K$$

สำหรับทุก ๆ $t \in (qa,a]$

บทนิยาม 2.8 [2] ให้ปริภูมิ $AC_q[a,b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $f \in AC_q[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ c และฟังก์ชัน $\varphi \in \mathbb{L}_q^p[a,b]$ ซึ่ง

$$f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)\, d_q s \,, t \in [a,b]$$

สำหรับ $q=1$ เขียนแทน $AC_q[a,b]$ ด้วย $AC[a,b]$

บทนิยาม 2.9 [2] ปริภูมิ $AC_q^{(n)}[a,b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ที่มีอนุพันธ์ q จนถึงลำดับการดำเนินการของอนุพันธ์ที่ $n-1$, $D_q^{n-1}f(t) \in AC_q[a,b]$

สำหรับ $q=1$ เขียนแทน $AC_q^{(n)}[a,b]$ ด้วย $AC^{(n)}[a,b]$

บทนิยาม 2.10 [4] ปริภูมิ $C_\gamma[a,b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ ซึ่ง

$$C_\gamma[a,b] = \{f:(a,b] \to \mathbb{R} \mid (t-a)^\gamma f(t) \in C[a,b]\}, 0 \le \gamma < 1$$

ที่มี norm $||.||_{C_\gamma}$ โดยที่

$$||f||_{C_\gamma} = ||(t-a)^\gamma f(t)||$$

และ

$$C_\gamma^n[a,b] = \left\{f \in C^{n-1}[a,b] \mid \ f^{(n)} \in C_\gamma[a,b]\right\}, n \in \mathbb{N}$$
$$C_\gamma^0[a,b] = C_\gamma \ [a,b]$$

ที่มี norm $||.||_{C_\gamma}$ โดยที่

$$||f||_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} ||f^{(k)}|| + ||f^{(n)}||_{C_\gamma}$$

และมีคุณสมบัติดังนี้

1. $C_0[a,b] = C[a,b]$
2. $C_\gamma^n[a,b] \subset AC^{(n)}[a,b]$
3. $C_{\gamma_1}[a,b] \subset C_{\gamma_2}[a,b]\,, 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < 1$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.11 [8] กำหนดให้ $\alpha, \beta \geq 0$ และ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[0,T]$ แล้ว ปริพันธ์ q และอนุพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville มีคุณสมบัติดังนี้

1. $I_{q,t}^{\alpha} I_{q,t}^{\beta} f(t) = I_{q,t}^{\alpha+\beta} f(t)$
2. $D_{q,t}^{\alpha} I_{q,t}^{\alpha} f(t) = f(t)$

ทฤษฎีบท 2.12 [2] กำหนดให้ $n-1 < \alpha < n$, $f \in \mathbb{L}_q[0,T]$ ที่ $I_{q,t}^{n-\alpha} f(t) \in AC_q^{(n)}[0,T]$ แล้ว

$$I_{q,t}^{\alpha} D_{q,t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} I_{q,t}^{1+i-\alpha} f(0) \frac{t^{\alpha-i-1}}{\Gamma_q(\alpha-i)}$$

โดยที่ $I_{q,t}^{1+i-\alpha} f(0) = \lim_{t\to 0^+} I_{q,t}^{1+i-\alpha} f(t)$

ทฤษฎีบท 2.13 [7] กำหนดให้ $\alpha \in (0,1), \beta \in [0,1]$, $f \in \mathbb{L}_q[0,T]$ ที่ $I_{q,t}^{1-\gamma} f \in AC_q[0,T]$ เมื่อ $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ แล้ว

$$I_{q,t}^{\alpha} D_{q,t}^{\alpha,\beta} f(t) = f(t) - I_{q,t}^{1-\gamma} f(0) \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}$$

สำหรับบทนิยามของอนุพันธ์แบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha(t) < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ และ $q \in (0,1)$ และปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา มีดังนี้

บทนิยาม 2.14 [7] กำหนดให้ $\alpha : [a,b] \to [0,\infty)$ ปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา นิยามโดย

$$I_{q,t}^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha(t))} \int_0^t (t-qs)^{(\alpha(t)-1)} f(s) d_q s$$

บทนิยาม 2.15 [7] กำหนดให้ $0 < \alpha(t) < 1$ และ $0 \le \beta \le 1$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา นิยามโดย

$$D_{q,t}^{\alpha(t),\beta} f(t) = I_{q,t}^{\beta(1-\alpha(t))} D_q I_{q,t}^{(1-\beta)(1-\alpha(t))} f(t)$$

จะเห็นได้ว่า กรณี $\alpha(t) = \alpha$ บทนิยาม 2.15 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 2.3

3. สมการผลต่างสืบเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา

กำหนดให้ $\gamma(t) = \alpha(t) + \beta - \alpha(t)\beta$ สมการผลต่างสืบเนื่องแบบไม่เชิงเส้นที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha(t) < 1$ และ $0 \le \beta \le 1$ อยู่ในรูป

$$D_{q,t}^{\alpha(t),\beta} x(t) = f\big(t, x(t)\big)\,, t \in (0,T]$$

$$I_{q,t}^{1-\gamma(t)} f(0) = c\,, c \in \mathbb{R}$$

ให้ $P = \{(T_0, T_1], (T_1, T_2], (T_1, T_2], \dots, (T_{N-1}, T_N]\}$ โดยที่ $T_0 = 0, T_N = T$ และ $P_k = (T_{k-1}, T_k]$ แทนช่วงย่อยที่ k ของ P และให้ $\alpha : (0,T] \to (0,1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

กำหนดให้ $\alpha^* : (0,T] \to (0,1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ที่แปรผันตาม P เรียก $\alpha^*(t)$ ว่า ฟังก์ชันการประมาณของ $\alpha(t)$ นิยามโดย

$$\alpha^*(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha(t_k) I_k(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k I_k(t) = \begin{cases} \alpha_1 & , t \in (T_0, T_1] \\ \alpha_2 & , t \in (T_1, T_2] \\ \alpha_3 & , t \in (T_2, T_3] \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \alpha_N & , t \in (T_{N-1}, T_N] \end{cases} \quad , t \in (0,T]\,, t_k \in P_k$$

โดยที่ $I_k(t)$ เป็นฟังก์ชันบ่งชี้บนช่วง P_k ซึ่งก็คือ $I_k(t) = 1$ สำหรับ $t \in P_k$ และ $I_k(t) = 0$ สำหรับ $t \notin P_k$ จะเห็นว่า $\alpha(t) = \lim_{N \to \infty} \alpha^*(t)$

ผลเฉลยจากการประมาณการในช่วงย่อย

กำหนดให้ $\gamma_k = \alpha_k + \beta - \alpha_k \beta$ จากทฤษฎีบท 2.13 จะได้ผลเฉลยในช่วงย่อยดังนี้

$$x_k(t) = I_{q,t}^{1-\gamma_k} x(0) \frac{t^{\gamma_k - 1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha_k - 1)} f(s, x_k(s)) d_q s \ , t \in P_k$$

ดังนั้นผลเฉลยโดยการประมาณ $x(t)$ สามารถเขียนได้ในรูปของผลรวมดังนี้

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} I_k(t)\, c \frac{t^{\gamma_k - 1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{I_k(t)}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha_k - 1)} f(s, x_k(s)) d_q s \ , t \in (0,T]$$

เมื่อ $N \to \infty$ จะได้ว่า

$$x(t) = c\frac{t^{\gamma(t)-1}}{\Gamma_q(\gamma(t))} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha(t))}\int_0^t (t-qs)^{(\alpha(t)-1)} f(s,x(s))d_qs$$

4. การมีอยู่จริงของผลเฉลย

ในหัวข้อนี้จะแสดงเงื่อนไขในการมีอยู่จริงของผลเฉลยโดยใช้ทฤษฎีจุดตรึงของบานาค

บทนิยาม 4.1 กำหนดให้ $Q : X \to X$ นิยาม $x^* \in X$ เป็นจุดตรึง ถ้า $Qx^* = x^*$

บทนิยาม 4.2 กำหนดให้ X เป็นปริภูมิบานาคที่มี supremum norm $||.||_X$ แล้ว $A : X \to X$ จะเรียกว่า การส่งแบบหดตัว ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $M \in [0,1)$ ซึ่งทำให้ $||Ax - Ay||_X \leq M||x-y||_X$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เรียกค่าคงที่ M ว่า ค่าคงตัวการหดตัว

ทฤษฎีบท 4.3 [3] กำหนดให้ X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ โดยที่ $X \neq \emptyset$ และให้ $Q : X \to X$ เป็นการส่งแบบหดตัวบน X จะได้ว่า การส่ง Q จะมีผลเฉลยเป็นจุดตรึงเพียงค่าเดียว

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ $f: J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f(t,u)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแบบ Lipshitz ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $M_f > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(t,u) - f(t,v)| \leq M_f|u-v|$ สำหรับทุก ๆ $u, v \in \mathbb{R}$ และ $t \in J$

ทฤษฎีบท 4.5 [7] สำหรับทุก ๆ $0 < q < 1$ และ $0 < \alpha(t) < 1$ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1-q)^{\alpha(t)} \leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha(t)+1)} < \left(\frac{1-q}{1-q^{\frac{\alpha(t)+1}{2}}}\right)^{\alpha(t)}$$

เรียกอสมการนี้ว่า อสมการ q-gamma

4.1 การมีอยู่จริงของผลเฉลยในปริภูมิ $\mathbb{L}_q[0,T]$

ทฤษฎีบท 4.6 [9] ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการผลต่างสืบเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา มีอยู่จริงใน $\mathbb{L}_q[0,T]$ ก็ต่อเมื่อ มี x_i ซึ่งเป็นผลเฉลยบนช่วงย่อย P_i นั่นคือ $x_i \in \mathbb{L}_q[0,T_i]$, $I_{q,t}^{1-\gamma_i}x_i(0) = c$ สำหรับ $i = 1,2,3,\ldots,N$

ทฤษฎีบท 4.7 [2] กำหนดให้ $f: (0,a] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f \in \mathbb{L}_q[0,a]$ แล้ว $I_{q,t}^{\alpha}f \in \mathbb{L}_q[0,a]$ และ $||I_{q,t}^{\alpha}f||_1 \leq \frac{a^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)}||f||_1$

ทฤษฎีบท 4.8 ผลเฉลย $x_k(t)$ มีอยู่จริง และเป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวใน $\mathbb{L}_q[0,T_k]$ เมื่อมีค่าคงที่การหดตัว $\frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_q(\alpha_k+1)} < 1$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ $k = 1,2,3,\ldots,N$ ให้ $Q : \mathbb{L}_q[0,T_k] \to \mathbb{L}_q[0,T_k]$ เป็นการส่งแบบหดตัว นิยามโดย $Qx_k = x_k$ จะได้ว่า

$$Qx_k(t) = I_{q,t}^{1-\gamma_k} x(0) \frac{t^{\gamma_k - 1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha_k - 1)} f(s, x_k(s)) d_q s$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} ||Qx_k - Qy_k||_1 &\leq M_f ||I_{q,t}^{\alpha_k} 1||_1 ||x_k - y_k||_1 \\ &\leq \frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_q(\alpha_k+1)} ||x_k - y_k||_1 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีจุดตรึงของบานาค ถ้ามี $\frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_q(\alpha_k+1)} < 1$ แล้ว จะมีผลเฉลย x_k เป็นจุดตรึงเพียงค่าเดียวใน $\mathbb{L}_q[0,T_k]$ □

4.2 การมีอยู่จริงของผลเฉลยในปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีการถ่วงน้ำหนัก $C_{1-\gamma}[0,T]$

ทฤษฎีบท 4.9 [9] ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการผลต่างสืบเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา มีอยู่จริงใน $C_{1-\gamma}[0,T]$ ก็ต่อเมื่อ มี x_i เป็นผลเฉลยจากช่วงย่อย P_i นั่นคือ $x_i \in C_{1-\gamma_i}[0,T_i]$, $I_{q,t}^{1-\gamma_i} x_i(0) = c$ สำหรับ $i = 1,2,3,\ldots,N$

ทฤษฎีบท 4.10 [2] กำหนดให้ $f: (0,a] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f \in C_\gamma[0,a]$ แล้ว $I_{q,t}^{\alpha} f \in C_\gamma[0,a]$ และ $||I_{q,t}^{\alpha} f||_{C_\gamma} \leq a^\alpha \frac{\Gamma_q(1-\gamma)}{\Gamma_q(\alpha+1-\gamma)} ||f||_{C_\gamma}$

ทฤษฎีบท 4.11 ผลเฉลย $x_k(t)$ มีอยู่จริง และเป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวใน $C_{1-\gamma_k}[0,T_k]$ เมื่อมีค่าคงที่การหดตัว $\frac{M_f T_k \Gamma_q(\gamma_k)}{\Gamma_q(\alpha_k+\gamma_k)} < 1$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ $k = 1,2,3,\ldots,N$ ให้ $Q : C_{1-\gamma_k}[0,T_k] \to C_{1-\gamma_k}[0,T_k]$ เป็นการส่งแบบหดตัว นิยามโดย $Qx_k = x_k$ จะได้ว่า

$$Qx_k(t) = I_{q,t}^{1-\gamma_k} x(0) \frac{t^{\gamma_k - 1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha_k - 1)} f(s, x_k(s)) d_q s$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} ||Qx_k - Qy_k||_{C_{1-\gamma_k}} &\leq M_f ||I_{q,t}^{\alpha_k} 1||_{C_{1-\gamma_k}} ||x_k - y_k||_{C_{1-\gamma_k}} \\ &\leq \frac{M_f T_k \Gamma_q(\gamma_k)}{\Gamma_q(\alpha_k+\gamma_k)} ||x_k - y_k||_{C_{1-\gamma_k}} \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีจุดตรึงของบานาค ถ้ามี $\frac{M_f T_k \Gamma_q(\gamma_k)}{\Gamma_q(\alpha_k+\gamma_k)} < 1$ แล้ว จะมีผลเฉลย x_k เป็นจุดตรึงเพียงค่าเดียวใน $C_{1-\gamma_k}[0,T_k]$ $\square$

5. ตัวอย่างประกอบ

พิจารณาสมการผลต่างสืบเนื่องเชิงเศษส่วนต่อไปนี้

$$D_{\frac{1}{3},t}^{\frac{1}{5}\sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right),\frac{1}{2}} x(t) = \frac{x(t)}{20(x^2(t)+1)}, t \in (0,1]$$

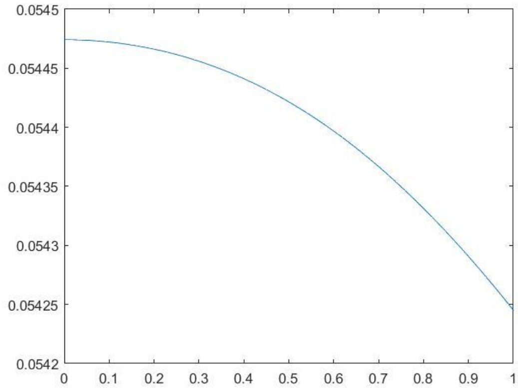
$$I_{\frac{1}{3},t}^{1-\gamma(t)} f(0) = 0, \gamma(t) = \frac{1}{10}\sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}$$

เห็นได้ชัดว่า $M_f = \frac{1}{20}$ จาก $T_k \leq 1$ จะได้ว่า $\frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha_k+1)} < \frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha_k+1)}$

จากทฤษฎีบท 4.11 หาก $\frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha_k+1)} < 1$ แล้ว ผลเฉลยย่อย x_k จะมีอยู่จริงใน $\mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0,T_k]$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก α_k เป็นค่าคงที่ ซึ่งประมาณจาก $\alpha(t) = \frac{1}{5}\sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ ดังนั้นหากสามารถแสดงได้ว่า $\frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha(t)+1)} < 1$ โดยที่ $t \in (0,1]$ ก็จะได้ว่า ผลเฉลยบน $\mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0,T_k]$ ใดๆ มีอยู่จริง ในตัวอย่างนี้ เมื่อปรับใช้อสมการในทฤษฎีบท 4.5 เมื่อ $t \in (0,1]$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha(t)+1)} < \frac{1}{20}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}\sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{10}\sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}\sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} < 1$$



รูปที่ 5.1 รูปกราฟสำหรับแสดงค่าฟังก์ชัน (กลาง) จากอสมการข้างต้น เมื่อ $t \in (0,1]$

ดังนั้นผลเฉลยย่อย $x_k \in \mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0,T_k]$, $I_{\frac{1}{3},t}^{1-\gamma_k} x_k(0) = 0$ สำหรับ $k = 1,2,3,\ldots,N$ มีอยู่จริง

จากทฤษฎีบท 4.6 ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการตัวอย่างมีอยู่จริงใน $\mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0,1]$ ตามต้องการ

เอกสารอ้างอิง

[1] Almeida, R., Tavares, D. and Torress, D. F. M. (2018). *The Variable-Order Fractional Calculus of Variations*. New York: Springer International Publishing.

[2] Annaby, M. H. and Mansour, Z. S. (2012). *q-Fractional Calculus and Equations.* Berlin: Springer.

[3] Borisut, P., Khammahawong, K. and Kumam, P. (2018). *Fixed Point Theory Approach to Existence of Solutions with Differential Equations.* London: IntechOpen.

[4] Furati, K. M., Kassim, M. D. and Tatar, N.e-. (2012). Existence and Uniqueness for A Problem Involving Hilfer Fractional Derivative. *Computers & Mathematics with Applications,* 64 (6), p. 1616 – 1626.

[5] Hilfer, R. (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World of Scientific.

[6] Jackson, FH. (1909). On q-functions and A Certain Difference Operator. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh.* 46 (2), p. 253 – 281.

[7] Limpanukorn, N., Ahmed, I. and Ibrahim, M. J. (2021). Uniqueness of Continuous Solution to q-Hilfer Fractional Hybrid Integro-difference Equation of Variable Order. *Journal of Mathematical Analysis and Modeling*. 2 (3), p. 88 – 98.

[8] Tariboon, J., Ntouyas, S. K. and Agarwal, P. (2015). New Concepts of Fractional Quantum Calculus and Applications to Impulsive Fractional q-difference Equations. *Advances in Difference Equations,* 18(2015). https://doi.org/10.1186/s13662-014-0348-8

[9] Zhang, S., Wang, J. and Hu, L. (2021). On Definition of Solution of Initial Value Problem for Fractional Differential Equation of Variable Order. *AIMS Mathematics*, 6 (7), p. 6845 – 6867.