CHAPTER 1 INTRODUCTION

ความเป็นมาหรือหลักการและเหตุผล

การหาระเบียบวิธีต่างๆที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบนั้นจึงเป็นหัวข้อที่มีนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งจำนวนมากให้ความสนใจศึกษา เมื่อศึกษาการมีคำตอบของสมการต่างๆแล้ว ปัญหาที่น่าสนใจต่อไปก็คือ เราจะหาคำตอบของสมการต่างๆนั้นได้อย่างไร คำถามดังกล่าวนี้ก็ทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจศึกษา คิดค้นระเบียบวิธีการกระทำซ้ำของจุดตรึง(fixed-point iterations) ต่างๆที่ใช้ในการหาคำตอบ และ ประมาณคำตอบ เพื่อนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาในเรื่องของสมการตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น (nonlinear operator equations) ในเรื่องของแก้ปัญหาอสมการแปรผัน (variational inequality problem (VIP)) และแก้สมการหาคำตอบของปัญหาดุลภาพ(equilibrium problems (EP)) ปัญหาที่ดีที่สุด(optimizations problems) ปัญหาน้อยที่สุด (minimizations problems) ทั้งในปริภูมิฮิลเบิตร์และปริภูมิบานาค ซึ่งปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาที่สำคัญที่มีประโยชน์มากมายในสาขาวิชาต่างๆ เช่นสาขาวิชาฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ประยุกต์วิศวกรรม และสาขาทางเศรษฐศาสตร์

จากความสำคัญข้างต้นเป็นผลให้นักคณิตศาสตร์จึงได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง ซึ่งการวิจัยเกี่ยวกับการกระทำซ้ำของจุดตรึงและการประมาณค่าจุดตรึงที่สำคัญนั้นสามารถนำมาแก้สมการหาคำตอบของปัญหาดุลภาพ เช่นใน ปี 1997 Combettes และ Hirstoaga ได้เริ่มต้นศึกษาและใช้วิธีการทำซ้ำในการหาการประมาณค่าที่ดีที่สุดเพื่อแก้ปัญหาดุลภาพ และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม (strong convergence theorems) และมีนักคณิตศาสตร์อีกมากมายนำทฤษฎีบทการทำซ้ำดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการแก้อสมการแปรผัน

ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับการกระทำซ้ำของจุดตรึงและ ทฤษฎีการลู่เข้าดังกล่าวข้างต้น องค์ความรู้ใหม่ที่คาดว่าจะได้รับ คือ ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆเกี่ยวกับทฤษฎีบทและการประมาณค่าการลู่เข้าของการกระทำซ้ำของจุดตรึงร่วมสำหรับวงค์นับได้ และการประยุกต์หาคำตอบของปัญหาดุลภาพ และ ปัญหาอสมการแปรผัน ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ที่ได้ข้างต้นนั้นจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้องที่ได้กล่าวมาข้างต้นอันจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศต่อไป

วัตถุประสงค์

เป้าหมายหลักของโครงการอยู่ที่การสร้างองค์ความรู้ใหม่และการขยายขอบเขตองค์ความรู้เดิมให้กว้างขวางยิ่งขึ้นกว่าเดิมตามรายละเอียดดังนี้

1 สร้างองค์ความรู้ใหม่และคิดค้นทฤษฎี เกี่ยวกับ การมีจุดตรึง และการสร้างระเบียบกระบวนทำซ้ำแบบใหม่เพื่อให้ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบเข้ม

2 นำทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ที่คิดค้นมาประยุกต์ในการหาคำตอบการประมาค่าที่ดีที่สุดของปัญหาดุลภาพ (equilibrium problems (EP)) และหาคำตอบของอสมการแปรผัน (variational inequality)

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ตีพิมพ์งานวิจัยในวารสารที่มีการตรวจสอบต้นฉบับอย่างเข้มงวด (Peer-Reviewed Journal) และอยู่ในฐานข้อมูลสากล อย่างน้อย 1 บทความ ต่อปี
2. นำผลทฤษฎี องค์ความรู้ใหม่ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในปัญหาไม่เชิงเส้น
3. นำผลลัพธ์ที่ได้มาประยุกต์ในปัญหาดุลภาพและแก้ปัญหาที่ดีที่สุดซึ่งเป็นปัญหาทางด้านการวิจัยดำเนินงาน (Operation Research) และ ปัญหาที่ดีที่สุด (Optimization problems)

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้ผู้วิจัยจะศึกษาเฉพาะในปริภูมิบานาค และปริภูมิฮิลเบิร์ต เท่านั้น

ทฤษฎี สมมุติฐาน (ถ้ามี) และกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย

สำหรับโครงการวิจัยที่นำเสนอนี้ผู้วิจัยจะพิสูจน์ทฤษฎีบทและกระบวนการทำซ้ำดังต่อไปนี้

<u>ประเด็นที่ แรก</u> นิยามกระบวนการการทำซ้ำ ต่อไปนี้

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n P_C (x_n - \lambda_n A x_n)$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathrm{N}$ เมื่อ $x_0 = x \in C,\ \alpha_n \in (0,1)$, $\lambda_n \in (0, 2\alpha)$ และ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชัน การส่งแบบไม่ขยายไปตัวเอง บน C , $P_C : H \to C$ เป็น metric projection และ $A : C \to H$ เป็น $\alpha-$inverse-strongly monotone จะพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าแบบอ่อนที่เป็นวงค์นับได้ ของการส่งแบบไม่ขยาย ของจุดตรึงร่วม $F(S) \cap VI(A,C)$ ซึ่งจะคลุมทฤษฎีบทและขยายองค์ความรู้เดิมที่มีอยู่ ตลอดจนนำมาหาคำตอบของปัญหา $EP(F)$ และ $VIP(A,C)$ และกระบวนการการทำซ้ำนี้ $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) S_n P_c (u_n - \lambda_n A u_n),\ n \geq 1$ สำหรับวงค์นับได้ ของการส่งแบบไม่ขยาย เมื่อ f เป็นการส่งแบบหด (contraction mapping) จะพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบเข้ม

<u>ประเด็นที่ ที่สอง</u> จะพิสูจน์และประมาณค่าจุดตรึงร่วมของวงศ์นับได้ของการส่งแบบไม่ขยายของการการทำซ้ำ ต่อไปนี้

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ is arbitrary}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n P_C (x_n - \lambda_n A x_n), \\ C_n = \{ z \in C : \| y_n - z \| \le \| x_n - z \| \}, \\ Q_n = \{ z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \ge 0 \}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n \cap VI(C,A)} x_{0,\ n=1,2,...,} \end{cases}$$

เมื่อ $P_C : H \to C$ เป็น metric projection นั่นคือจะ พิสูจน์ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in F(T) \cap VI(C,A) \cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(T) \cap VI(C,A) \cap EP(F)} x_0$

ซึ่งทั้งสองประเด็นนี้เป็นองค์ความรู้ใหม่ และระเบียบวิธีใหม่ ซึ่งคลุมองค์ความรู้เดิมที่กล่าวมาตั้งแต่ต้น ซึ่งงานวิจัยนี้ผลที่ได้จากการศึกษาและพิสูจน์ คือทฤษฎีบทการประมาณค่าและทฤษฎีบทการลู่เข้าของการทำซ้ำจุดตรึงของการส่งไม่ขยายและสร้างกระบวนการการทำซ้ำจุดตรึงใหม่ของการส่งแบบไม่ขยาย ซึ่งเป็นการขยายองค์ความรู้เดิม สร้างองค์ความรู้ใหม่และสร้างระเบียบวิธีใหม่ในเรื่องนี้

ทฤษฎีองค์ความรู้ใหม่ต่างๆเหล่านั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการประมาณคำตอบของสมการหรือของปัญหาต่างๆมากมายดูเพิ่มเติมได้ที่[6,7,13-15,19-23] เช่น Control Theory, Economics, Game Theory, Approximation Theory, Optimizations Problems , Minimizations Problems, Operation research

สำหรับการศึกษางานที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจุดตรึงนั้นมีอยู่ สองประเด็นดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับการทำซ้ำจุดตรึง (fixed point iterations) ซึ่งมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มใหญ่ที่สนใจปัญหา การสร้างการทำซ้ำ สำหรับประมาณค่าจุดตรึง ในปี คศ. 1953 Mann [14] ได้ศึกษาการมีจุดตรึงของทุก ๆ การส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ในปริภูมิบานาคที่เป็น uniformly convex และได้สร้างระเบียบวิธีการกระทำซ้ำที่รู้จักกันในนามของ Mann iterative scheme ต่อมาในปี 1974 Ishikawa [13] ได้สร้างระเบียบวิธีการทำซ้ำที่รู้จักกันดีต่อมาว่า Ishikawa iterative scheme และ ต่อมาก็มีการใช้ระเบียบวิธีทั้งสองแบบเพื่อหาจุดตรึงของการส่งอย่างกว้างขวางโดยใช้ลำดับที่สร้างจากระเบียบวิธีนั้นๆ

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบร์ตค่าจริง และ C เป็นเซตปิดนูน(closed convex) เซตย่อยของ H การส่ง $A : C \to H$ จะเรียกว่าการส่งทางเดียว (monotone mapping) ถ้า

$$\langle Au, Av \rangle \ge 0, \quad \forall u, v \in C.$$

ปัญหาอสมการแปรผัน (variational inequality problem (VIP)) คือการหา $u_0 \in C$ ซึ่งทำให้อสมการต่อไปนี้จริง

$$\langle Au_0, u - u_0 \rangle \ge 0, \quad \forall u \in C.$$

เซตคำตอบของปัญหาอสมการแปรผันเราแทนด้วย $VI(C,A)$ การส่ง $A : C \to H$ เป็น α -inverse-strongly monotone ถ้ามีจำนวนจริงบวก α ซึ่งทำให้

$$\langle Au-Av,u-v\rangle \geq \alpha \|Au-Av\|^2,$$

สำหรับทุกๆ $u,v \in C$ และเรียก $T:C \to C$ ว่าการส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ถ้า

$$\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$$

สำหรับทุกๆ $x,y \in C$ ในปี 1976 Halpern [6] ได้เริ่มต้นศึกษาการทำซ้ำของการประมาณค่าจุดตรึงของ T โดยนิยาม $x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad \forall n \in \mathbf{N},$

เมื่อ $x_1 = x \in C$ และ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงใน $[0,1]$ กระบวนการทำซ้ำนี้เรียกว่า การทำซ้ำฮาลเพิร์น (Halpern iteration) ต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์อีกมากมายได้ศึกษาและพิสูจน์การลู่เข้าแบบเข้มของการทำซ้ำนี้ เช่น Wittmann [27] ศึกษาในปริภูมิฮิลแบร์ต และต่อมา Shioji และ Takahashi [22] ได้ขยายผลลัพธ์ของ Wittmann ซึ่งพวกเขาได้พิสูจน์การลู่เข้าแบบเข้มของการทำซ้ำฮาลเพิร์น ในปริภูมิบานาค

ปัญหาดุลภาพ (equilibrium problems (EP)) สำหรับฟังก์ชัน $F: C \times C \to \mathbf{R}$ คือหา $x \in C$ ซึ่งทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$F(x,y) \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

เซตคำตอบของปัญหาดุลภาพ ข้างบนนี้เราจะเขียนแทนด้วย $EP(F)$

กำหนดการส่ง $T: C \to H$ ให้ $F(x,y) = \langle Tx, y-x\rangle$ สำหรับทุกๆ $x,y \in C$ แล้วจะได้ว่า $z \in EP(F)$ ก็ต่อเมื่อ $\langle Tz, y-z\rangle \geq 0, \forall y \in C.$ นั่นคือ z เป็นคำตอบของอสมการแปรผัน เราสามารถแปลงปัญหาดุลภาพ เป็นปัญหาจุดตรึง (fixed point problems) ได้ นั่นคือ มี $T: C \to C$ ที่ทำให้ $EP(F) = F(T)$ เมื่อ $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ คือเซตจุดตรึงของ T นั่นเอง

ในปี 1997 Combettes และ Hirstoaga [5] ได้เริ่มต้นศึกษาและใช้วิธีการทำซ้ำในการหาการประมาณค่าที่ดีที่สุดเพื่อไปหาคำตอบ (solutions) ให้กับปัญหาดุลภาพ และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม และมีนักคณิตศาสตร์อีกมากมาย นำทฤษฎีบทการทำซ้ำดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาอสมการแปรผัน

Nakajo and Takahashi [17] ได้ปรับปรุงวิธีการการทำซ้ำของมานดังนี้

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ is arbitrary}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n Tx_n), \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_{0,\ n=1,2,\ldots} \end{cases}$$

เมื่อ $P_C : H \to C$ เป็น metric projection

และ Takahashi และ Toyoda [25] ได้ศึกษากระบวนการทำซ้ำต่อไปนี้

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

สำหรับทุกๆ $n = 0,1,2,...,$ เมื่อ $x_0 = x \in C,\ \alpha_n \in (0,1)$, $\lambda_n \in (0, 2\alpha)$ และ S เป็นการส่งแบบไม่ขยายไปยังตัวเองบน C, $P_C : H \to C$ เป็น metric projection และ $A : C \to H$ เป็น $\alpha -$ inverse-strongly monotone

ซึ่งการหาเซตคำตอบร่วมของ $F(T) \cap VI(C, A)$ Takahashi และ Toyoda ก็ได้พิสูจน์การลู่เข้าแบบอ่อนในปริภูมิฮิลแบร์ต และ Iiduka and Takahashi [12] ก็ได้พิสูจน์การลู่เข้าแบบเข้มในปริภูมิฮิล แบร์ตของการทำซ้ำนี้

อีกทางหนึ่งการหาเซตคำตอบร่วมของ $EP(F) \cap F(T)$ Takahashi และ Takahashi [26] ก็ได้ศึกษาวิธีการประมาณแบบหน่วง (viscosity approximation method) ในปริภูมิฮิลแบร์ตนิยามโดย $x_1 \in H$ และ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \dfrac{1}{rn}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0,\ \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) T u_n \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbf{N}$ เมื่อ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ และ $\{r_n\} \subset (0, \infty)$

ซึ่งได้พิสูจน์ว่า $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in F(T) \cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(T) \cap EP(F)} f(z)$

ในปี 2007 Yongfu Su, Meijuan Shang, Xiaolong Qin [32] ได้แนวคิดจากข้างบนได้นิยาม การทำซ้ำใหม่ดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \dfrac{1}{rn}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0,\ \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) TP_c(u_n - \lambda_n A u_n),\ n \geq 1 \end{cases}$$

สำหรับการหาคำตอบร่วมของเซตจุดตรึง ของการส่งแบบไม่ขยาย เซตคำตบของอสมการแปรผัน $(VIP(A, C))$ สำหรับ $\alpha -$ inverse-strongly monotone และ เซตคำตอบของปัญหาดุลภาพ ($EP(F)$) ในปริภูมิฮิลแบร์ตและได้พิสูจน์ว่า $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in F(T) \cap VI(C, A) \cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(T) \cap VI(C,A) \cap EP(F)} f(z)$

ล่าสุดในปีนี้นี้ รองศาสตราจารย์ สมยศ พลับเที่ยง และรัตนาพร พันแพง [21] ได้ศึกษากระบวนการทำซ้ำนี้ $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ สำหรับทุกๆ $n = 0,1,2,...$ และได้พิสูจน์การลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงซึ่งเป็นคำตอบของปัญหา $EP(F)$ และ $VIP(A, C)$

ในปีเดียวกันนี้ Aoyama, Kimura, Takahashi and Toyoda [1] ได้ศึกษาการปะมาณค่าจุดตรึงร่วมของวงศ์นับได้(Countable family) ของ $\{T_n\}$ การส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาคที่นิยามลำดับ $\{x_n\}$ โดย $x_1 \in C$ และ $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T_n x_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbf{N}$, เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0,1)$ และภายใต้เงื่อนไขของปริภูมิและพังก์ชันบางอย่าง

ต่อมา Nilsrakool และ Saejung [18] ได้ศึกษาและพิสูจน์การลู่เข้าแบบอ่อน และแบบเข้มของ Lipschitzian นับได้ของการทำซ้ำของมาน Mann [14] ซึ่งนิยามโดยข้างบนนี้ (โดย Aoyama, Kimura, Takahashi and Toyoda [1]) และประยุกต์สู่ ปัญหา $EP(F)$ และ $VIP(A,C)$

ซึ่งการประมาณค่าจุดตรึงร่วมของวงศ์นับได้ ของการส่งแบบไม่ขยายนี้จะ คลุมในกรณีทั่วๆไป กว่าแบบการส่งเดี่ยว

ซึ่งทฤษฎีเหล่านี้ทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ได้นำไปใช้ในการหาคำตอบของปัญหาต่างๆมากมาย