การประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k กรณีไม่มีซ้ำ

กนิฏฐา ลาภาพงศ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
คณะสถิติประยุกต์
สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
2559

การประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k กรณีไม่มีซ้ำ

กนิฏฐา ลาภาพงศ์

คณะสถิติประยุกต์

รองศาสตราจารย์.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล)

รองศาสตราจารย์.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาแล้วเห็นสมควรอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)

รองศาสตราจารย์.....ประธานกรรมการ

(ดร.เสาวณิต สุขภารังษี)

รองศาสตราจารย์.....กรรมการ

(ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล)

รองศาสตราจารย์.....กรรมการ

(ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช)

อาจารย์.....กรรมการ

(ดร.วัชรีภรณ์ ไชยมงคล)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์.....คณบดี

(ดร.สุเทพ ทองงาม)

กุมภาพันธ์ 2560

บทคัดย่อ

ชื่อวิทยานิพนธ์	การประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k กรณีไม่มีซ้ำ
ชื่อผู้เขียน	นางสาวกนิฏฐา ลาภาพงศ์
ชื่อปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ปีการศึกษา	2559

ในการศึกษานี้ ได้เสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย 1 ค่า 5 วิธี ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ที่ไม่มีการทำซ้ำ โดยวิธีที่ 1 ใช้ผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด วิธีที่ 2 ใช้การทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด วิธีที่ 3 ใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ วิธีที่ 4 ใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด และวิธีที่ 5 ใช้สัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง จากการเปรียบเทียบมาตรวัด 3 ตัว คือ ร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าประมาณของข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ โดยใช้ตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 , 2^3และ 2^4 ในกรณีที่ไม่มีและมีข้อมูลสูญหาย พบว่า วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงให้ค่าประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับข้อมูลที่ไม่มีการสูญหายมากที่สุด

ABSTRACT

Title of Thesis	Estimating Missing Data in Unreplicated 2^k Factorial Experiments
Author	Miss Kanidta Laphaphong
Degree	Master of Science (Applied Statistics)
Year	2559

In this study, five estimation methods for one missing data in unreplicated 2^k factorial experiments are proposed. The first method is minimizing sum squared the highest order interaction, the second is minimizing coefficient of variation, the third is using the mean of non-missing data, the forth is using the mean of the nearest position of missing data and the fifth is based on the change proportion. From the comparison of 3 measurement criteria: the absolute percentage relative error of the estimate, sum squared and estimates of factorial effects, by using 2^2, 2^3 and 2^4 factorial experiments, it can be concluded that the change proportion method gives the best estimator in all cases.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความช่วยเหลือเป็นอย่างดียิ่งจาก รศ.ดร. วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก และ รศ.ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่กรุณาสละเวลาให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษาแนะนำ ตลอดจนติดตามความคืบหน้าในการจัดทำวิทยานิพนธ์ในทุกขั้นตอน คอยแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ ผู้เขียนขอบกราบขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณท่านคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้แก่ รศ.ดร.เสาวณิต สุขภารังษี และ อ.ดร.วัชรีภรณ์ ไชยมงคล ที่สละเวลาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ช่วยให้คำแนะนำตลอดจนตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านของคณะสถิติประยุกต์ ที่ได้ถ่ายทอดวิชาความรู้อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งแก่ผู้เขียน รวมถึงเจ้าหน้าที่คณะสถิติประยุกต์ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือในการติดต่อ ประสานงานในเรื่องต่างๆ

ท้ายสุด ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณและมอบความสำเร็จนี้แด่ นายนรนฤทธิ์ และนางนิลวรรณ ลาภาพงศ์ ผู้ซึ่งเป็นคุณพ่อและคุณแม่ของผู้เขียน รวมถึงคนในครอบครัวของผู้เขียนทุกคน ที่คอยให้การสนับสนุน และเป็นแรงบันดาลใจอันสำคัญยิ่งตลอดมาจนประสบผลสำเร็จตามที่ตั้งใจ

กนิฏฐา ลาภาพงศ์

กุมภาพันธ์ 2560

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ **(3)**

ABSTRACT **(4)**

กิตติกรรมประกาศ **(5)**

สารบัญ **(6)**

สารบัญตาราง **(8)**

บทที่ 1 บทนำ **1**

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2

1.3 ขอบเขตของการวิจัย 3

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย 3

1.5 นิยามศัพท์ 3

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง **5**

2.1 การทดลองแฟกทอเรียล 2^k 5

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 9

บทที่ 3 วิธีการดำเนินงาน **13**

3.1 วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายที่ได้จากแนวคิดพื้นฐานต่างๆ 13

3.2 วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายที่นำเสนอ 33

3.3 มาตรที่ใช้ในการเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหาย 40

บทที่ 4 ตัวอย่างผลการวิเคราะห์ **41**

4.1 ตัวอย่างข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^k 41

4.2 การประมาณค่าข้อมูลสูญหาย 43

4.3 ผลการเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยด้วยค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 46

บทที่ 5 สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ **54**

5.1 สรุปและอภิปรายผลการศึกษา 54

5.2 ข้อเสนอแนะ 56

บรรณานุกรม **57**

ภาคผนวก **59**

การประมาณค่าข้อมูลสูญหาย 60

ประวัติผู้เขียน **89**

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

2.1 ผังข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 ที่ไม่มีซ้ำ 5

2.2 การคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ วิธีของเยสท์ 8

3.1 ผังข้อมูลและรูปแบบการประมาณค่าสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 15

3.2 ผังข้อมูลและรูปแบบการประมาณค่าสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 18

3.3 ผังข้อมูลและรูปแบบการประมาณค่าสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 26

3.4 ผังข้อมูลแสดงตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลอยู่ใกล้ที่สุด 3 ค่า 32

3.5 ผังข้อมูลแสดงตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลอยู่ใกล้ที่สุด 5 ค่า 32

4.1 ผังข้อมูลตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 41

4.2 ผังข้อมูลตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 42

4.3 ผังข้อมูลตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 42

4.4 ค่าประมาณข้อมูลสูญหายและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 46

4.5 ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าของข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 48

4.6 ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าของข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 49

4.7 ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าของข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 50

4.8 ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 51

4.9 ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริง และค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 52

4.10 ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริง และค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 53

5.1 ค่าประมาณข้อมูลสูญหายในตำแหน่งเดียวกับวิธีของ Qumsiyeh และ Kirchner ที่ประมาณด้วยวิธีต่างๆ 55

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

การวางแผนการทดลอง เป็นการค้นหาคำตอบของการทดลองด้วยวิธีที่มีแบบแผน โดยมีการกำหนดวัตถุประสงค์หรือสมมติฐานบางอย่าง เพื่อต้องการศึกษาค้นคว้าหาความรู้ความเข้าใจใหม่ๆ โดยทำการหาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยกับผลลัพธ์ทั้งหมดของการทดลองนั้นๆ ในปัจจุบันการวางแผนการทดลองจึงเป็นที่นิยมและนำมาใช้ในงานวิจัยกันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะทางด้านเกษตรกรรม ด้านอุตสาหกรรม ด้านการแพทย์ ด้านการตลาด ด้านสังคมศาสตร์ เป็นต้น ดังนั้นการทดลองจึงมีความสำคัญต่อการทดลองเป็นอย่างมาก ซึ่งการใช้การทดลองที่เหมาะสมนั้นจะช่วยลดขนาดของความคลาดเคลื่อนในการทดลอง (Experimental Error) ให้น้อยลงได้ นอกจากนี้จะช่วยให้ผู้ทำการทดลองสามารถศึกษาถึงอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ที่ สำคัญ ๆ อย่างมีเป้าหมายและชัดเจนมากขึ้น (จิราวัลย์ จิตรถเวช, 2552: 1)

โดยปกติการวิเคราะห์การทดลองนั้น จะใช้ข้อมูลที่มีความครบถ้วนสมบูรณ์ แต่ในทางปฏิบัติอาจพบการสูญหายของข้อมูลในระหว่างการทดลองซึ่งอาจมีสาเหตุจากหลายประการ บางการทดลองไม่สามารถทำการทดลองใหม่ได้ เนื่องจากใช้เวลานาน ใช้งบประมาณและทรัพยากรจำนวนมาก อาจแก้ปัญหาโดยการตัดข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ออก เก็บข้อมูลเพิ่มเติม การดำเนินงานด้วยวิธีดังกล่าว ทำให้การวิเคราะห์ของการทดลองอาจก่อให้เกิดปัญหาทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ข้อมูลได้ ขาดความแม่นยำ เนื่องจากข้อมูลของการทดลองที่เหลืออยู่อาจมีจำนวนน้อยกว่าที่วางแผนไว้ ทำให้สูญเสียรายละเอียดของข้อมูลบางตัวไป และอาจทำให้ได้ค่าประมาณที่ได้มีความเอนเอียงมาก หากหน่วยที่ทิ้งไปแตกต่างจากข้อมูลที่เหลืออยู่มาก ทำให้การประมาณค่าขาดความน่าเชื่อถือได้ ดังนั้น การประมาณค่าของข้อมูลสูญหายจึงมีความสำคัญมาก (ประชุม สุวัตถี, 2552: 518)

การทดลองแฟกทอเรียล (Factorial Experiment) เป็นวิธีการทดลองที่ศึกษาปัจจัยหลายปัจจัยได้ภายในการทดลองครั้งเดียว นอกจากนี้ยังสามารถให้ข้อมูลเกี่ยวกับอิทธิพลร่วม (Interaction Effect) ระหว่างปัจจัยเหล่านั้นอีกด้วย ซึ่งการทดลองแฟกทอเรียลมีทั้ง 2 ปัจจัย , 3

ปัจจัย เป็นต้น อาจมีการทำซ้ำมากกว่า 1 ซ้ำก็ได้ แต่ในกรณีไม่มีการทำซ้ำ การวิเคราะห์การทดลองแฟกทอเรียล 2^k จะไม่สามารถประมาณค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนได้ โดยส่วนใหญ่นิยมใช้ค่าผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุด (Highest Order Interaction) มาประมาณค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Montgomery, 2001: 245) เพราะอิทธิพลร่วมอันดับที่สูงกว่านั้นมีความสำคัญน้อยกว่าอิทธิพลร่วมอันดับที่ต่ำกว่า และเมื่ออิทธิพลร่วมมีนัยสำคัญ จะส่งผลให้อิทธิพลของปัจจัยหลักนั้นมีนัยสำคัญอีกด้วย (Wu and Hamada, 2000: 112) การเกิดข้อมูลสูญหายในการทดลองดังกล่าวจะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ได้ จึงจำเป็นต้องประมาณค่าข้อมูลสูญหาย เพื่อให้มีข้อมูลครบถ้วน สามารถคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยได้

Draper และ Stoneman (1964: 443-458) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k และ 2^{k-p} กรณีไม่มีการทำซ้ำ ที่มีค่าสูญหาย 1 ค่า จากการหาผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุด โดยกำหนดให้คอนทราสท์ (Contrast) มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการเพื่อให้ได้ค่าข้อมูลสูญหายที่ต้องการ

Qumsiyeh และ Kirchner (2011: 131-147) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k และ 2^{k-p} กรณีไม่มีการทำซ้ำ ที่มีค่าสูญหาย 1 ค่า โดยการใช้ค่าสังเกตทั้งหมดที่มีทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น $k-1$ ระดับ ของค่าข้อมูลที่สูญหาย มาคำนวณหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย เพื่อใช้แทนค่าข้อมูลสูญหาย

งานวิจัยนี้ต้องการเสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k กรณีไม่มีการทำซ้ำ ที่มีค่าสูญหาย 1 ค่า เพื่อให้สามารถคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ได้ และเปรียบเทียบมาตรวัด 3 ตัว คือ ร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าประมาณของข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1) เพื่อเสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k

2) เพื่อให้สามารถคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ได้

3) เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายที่ได้จากวิธีที่นำเสนอในแต่ละวิธี

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1) ศึกษาการประมาณค่าข้อมูลสูญหายภายใต้การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 2^3และ 2^4 ในกรณีไม่มีซ้ำ ที่มีค่าสูญหายเกิดขึ้น 1 ค่า

2) กำหนดให้สามารถประมาณค่าข้อมูลสูญหายได้ทุกตำแหน่งที่มีการสูญหาย

3) ศึกษาค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่าง ๆ ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k โดยใช้วิธีของเยทส์

4) วิธีการประมาณค่าสูญหายที่ได้จากแนวคิดพื้นฐานต่างๆและวิธีที่นำเสนอ มีดังนี้

1. วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด
2. วิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด
3. วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ
4. วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด
5. วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1) เพื่อเพิ่มทางเลือกในการแก้ปัญหาข้อมูลที่สูญหายสำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลของการทดลองแฟกทอเรียล 2^k

2) ทำให้สามารถศึกษาค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่าง ๆ ในกรณีที่มีค่าสูญหายเกิดขึ้นได้

3) เพื่อเป็นแนวทางในการตัดสินใจเลือกใช้วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายของการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ให้เหมาะสมกับสถานการณ์ในการวิจัย

1.5 นิยามศัพท์

1) การทดลอง (Experiment) คือ กระบวนการเก็บข้อมูลเพื่อการวิเคราะห์ โดยผู้ทำการทดลองสามารถควบคุมระบบการเก็บข้อมูลเชิงสุ่ม เช่น สามารถกำหนดกระบวนการจัดหน่วยทดลองเข้ารับทรีตเมนต์ต่างๆ ได้ (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

2) การทดลองแฟกทอเรียล (Factorial Experiment) คือ การทดลองที่มีปัจจัยหลายปัจจัยที่ต้องการศึกษา โดยอาจเป็นปัจจัยเชิงปริมาณ เช่น ความเข้มข้นของสารละลาย หรือปัจจัยเชิงคุณภาพ

เช่น ชนิดของปุ๋ย การทดลองชนิดนี้สามารถศึกษาอิทธิพลร่วม (Interaction) ระหว่างปัจจัยต่างๆ ได้นอกเหนือไปจากอิทธิพลหลักของแต่ละปัจจัย นิยมใช้ตัวอักษรตัวใหญ่ เช่น A แทน ปัจจัย และ $A_1, A_2, \ldots$ แทน ระดับของปัจจัย (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

3) ปัจจัย (Factor) คือ ตัวแปรอิสระที่ควบคุมได้และเป็นสาเหตุหนึ่งของความแปรผันที่เกิดขึ้น แต่ละปัจจัยอาจแบ่งออกเป็นหลายระดับ แต่ละระดับเรียกว่า ทรีตเมนต์ (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

4) อิทธิพล (Effect) คือ ผลที่เกิดจากการให้ทรีตเมนต์กับหน่วยทดลอง (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ที่ไม่มีการทำซ้ำ โดยจะทำการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1 การทดลองแฟกทอเรียล 2^k

2.1.1 ตัวแบบการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ประกอบด้วยพจน์ของค่าเฉลี่ย อิทธิพลหลัก k พจน์ อิทธิพลร่วม 2 ปัจจัย $\binom{k}{2}$ พจน์ อิทธิพลร่วม 3 ปัจจัย $\binom{k}{3}$ พจน์ ...จนถึงพจน์สุดท้าย 1 พจน์ ของอิทธิพลร่วม k ปัจจัย

ตัวอย่าง ตัวแบบการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 ที่มี 3 ปัจจัย คือ ปัจจัย A ปัจจัย B และปัจจัย C ซึ่งแต่ละปัจจัยมีอย่างละ 2 ระดับ ผังข้อมูลแสดงดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ผังข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 ที่ไม่มีซ้ำ

	B_1		B_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	y_{111}	y_{112}	y_{121}	y_{122}
A_2	y_{211}	y_{212}	y_{221}	y_{222}

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 เป็นดังนี้

$$y_{ijk\ell} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk\ell} \qquad (2.1)$$

โดย $i = 1,2;\ j = 1,2;\ k = 1,2;\ \ell = 1$

เมื่อ y_{ijkl} คือ ค่าของข้อมูลจากหน่วยทดลองที่ ℓ ของปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากร

α_i คือ อิทธิพลของปัจจัย A ระดับที่ i

β_j คือ อิทธิพลของปัจจัย B ระดับที่ j

$(\alpha\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย B ระดับที่ j

γ_k คือ อิทธิพลของปัจจัย C ระดับที่ k

$(\alpha\gamma)_{ik}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย C ระดับที่ k

$(\beta\gamma)_{jk}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k

$\varepsilon_{ijk\ell}$ คือ ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่มของการทดลอง มีการแจกแจงแบบปรกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

2.1.2 ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 ที่มี 2 ปัจจัย คือ ปัจจัย A และปัจจัย B ซึ่งแต่ละปัจจัยมีอย่างละ 2 ระดับ

โดยสัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น ได้แก่

(1) เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ A_0B_0

a เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ A_1B_0

b เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ A_0B_1

ab เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ A_1B_1

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 ที่มี 3 ปัจจัย คือ ปัจจัย A ปัจจัย B และปัจจัย C ซึ่งแต่ละปัจจัยมีอย่างละ 2 ระดับ

โดยสัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น ได้แก่

(1) เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_0C_0$

a เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_0C_0$

b เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_1C_0$

ab เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_1C_0$

c เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_0C_1$

ac เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_0C_1$

bc เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_1C_1$

abc เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_1C_1$

3. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 ที่มี 4 ปัจจัย คือ ปัจจัย A ปัจจัย B ปัจจัย C และปัจจัย D ซึ่งแต่ละปัจจัยมีอย่างละ 2 ระดับ

โดยสัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น ได้แก่

(1) เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_0C_0D_0$

a เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_0C_0D_0$

b เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_1C_0D_0$

ab เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_1C_0D_0$

c เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_0C_1D_0$

ac เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_0C_1D_0$

bc เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_1C_1D_0$

abc เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_1C_1D_0$

d เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_0C_0D_1$

ad เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_0C_0D_1$

bd เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_1C_0D_1$

abd เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_1C_0D_1$

cd เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_0C_1D_1$

acd เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_0C_1D_1$

bcd เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_0B_1C_1D_1$

abcd เป็นสัญลักษณ์แทนทรีตเมนต์ $A_1B_1C_1D_1$

ในกรณีของการทดลองแฟกทอเรียล 2^k นี้ อาจหาค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ได้จากวิธีของเยทส์ (จิราวัลย์ จิตรถเวช, 2552: 244) ซึ่งมีหลักเกณฑ์ในการหาดังนี้

1. เขียนทรีตเมนต์คอมบิเนชั่นในสดมภ์ที่ 1

2. เขียนยอดรวมของทรีตเมนต์คอมบิเนชั่นเหล่านี้ในสดมภ์ที่ 2

3. ตั้งสดมภ์ที่ (1) , (2) ,...,(k) โดยค่าในแต่ละสดมภ์จะหาได้จากการบวกค่าในสดมภ์ที่อยู่ก่อนหน้าที่ละคู่จนครบทุกคู่ แล้วจึงเปลี่ยนเป็นลบกันทีละคู่จนครบทุกคู่

ค่าที่ได้ในสดมภ์สุดท้ายจะเป็นค่าคอนทราสท์ ซึ่งเมื่อยกกำลังสองของค่าเหล่านี้ แล้วหารด้วย $r2^k$ ก็จะได้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ

ตัวอย่าง การคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 โดยใช้วิธีของเยสท์ ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 การคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ วิธีของเยสท์

ทรีตเมนต์ คอมบิเนชั่น	ยอด รวม	(1)	(2)	(3)
(1)	y_{111}	$(1)+a$	$(1)+a+b+ab$	$(1)+a+b+ab+c+ac+bc+abc$
a	y_{211}	$b+ab$	$c+ac+bc+abc$	$a-(1)+ab-b+ac-c+abc-bc$
b	y_{121}	$c+ac$	$a-(1)+ab-b$	$b+ab-(1)-a+bc+abc-c-ac$
ab	y_{221}	$bc+abc$	$ac-c+abc-bc$	$ab-b-a+(1)+abc-bc-ac+c$
c	y_{112}	$a-(1)$	$b+ab-(1)-a$	$c+ac+bc+abc-(1)-a-b-ab$
ac	y_{212}	$ab-b$	$bc+abc-c-ac$	$ac-c+abc-bc-a+(1)-ab+b$
bc	y_{122}	$ac-c$	$ab-b-a+(1)$	$bc+abc-c-ac-b-ab+(1)+a$
abc	y_{222}	$abc-bc$	$abc-bc-ac+c$	$abc-bc-ac+c-ab+b+a-(1)$

1. ผลรวมกำลังสองของอิทธิพล $= \dfrac{(contrast)^2}{r2^k}$ (2.2)

2. อิทธิพล $= \dfrac{contrast}{r2^{k-1}}$ (2.3)

2.1.3 มาตรที่ใช้ในการเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหาย

มาตรวัดที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าประมาณดังนี้

1. ค่าประมาณของข้อมูลสูญหาย
2. ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ

3. ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ

พิจารณาจากเกณฑ์ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error: RE) โดยการหาค่าประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยจากวิธีต่างๆ แล้วนำมาเปรียบเทียบกับค่าของข้อมูลที่ได้จากการทดลองจริง หากพบว่าวิธีใดให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า แสดงว่าวิธีนั้นดีกว่า สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\text{RE} = \left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right| \times 100 \tag{2.4}$$

เมื่อ y คือ ค่าของข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

$\hat{y}$ คือ ค่าประมาณข้อมูลสูญหาย

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Draper และ Stoneman (1964) ได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ในการทดลองแฟกทอเรียลที่มีปัจจัยละ 2 ระดับ ในกรณีไม่มีการทำซ้ำ และได้เสนอวิธีการประมาณค่าสูญหายการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 สำหรับค่าสูญหาย 1 ทำการประมาณค่าสูญหายโดยการหาผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุด (Highest Order Interaction) และกำหนดให้คอนทราสท์ มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการเพื่อให้ได้ค่าสูญหายที่ต้องการ จากนั้นทำการคำนวณค่าอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ทั้งข้อมูลจริงกับข้อมูลที่มีค่าสูญหายที่ถูกแทนด้วยตัวประมาณค่าสูญหาย แล้วนำไปพล็อตกราฟ Half-Normal พบว่า ค่าของอิทธิพลที่ได้จากการประมาณค่าข้อมูลสูญหายได้มีการผ่านจุดกำเนิด นั่นคือการประมาณค่าสูญหายที่ได้มีความเหมาะสม และค่าของอิทธิพลที่มีนัยสำคัญก็มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับข้อมูลจริง

John (1979) ได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ได้เสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย สำหรับกรณีที่มีค่าสูญหาย 1 ค่า และ 2 ค่า โดยการใช้วิธีของเยทส์ แล้วนำคอนทราสท์ของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดและอิทธิพลร่วมอันดับที่ $k-1$ ที่มีค่าสูญหายติดอยู่ มายกกำลังสองแล้วบวกกัน จากนั้นทำให้ค่าที่ได้มีค่าต่ำที่สุด และแก้สมการหาค่าข้อมูลสูญหายที่ต้องการ และทำการคำนวณประสิทธิภาพของความแปรปรวน ผลการศึกษาพบว่าไม่ว่าจะมีค่าสูญหายเกิดขึ้น 1 ค่า หรือ 2 ค่า จะส่งผลทำให้ประสิทธิภาพของความแปรปรวนมีค่าลดลง บางกรณีอาจทำให้เกิดความเสียหายอย่างมากในการวิเคราะห์

ปราณี ศรีภา (2532) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีวิเคราะห์เมื่อมีค่าทุกค่าข้อมูลสูญหายในบล็อกใดบล็อกหนึ่งในการทดลองบล็อกไม่สมบูรณ์ที่สมดุล 3 วิธี คือ วิธีของ P.D Puri วิธีของ G.N. Wilkinson และวิธีประมาณค่าสูญหายโดยให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบคือค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Error: MAE) ซึ่งผลการศึกษาพบว่า ทั้ง 3 วิธีให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ยไม่แตกต่างกัน และทั้ง 3 วิธีให้ค่าอำนาจทดสอบสูงที่สุดทุกสถานการณ์ ดังนั้น เมื่อเกิดปัญหาข้อมูลสูญหายทั้งบล็อกในแผนการทดลองแบบบล็อกไม่สมบูรณ์สมดุลขึ้น ควรเลือกใช้วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด

รุ่งกานต์ กาใจดำ (2540) ได้ศึกษาการประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยใช้กระบวนการ R ซึ่งเป็นกระบวนการที่จะได้มาซึ่งเมตริกซ์สุดท้าย โดยมีข้อสมมติของการทดลองว่าการทดลองต้องไม่มีผลกระทบร่วมเกิดขึ้นในแต่ละแถว และในแต่ละหลักของการทดลองจะต้องมีค่าสังเกตอย่างน้อย 1 ค่าสังเกต ซึ่งผลการศึกษาพบว่า เมื่อเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าสูญหายโดยวิธีใช้ค่าเฉลี่ย และวิธีประมาณค่าสูญหายโดยใช้กระบวนการ R ในการทดลองบล็อกสุ่ม และการทดลองบล็อกไม่สมบูรณ์ ซึ่งจัดเป็นการทดลองบวกจัดสองทางแล้ว พบว่า ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการทั้ง 2 วิธีมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นหากมีข้อมูลสูญหายเกิดขึ้นในการทดลองบวกจัดสองทาง วิธีใช้ค่าเฉลี่ยจะเหมาะสมเมื่อมีจำนวนข้อมูลที่สูญหายเพียงเล็กน้อย ส่วนในการทดลองแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ จะใช้วิธีนี้ได้ในกรณีที่มีค่าข้อมูลสูญหายในบล็อกเดียวกันเท่านั้น ส่วนวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยใช้กระบวนการ R จะเหมาะสมในกรณีการทดลองบล็อกไม่สมบูรณ์ มีข้อมูลสูญหายเป็นจำนวนมาก และค่าข้อมูลสูญหายในหลายบล็อก

ดวงฤดี เหง้าพรมนิล (2545) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียวเมื่อมีค่าสูญหายในการทดลองบล็อกสุ่มสมบูรณ์ 5 วิธี ได้แก่ วิธีการวนซ้ำ วิธีวิลคินซัน วิธีทดสอบนัยสำคัญโดยวิธีของการถดถอยทั่วไป วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม และวิธีของแดสและกีริ โดยกำหนดให้มีรูปแบบการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนของการทดลองแบบปกติ ที และลอกนอร์มอล มีจำนวนบล็อกเท่ากับ 3, 5, 7 และ 9 ผลการศึกษาพบว่า เมื่อความคลาดเคลื่อนของการทดลองมีการแจกแจงลอกนอร์มอลสำหรับทุกค่าของค่าข้อมูลสูญหาย ค่าเฉลี่ยรวมและขนาดของความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของบล็อกควรใช้วิธีการวนซ้ำ หรือวิธีวิลคินซัน เมื่อความคลาดเคลื่อนของการทดลองมีการแจกแจงแบบปกติและที สำหรับทุกค่าของค่าเฉลี่ยรวมและขนาดของความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของบล็อก กรณีที่มีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ควรเลือกใช้วิธีการวนซ้ำหรือวิธีวิลคินซัน แต่เมื่อมีข้อมูลสูญหาย 2 และ 3 ควรเลือกใช้วิธีทดสอบนัยสำคัญโดยวิธีของการถดถอย

ทั่วไป วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม และวิธีแดสและกีริ ซึ่งจะใช้วิธีใดนั้นขึ้นอยู่กับข้อกำหนดของแต่ละวิธี

ประพจน์ ดำรงสุทธิพงศ์ (2546) ได้ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ ในกรณีที่ไม่มีการทำซ้ำ 3 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีค่าคาดหวังสูงสุด และวิธีอิมพิวเทชัน จำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลด้วยโปรแกรม S-PLUS 2000 โดยศึกษาภายใต้ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ และจำนวนระดับปัจจัยของวิธีการทดลองเท่ากับ 3, 4 และ 5 ระดับ มีเปอร์เซ็นต์ข้อมูลสูญหายเท่ากับ 10%, 20% และ 30% กำหนดให้สัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation: C.V.) มีค่าเท่ากับ 5%, 25% และ 45% ทำการเปรียบเทียบโดยใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Mean Squared Error: MSE) ผลการศึกษาพบว่า ค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อเปอร์เซ็นต์ข้อมูลสูญหายมีค่ามากขึ้น โดยวิธีอิมพิวเทชัน ให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน ต่ำกว่าวิธีค่าคาดหวังสูงสุด และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในทุกสถานการณ์ของการทดลองที่ทำการศึกษา

ศุภลักษณ์ กรรณิกา (2549) ได้ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแบบจัตุรัสละติน 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีค่าคาดหวังสูงสุด และการประมาณค่าวิธีมัลติเพิล อิมพิวเทชัน สำหรับการทดลองจัตุรัสละติน ในกรณีไม่มีการทำซ้ำ กำหนดให้มีเปอร์เซ็นต์ข้อมูลสูญหายเท่ากับ 10%, 20% และ 30% สัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation: C.V.) มีค่าเท่ากับ 5%, 25% และ 45% การเปรียบเทียบโดยใช้เกณฑ์ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด (Maximum Absolute Error: MAE) ผลการศึกษาพบว่า เมื่อเปอร์เซ็นต์ข้อมูลสูญหายและสัมประสิทธิ์ความผันแปรมีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดจะมีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับกรณีที่เปอร์เซ็นต์ค่าข้อมูลสูญหายและสัมประสิทธิ์ความผันแปรมีค่ามาก พบว่าการประมาณค่าสูญหายวิธีมัลติเพิล อิมพวเทชัน จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดมีค่าต่ำกว่าวิธีค่าคาดหวังสูงสุด และวิธีกำลังสองน้อยสุดในทุกสถานการณ์ที่ทำการศึกษา ดังนั้นในกรณีนี้จึงควรใช้วิธีมัลติเพิล อิมพิวเทชัน ในการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย แต่สำหรับกรณีที่เปอร์เซ็นต์ค่าข้อมูลสูญหายและสัมประสิทธิ์ความแปรมีค่าน้อย พบว่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของทั้ง 3 วิธี มีค่าใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นจึงควรเลือกใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดในการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย เนื่องจากสะดวกและรวดเร็วกว่า

Qumsiyeh และ Kirchner (2011) ได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ในกรณีไม่มีการทำซ้ำ และการทดลองแบบเศษส่วน 2^{k-p} แฟกทอเรียล โดยการใช้ค่าสังเกตทั้งหมดที่มีทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น $k-1$ ระดับ ของค่าข้อมูลสูญหาย มาคำนวณหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย เพื่อใช้แทนค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 สำหรับ

ข้อมูลสูญหาย 1และ 2 ค่า ส่วนการทดลองแบบเศษส่วน 2^{5-1}แฟกทอเรียล จะทำการประมาณค่าสูญหายสำหรับกรณีที่มีค่าสูญหายที่มีเพียง 1 ค่าเท่านั้น ซึ่งเมื่อนำข้อมูลจริงและข้อมูลที่ถูกแทนด้วยตัวประมาณค่าข้อมูลสูญหาย มาคำนวณค่าอิทธิพลของแต่ละปัจจัย แล้วทำการพล็อตกราฟ Half-Normal เพื่อพิจารณาว่าการประมาณค่าสูญหายนั้นถือว่าเหมาะสมหรือไม่ ผลการศึกษาพบว่า ข้อมูลจริงกับข้อมูลที่มีการสูญหายที่ถูกแทนด้วยตัวประมาณค่าข้อมูลสูญหาย มีลักษณะแนวโน้มของอิทธิพลของแต่ละปัจจัยไปในแนวทางเดียวกันทั้งการทดลองทั้ง 2 แบบ

วิสุทธิดา ศรีดวงโชติ (2556) ได้ศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย 3 วิธี คือ วิธีการวนซ้ำ วิธีวิลคินซัน และวิธีเคเนียเรส เนย์บอร์อิมพิวเทชัน สำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย ที่จัดทรีตเมนต์ในรูปแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ กำหนดให้ประชากรมีขนาดเท่ากับ 512 มีเปอร์เซ็นต์ข้อมูลสูญหายเท่ากับ 10%, 20% และ 30% สัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation: C.V.) มีค่าเท่ากับ 5%, 25% และ 45% การเปรียบเทียบโดยใช้เกณฑ์ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด (Maximum Absolute Error: MAE) ผลการศึกษาพบว่า เมื่อเปอร์เซ็นต์ข้อมูลสูญหายและสัมประสิทธิ์ความผันแปรมีค่ามากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์สูงสุดจะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ในสถานการณ์ที่กำหนด การประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีเคเนียเรส เนย์บอร์อิมพิวเทชัน ให้ค่าความคาดเคลื่อนสมบูรณ์สูงสุดต่ำกว่าวิธีการวนซ้ำ และวิธีวิลคินซัน ดังนั้น ถ้าทำการทดลองในการทดลอแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย ที่จัดทรีตเมนต์ในรูปแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ตามสถานการณ์ต่างๆที่กำหนด และมีรูปแบบของข้อมูลสูญหายแบบไม่เป็นระบบ ควรเลือกใช้การประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีเคเนียเรส เนเบอร์อิมพิวชัน เพราะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุดและสะดวกต่อการใช้งาน

Ekwueme (2014) ได้ทำการศึกษา วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียลในกรณีที่มีการทำซ้ำ โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย 3 วิธี คือ วิธี Pairwise Deletion (PD) วิธี Multiple Imputation (MI) และวิธี Expectation Maximization (EM) ในกรณีที่ข้อมูลมีการสูญหายแบบสุ่ม โดยใช้วิธีการจำลองข้อมูลที่มีค่าข้อมูลสูญหายการทดลองที่มีการทำซ้ำ $2\times3\times4$ แฟกทอเรียลในแบบบล็อกสุ่มสมบูรณ์ ขึ้นมา พบว่า วิธี EM ให้ค่าเฉลี่ย, ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน และมีค่า P-value ใกล้เคียงและสอดคล้องกัน ทั้งข้อมูลจริงและข้อมูลที่ทำการจำลองขึ้นมา ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้วิธี EM เป็นวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองดังกล่าวได้เหมาะสมที่สุด

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงาน

การวิเคราะห์การทดลองแฟกทอเรียล 2^k ในกรณีไม่มีการทำซ้ำ จะไม่สามารถประมาณค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนได้ การเกิดข้อมูลสูญหายในการทดลองดังกล่าวจะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ได้ จึงจำเป็นต้องประมาณค่าข้อมูลสูญหาย เพื่อให้มีข้อมูลครบถ้วน สามารถคำนวณค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยได้ โดยเสนอวิธีการประมาณค่าสูญหายที่ได้จากแนวคิดพื้นฐานต่างๆ และวิธีที่นำเสนอใหม่ แล้วนำมาเปรียบเทียบกันทั้งหมด 5 วิธี ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 2^3 และ 2^4 ดังนี้

3.1 วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายที่ได้จากแนวคิดพื้นฐานต่างๆ

3.1.1 วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด

การวิเคราะห์การทดลองแฟกทอเรียล 2^k ในกรณีไม่มีการทำซ้ำ จะไม่สามารถประมาณค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนได้ โดยส่วนใหญ่นิยมใช้ค่าผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมาประมาณค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน จึงนำแนวคิดดังกล่าวมาใช้ในการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย โดยการทำให้ผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด มีขั้นตอนการประมาณค่าข้อมูลสูญหายดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เขียนสูตรผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดในพจน์ของค่าข้อมูลที่สูญหาย x

ขั้นตอนที่ 2 หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับข้อมูลที่สูญหายและเทียบผลของอนุพันธ์เท่ากับศูนย์เพื่อหาค่าข้อมูลที่สูญหาย นั่นคือ

$$\frac{\partial SSABC...}{\partial x}=0$$

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

จาก $SSAB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}{}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}{}^2}{b} - \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}{}^2}{a} + \frac{y_{..}{}^2}{ab}$; $a=2, b=2$

1.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{11}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{12}+x)^2}{2} - \frac{(y_{21}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4} \tag{3.1}$$

$y'_{..}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSAB}{\partial x} = 2x - y_{12} - x - y_{21} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2} = 0$$

$$x = y_{21} + y_{12} - y_{22} \tag{3.2}$$

1.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{12}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{22}+x)^2}{2} - \frac{(y_{11}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4} \tag{3.3}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{11} + y_{22} - y_{21} \tag{3.4}$$

1.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{21}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{11}+x)^2}{2} - \frac{(y_{22}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4} \tag{3.5}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{22} + y_{11} - y_{12} \tag{3.6}$$

1.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{22}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{21}+x)^2}{2} - \frac{(y_{12}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4} \tag{3.7}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{21} + y_{12} - y_{11} \tag{3.8}$$

วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 ทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับการประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีทำให้ผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่า

ต่ำสุด ซึ่งสามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบ (Pattern) ได้ในทุกตำแหน่งของข้อมูลที่สูญหาย โดยในขั้นตอนแรกให้เขียนข้อมูลอยู่ในรูปตารางของปัจจัย A ไขว้ (Cross) กับปัจจัย B เป็นตาราง 2 ทาง มีรูปแบบดังนี้

รูปแบบ กรณีมีข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{ij} (ค่าข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย B ระดับที่ j) ให้ใช้ผลรวมของค่าข้อมูลบนเส้นทแยงมุมที่ไม่มีข้อมูลสูญหาย ลบด้วยค่าข้อมูลตัวที่เหลืออยู่ ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ผังข้อมูลและรูปแบบการประมาณค่าสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2

	B_1	B_2
A_1	y_{11}	y_{12}
A_2	y_{21}	y_{22}

ตัวอย่าง เช่น มีข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{11} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายเท่ากับ

$$x = y_{21} + y_{12} - y_{22}$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

$$\text{จาก } SSABC = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}^{\,2} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^{\,2}}{c} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c} y_{i.k}^{\,2}}{b} - \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{.jk}^{\,2}}{a} + \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^{\,2}}{bc} + \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^{\,2}}{ac} + \frac{\sum_{k=1}^{c} y_{...k}^{\,2}}{ab} - \frac{y_{...}^{\,2}}{abc}$$

เมื่อ $a = 2, b = 2, c = 2$

2.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{111}

$$\text{จาก } SSABC = x^2 - \frac{(y_{112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{211}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{1..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8} \qquad (3.9)$$

เมื่อ $y'_{i..}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย A ระดับที่ i ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{.j.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{..k}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{...}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{112}-x-y_{121}-x-y_{211}-x+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$x=y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{212}-y_{221}-y_{122} \quad (3.10)$$

2.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{112}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{111}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{122}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{212}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8} \quad (3.11)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{121}-y_{222} \quad (3.12)$$

2.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{121}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{122}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{111}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{221}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

(3.13)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{112}-y_{222} \quad (3.14)$$

2.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{122}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{121}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{112}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{222}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8} \quad (3.15)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{212}-y_{221} \quad (3.16)$$

2.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{211}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{111}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8} \quad (3.17)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{111} + y_{212} + y_{221} + y_{122} - y_{112} - y_{121} - y_{222} \quad (3.18)$$

2.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{212}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{112}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..2}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8} \quad (3.19)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{211} + y_{112} + y_{121} + y_{222} - y_{111} - y_{221} - y_{122} \quad (3.20)$$

2.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{221}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{121}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8} \quad (3.21)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{211} + y_{112} + y_{121} + y_{222} - y_{111} - y_{212} - y_{122} \quad (3.22)$$

2.8 มีข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{222}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{122}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..2}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8} \quad (3.23)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{111} + y_{212} + y_{221} + y_{122} - y_{211} - y_{112} - y_{121} \quad (3.24)$$

วิธีการหาข้อมูลที่สูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 ทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับการประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีทำให้ผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบ (Pattern) ได้ในทุกตำแหน่งของข้อมูลที่สูญหาย โดยในขั้นตอนแรกให้เขียนข้อมูลอยู่ในรูปตารางของปัจจัย A ไขว้ (Cross) กับปัจจัย B เป็นตาราง 2 ทาง และให้เขียนปัจจัย C ซ้อนในปัจจัย B มีรูปแบบดังนี้

รูปแบบ ถ้าข้อมูลที่สูญหายอยู่ในตำแหน่งของเส้นทึบ (ประ) ให้ใช้ผลรวมของค่าข้อมูลบนเส้นประ (ทึบ) ลบด้วยผลรวมของค่าข้อมูลที่อยู่บนเส้นทึบ (ประ) ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ผังข้อมูลและรูปแบบการประมาณค่าสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3

	B_1		B_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	y_{111}	y_{112}	y_{121}	y_{122}
A_2	y_{211}	y_{212}	y_{221}	y_{222}

ตัวอย่าง เช่น มีข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายเท่ากับ

$$x=\left(y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}\right)-\left(y_{111}+y_{212}+y_{221}\right)$$

3. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4

จาก
$$SSABCD=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{ijk\ell}{}^2-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}y_{ijk.}{}^2}{d}-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{d}y_{ij.\ell}{}^2}{c}$$
$$-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{c=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{i.k\ell}{}^2}{b}-\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{.jk\ell}{}^2}{a}+\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij..}{}^2}{cd}+\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}y_{i.k.}{}^2}{bd}$$
$$+\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{d}y_{i..\ell}{}^2}{bc}+\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}y_{.jk.}{}^2}{ad}+\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{d}y_{.j.\ell}{}^2}{ac}+\frac{\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{..k\ell}{}^2}{ab}$$
$$-\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i...}{}^2}{bcd}-\frac{\sum_{j=1}^{b}y_{.j..}{}^2}{acd}-\frac{\sum_{k=1}^{c}y_{..k.}{}^2}{abd}-\frac{\sum_{\ell=1}^{d}y_{...\ell}{}^2}{abc}+\frac{y_{....}{}^2}{abcd}$$

เมื่อ $a=2,b=2,c=2,d=2$

3.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1111}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2111}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{11..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..11}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16} \quad (3.25)$$

เมื่อ $y'_{ij..}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{i.k.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{i..\ell}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย D ระดับที่ ℓ ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{.jk.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{.j.\ell}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย D ระดับที่ ℓ ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{..k\ell}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย C ระดับที่ k และปัจจัย D ระดับที่ ℓ ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{i...}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย A ระดับที่ i ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{.j..}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{..k.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{...\ell}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดของปัจจัย D ระดับที่ ℓ ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$y'_{....}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{1112}-x-y_{1121}-x-y_{1211}-x-y_{2111}-x+\frac{(y'_{11..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{1.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{1..1}+x)}{2}+\frac{(y'_{.11.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.1.1}+x)}{2}+\frac{(y'_{..11}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{1...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.1..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..1.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...1}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x=\ &y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}\\&-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222}\end{aligned}\qquad(3.26)$$

3.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1112}

$$\begin{aligned}SSABCD=x^2&-\frac{(y_{1111}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1122}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1212}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2112}+x)^2}{2}\\&+\frac{(y'_{11..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.1.2}+x)^2}{4}\\&+\frac{(y'_{..12}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{1...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}\\&+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}x=\ &y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}\\&-y_{2111}-y_{1121}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222}\end{aligned}\qquad(3.27)$$

3.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1121}

$$\begin{aligned}SSABCD=x^2&-\frac{(y_{1122}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1111}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2121}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1221}+x)^2}{2}\\&+\frac{(y'_{11..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4}\\&+\frac{(y'_{..21}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{1...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}\\&+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}x=\ &y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}\\&-y_{2111}-y_{1112}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222}\end{aligned}\qquad(3.28)$$

3.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1122}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2122}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{11..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..22}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222} - y_{1111} - y_{2112} - y_{2121} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} - y_{2222} \quad (3.29)$$

3.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1211}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{12..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..11}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222} - y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222} \quad (3.30)$$

3.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1212}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2212}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{12..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..12}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned} x = {} & y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222} \\ & -y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1221}-y_{2222} \end{aligned} \tag{3.31}$$

3.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1221}

$$\begin{aligned} SSABCD = {} & x^2-\frac{(y_{1222}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1211}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1121}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2221}+x)^2}{2} \\ & +\frac{(y'_{12..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4} \\ & +\frac{(y'_{..21}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{1...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} \\ & +\frac{(y'_{....}+x)^2}{16} \end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned} x = {} & y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222} \\ & -y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{2222} \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.8 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1222}

$$\begin{aligned} SSABCD = {} & x^2-\frac{(y_{1221}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1212}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1122}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2222}+x)^2}{2} \\ & +\frac{(y'_{12..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4} \\ & +\frac{(y'_{..22}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{1...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} \\ & +\frac{(y'_{....}+x)^2}{16} \end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned} x = {} & y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222} \\ & -y_{2111}-y_{1112}-y_{1121}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221} \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.9 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2111}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1111}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..11}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222} \quad (3.34)$$

3.10 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2112}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1112}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..12}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222} - y_{1111} - y_{2121} - y_{1122} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} - y_{2222} \quad (3.35)$$

3.11 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2121}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1121}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..21}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222} - y_{1111}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222} \quad (3.36)$$

3.12 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2122}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1122}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..22}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222} - y_{2111}-y_{1112}-y_{1121}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222} \quad (3.37)$$

3.13 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2211}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1211}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{22..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..11}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222} - y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222} \quad (3.38)$$

3.14 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2212}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1212}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{22..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..12}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222} - y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2221} - y_{1222} \quad (3.39)$$

3.15 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2221}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1221}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{22..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..21}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222} - y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{1222} \quad (3.40)$$

3.16 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2222}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1222}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{22..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..22}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x = y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222} - y_{1111} - y_{2112} - y_{2121} - y_{1122} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} \quad (3.41)$$

วิธีการหาข้อมูลที่สูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 ทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับการประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีทำให้ผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบ (Pattern) ได้ในทุกตำแหน่งของข้อมูลที่สูญหาย โดยในขั้นตอนแรกให้เขียนข้อมูลอยู่ในรูปตารางของปัจจัย A ไขว้ (Cross) กับปัจจัย B เป็นตาราง 2 ทาง ให้เขียนปัจจัย C ซ้อนในปัจจัย B และให้เขียนปัจจัย D ซ้อนในปัจจัย C มีรูปแบบดังนี้

รูปแบบ ถ้าข้อมูลที่สูญหายอยู่ในตำแหน่งของเส้นทึบ (ประ) ให้ใช้ผลรวมของค่าข้อมูลบนเส้นประ (ทึบ) ลบด้วยผลรวมของค่าข้อมูลที่อยู่บนเส้นทึบ (ประ) ดังตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 ผังข้อมูลและรูปแบบการประมาณค่าสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4

	B_1				B_2			
	C_1		C_2		C_1		C_2	
	D_1	D_2	D_1	D_2	D_1	D_2	D_1	D_2
A_1	y_{1111}	y_{1112}	y_{1121}	y_{1122}	y_{1211}	y_{1212}	y_{1221}	y_{1222}
A_2	y_{2111}	y_{2112}	y_{2121}	y_{2122}	y_{2211}	y_{2212}	y_{2221}	y_{2222}

ตัวอย่าง เช่น มีข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายเท่ากับ

$$x = (y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}) - (y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222})$$

3.1.2 วิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด

วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในวิธีนี้ มีแนวคิดมาจากการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด โดยมีขั้นตอนการประมาณค่าข้อมูลสูญหายดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหาค่า MSE จาก $MSE=\frac{SSE}{df}$ เนื่องจาก $SSE = SSABC...$ และ $df = 1$ ทำให้ $MSE = SSABC...$

ขั้นตอนที่ 2 เขียนสูตรผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดในพจน์ของค่าข้อมูลที่สูญหาย x

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation: C.V.)

จาก $C.V. = \frac{\sqrt{MSE}}{\bar{y}} = \frac{\sqrt{SSABC...}}{\bar{y}}$

โดยที่ $\bar{y} = \frac{y'_{...} + x}{n}$

เมื่อ $y'_{...}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

n คือ จำนวนของข้อมูลทั้งหมด

ขั้นตอนที่ 4 หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับข้อมูลที่สูญหายและเทียบผลของอนุพันธ์เท่ากับศูนย์เพื่อหาค่าข้อมูลที่สูญหาย นั่นคือ

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$$

ในวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในวิธีนี้ จะยกตัวอย่างในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 และ 2^3 เท่านั้น เนื่องจากในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 ค่อนข้างมีความซับซ้อนในการคำนวณ

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

กำหนดให้ $SSAB$ ในพจน์ของค่าข้อมูลที่สูญหาย x แทนด้วย B จะได้

$$C.V. = \frac{(B+R)^{1/2}}{\left[\frac{(y'_{..} + x)}{4}\right]} \tag{3.42}$$

โดย $R = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}{}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{2} a_{i.}{}^2}{2} - \frac{\sum_{j=1}^{2} a_{.j}{}^2}{2}$; ค่าคงที่

เมื่อ a_{ij} คือ ค่าข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$a_{i.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

$a_{.j}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

1.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{11}

แทนสมการ (3.1) ในสมการ (3.42)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x}=\frac{4\left(y'_{..}+x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(B+R\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B+R\right)-4\left(B+R\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(y'_{..}+x\right)}{\left(y'_{..}+x\right)^2}=0$$

$$\left(y'_{..}+x\right)\frac{\partial}{\partial x}B=2\left(B+R\right)$$

$$x=\frac{y_{12}y'_{..}+y_{21}y'_{..}-y_{12}^2-y_{21}^2+2R}{y_{12}+y_{21}} \tag{3.43}$$

1.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{12}

แทนสมการ (3.3) ในสมการ (3.42)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y_{11}y'_{..}+y_{22}y'_{..}-y_{11}^2-y_{22}^2+2R}{y_{11}+y_{22}} \tag{3.44}$$

1.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{21}

แทนสมการ (3.5) ในสมการ (3.42)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y_{22}y'_{..}+y_{11}y'_{..}-y_{22}^2-y_{11}^2+2R}{y_{22}+y_{11}} \tag{3.45}$$

1.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{22}

แทนสมการ (3.7) ในสมการ (3.42)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y_{21}y'_{..}+y_{12}y'_{..}-y_{21}^2-y_{12}^2+2R}{y_{21}+y_{12}} \tag{3.46}$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

กำหนดให้ $SSABC$ ในพจน์ของค่าข้อมูลที่สูญหาย x แทนด้วย B จะได้

$$C.V.=\frac{(B+R)^{1/2}}{\left[\frac{(y'_{...}+x)}{8}\right]} \tag{3.47}$$

โดย $R=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}a_{ijk}{}^2-\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij.}{}^2}{2}-\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}a_{i.k}{}^2}{2}-\frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}a_{.jk}{}^2}{2}$

$+\frac{\sum_{i=1}^{2}a_{i..}{}^2}{4}+\frac{\sum_{j=1}^{2}a_{.j.}{}^2}{4}+\frac{\sum_{j=1}^{2}a_{..k}{}^2}{4}$; ค่าคงที่

เมื่อ a_{ijk} คือ ค่าข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

$a_{ij.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

$a_{i.k}$ คือ ผลรวมข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

$a_{.jk}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

$a_{i..}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย A ระดับที่ i ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

$a_{.j.}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย B ระดับที่ j ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

$a_{..k}$ คือ ผลรวมของข้อมูลของปัจจัย C ระดับที่ k ยกเว้นในระดับที่มีข้อมูลสูญหาย

2.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{111}

แทนสมการ (3.9) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x}=\frac{8\left(y'_{...}+x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(B+R\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B+R\right)-8\left(B+R\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(y'_{...}+x\right)}{\left(y'_{...}+x\right)^2}=0$$

$$\left(y'_{..}+x\right)\frac{\partial}{\partial x}B=2\left(B+R\right)$$

$$x=\frac{y'^{\,2}_{1..}+y'^{\,2}_{.1.}+y'^{\,2}_{..1}-2y^{2}_{112}-2y^{2}_{121}-2y^{2}_{211}-y_{122}y'_{...}-y_{212}y'_{...}-y_{221}y'_{...}+4R}{y_{122}+y_{212}+y_{221}+4y_{112}+4y_{121}+4y_{211}-2y'_{1..}-2y'_{.1.}-2y'_{..1}+y'_{...}} \quad (3.48)$$

2.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{112}

แทนสมการ (3.11) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{1..}+y'^{\,2}_{.1.}+y'^{\,2}_{..2}-2y^{2}_{111}-2y^{2}_{122}-2y^{2}_{212}-y_{121}y'_{...}-y_{211}y'_{...}-y_{222}y'_{...}+4R}{y_{121}+y_{211}+y_{222}+4y_{111}+4y_{122}+4y_{212}-2y'_{1..}-2y'_{.1.}-y'_{..2}+y'_{...}} \quad (3.49)$$

2.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{121}

แทนสมการ (3.13) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{1..}+y'^{\,2}_{.2.}+y'^{\,2}_{..1}-2y^{2}_{122}-2y^{2}_{111}-2y^{2}_{221}-y_{112}y'_{...}-y_{211}y'_{...}-y_{222}y'_{...}+4R}{y_{112}+y_{211}+y_{222}+4y_{122}+4y_{111}+4y_{221}-2y'_{1..}-2y'_{.2.}-2y'_{..1}+y'_{...}} \quad (3.50)$$

2.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{122}

แทนสมการ (3.15) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{1..}+y'^{\,2}_{.2.}+y'^{\,2}_{..2}-2y^{2}_{121}-2y^{2}_{112}-2y^{2}_{222}-y_{111}y'_{...}-y_{221}y'_{...}-y_{212}y'_{...}+4R}{y_{111}+y_{221}+y_{212}+4y_{121}+4y_{112}+4y_{222}-2y'_{1..}-2y'_{.2.}-2y'_{..2}+y'_{...}} \quad (3.51)$$

2.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{211}

แทนสมการ (3.17) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{2..}+y'^{\,2}_{.1.}+y'^{\,2}_{..1}-2y^{2}_{212}-2y^{2}_{221}-2y^{2}_{111}-y_{222}y'_{...}-y_{112}y'_{...}-y_{121}y'_{...}+4R}{y_{222}+y_{112}+y_{121}+4y_{212}+4y_{221}+4y_{111}-2y'_{2..}-2y'_{.1.}-2y'_{..1}+y'_{...}} \quad (3.52)$$

2.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{212}

แทนสมการ (3.19) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{2..}+y'^{\,2}_{.1.}+y'^{\,2}_{..2}-2y^{2}_{211}-2y^{2}_{222}-2y^{2}_{112}-y_{221}y'_{...}-y_{111}y'_{...}-y_{122}y'_{...}+4R}{y_{221}+y_{111}+y_{122}+4y_{211}+4y_{222}+4y_{112}-2y'_{2..}-2y'_{.1.}-2y'_{..2}+y'_{...}} \quad (3.53)$$

2.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{221}

แทนสมการ (3.21) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{2..}+y'^{\,2}_{.2.}+y'^{\,2}_{..1}-2y^{2}_{222}-2y^{2}_{211}-2y^{2}_{121}-y_{212}y'_{...}-y_{122}y'_{...}-y_{111}y'_{...}+4R}{y_{212}+y_{122}+y_{111}+4y_{222}+4y_{211}+4y_{121}-2y'_{2..}-2y'_{.2.}-2y'_{..1}+y'_{...}} \quad (3.54)$$

2.8 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{222}

แทนสมการ (3.23) ในสมการ (3.47)

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$x=\frac{y'^{\,2}_{2..}+y'^{\,2}_{.2.}+y'^{\,2}_{..2}-2y^{2}_{221}-2y^{2}_{212}-2y^{2}_{122}-y_{211}y'_{...}-y_{121}y'_{...}-y_{112}y'_{...}+4R}{y_{211}+y_{121}+y_{112}+4y_{221}+4y_{212}+4y_{122}-2y'_{2..}-2y'_{.2.}-2y'_{..2}+y'_{...}} \quad (3.55)$$

3.1.3 วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ

การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีนี้ มีแนวคิดมาจากการใช้ค่าเฉลี่ย ซึ่งเป็นการนำค่าของข้อมูลที่เหลืออยู่มาหาค่าเฉลี่ยอย่างง่ายแล้วนำไปแทนค่าข้อมูลสูญหาย สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$x=\frac{y'_{...}}{n-1} \quad (3.56)$$

เมื่อ $y'_{...}$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด ยกเว้นข้อมูลสูญหาย

n คือ จำนวนของข้อมูลทั้งหมด

3.1.4 วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด

การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีนี้ มีแนวคิดมาจากการใช้ตำแหน่งค่าของข้อมูลที่อยู่ใกล้กับตำแหน่งข้อมูลสูญหายที่สุดมาหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย แล้วนำไปแทนค่าข้อมูลสูญหาย สามารถคำนวณได้ดังนี้

ในกรณีการทดลองแบบแฟกทอเรียล 2^2 เนื่องจากตำแหน่งค่าของข้อมูลที่อยู่ใกล้กับตำแหน่งข้อมูลสูญหายที่สุดเป็นค่าเดียวกันกับค่าของข้อมูลที่เหลืออยู่ ซึ่งเป็นวิธีเดียวกันกับ

วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ ดังนั้นในวิธีดังกล่าวนี้จะเสนอการประมาณค่าข้อมูลสูญหายเพียงการทดลองแบบแฟกทอเรียล 2^3 และ 2^4

ในที่นี้ จะยกตัวอย่างการประมาณค่าสูญหายในตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลที่อยู่ใกล้กับตำแหน่งข้อมูลสูญหายที่สุด แบ่งเป็น 2 กรณี ในการทดลองแบบแฟกทอเรียล 2^3 ดังนี้

กรณีที่ 1 มีค่าสูญหายเกิดขึ้นในตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลอยู่ใกล้ที่สุดเพียง 3 ค่า เช่น มีค่าสูญหายเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง y_{111} ดังตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4 ผังข้อมูลแสดงตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลอยู่ใกล้ที่สุด 3 ค่า

	B_1		B_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	y_{111}	y_{112}	y_{121}	y_{122}
A_2	y_{211}	y_{212}	y_{221}	y_{222}

สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$x = \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลที่อยู่ใกล้ที่สุด}}{3} = \frac{y_{112} + y_{211} + y_{212}}{3} \tag{3.57}$$

กรณีที่ 2 มีค่าสูญหายเกิดขึ้นในตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลอยู่ใกล้ที่สุดเพียง 5 ค่า เช่น มีค่าสูญหายเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง y_{112} ดังตารางที่ 3.5

ตารางที่ 3.5 ผังข้อมูลแสดงตำแหน่งที่มีค่าของข้อมูลอยู่ใกล้ที่สุด 5 ค่า

	B_1		B_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	y_{111}	y_{112}	y_{121}	y_{122}
A_2	y_{211}	y_{212}	y_{221}	y_{222}

สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$x = \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลที่อยู่ใกล้ที่สุด}}{5} = \frac{y_{111} + y_{211} + y_{212} + y_{221} + y_{121}}{5} \tag{3.58}$$

3.2 วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายที่นำเสนอ

3.2.1 วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง

การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงนั้น เป็นวิธีที่ใช้สัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของค่าข้อมูลที่มีอยู่ เข้ามาช่วยในการนำไปสร้างตัวประมาณค่าสูญหายโดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาตำแหน่งข้อมูลที่สูญหายว่าอยู่ระดับใดของปัจจัยที่หนึ่งและที่ k ก่อน

ขั้นตอนที่ 2 หากพบว่าตำแหน่งที่สูญหายอยู่ที่ระดับต่ำ(สูง)ของปัจจัยที่หนึ่ง และระดับต่ำ(สูง)ของปัจจัยที่ k สัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงประมาณได้จากข้อมูลที่เหลือที่อยู่ในระดับเดียวกันของปัจจัยที่หนึ่งที่มีข้อมูลสูญหายมีค่าเท่ากับ

$$p = \frac{sum_{L(H)} - sum_{H(L)}}{sum_{H(L)}} \tag{3.59}$$

โดย $sum_{L(H)}$ เป็นผลบวกของข้อมูลทั้งหมดที่อยู่ในระดับต่ำ(สูง)ของปัจจัยที่ k และ $sum_{H(L)}$ เป็นผลบวกของข้อมูลทั้งหมดที่อยู่ในระดับสูง(ต่ำ)ของปัจจัยที่ k เมื่อกำหนดให้ปัจจัยที่หนึ่งอยู่ในระดับต่ำ(สูง)

ขั้นตอนที่ 3 ค่าประมาณข้อมูลสูญหายมีค่าเท่ากับ ผลคูณระหว่าง p กับค่าข้อมูลที่อยู่ในระดับสูง(ต่ำ)ของปัจจัยที่ k และอยู่ในระดับเดียวกันกับข้อมูลที่สูญหาย และบวกด้วยข้อมูลที่อยู่ในระดับสูง(ต่ำ)ของปัจจัยที่ k และปัจจัยที่หนึ่งอยู่ในระดับต่ำ(สูง)

ในกรณีการทดลองแบบแฟกทอเรียล 2^2 เนื่องจากไม่มีข้อมูลของการเปลี่ยนแปลงในระดับเดียวกันของปัจจัยที่มีข้อมูลสูญหาย การเทียบสัดส่วนจึงใช้การเปลี่ยนแปลงของอีกระดับหนึ่งของปัจจัยเดียวกัน

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

1.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{11}

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{21}$ และ $sum_H = y_{22}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{21} - y_{22}}{y_{22}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{21} - y_{22}}{y_{22}} \times y_{12} \right] + y_{12} \tag{3.60}$$

1.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{12}

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{21}$ และ $sum_H = y_{22}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{22} - y_{21}}{y_{21}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{22} - y_{21}}{y_{21}} \times y_{11} \right] + y_{11} \tag{3.61}$$

1.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{21}

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{11}$ และ $sum_H = y_{12}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{11} - y_{12}}{y_{12}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{11} - y_{12}}{y_{12}} \times y_{22} \right] + y_{22} \tag{3.62}$$

1.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{22}

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{11}$ และ $sum_H = y_{12}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{12} - y_{11}}{y_{11}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{12} - y_{11}}{y_{11}} \times y_{22} \right] + y_{22} \tag{3.63}$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

2.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{111} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{121}$ และ $sum_H = y_{122}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{121} - y_{122}}{y_{122}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{121} - y_{122}}{y_{122}} \times y_{112} \right] + y_{112} \tag{3.64}$$

2.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{112} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{121}$ และ $sum_H = y_{122}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{122} - y_{121}}{y_{121}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{122} - y_{121}}{y_{121}} \times y_{111} \right] + y_{111} \tag{3.65}$$

2.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{121} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{111}$ และ $sum_H = y_{112}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{111} - y_{112}}{y_{112}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{111} - y_{112}}{y_{112}} \times y_{122} \right] + y_{122} \tag{3.66}$$

2.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{122} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{111}$ และ $sum_H = y_{112}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{112} - y_{111}}{y_{111}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{112} - y_{111}}{y_{111}} \times y_{121} \right] + y_{121} \tag{3.67}$$

2.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{211} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{221}$ และ $sum_H = y_{222}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{221} - y_{222}}{y_{222}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{221} - y_{222}}{y_{222}} \times y_{212} \right] + y_{212} \tag{3.68}$$

2.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{212} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{221}$ และ $sum_H = y_{222}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{222} - y_{221}}{y_{221}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{222} - y_{221}}{y_{221}} \times y_{211} \right] + y_{211} \tag{3.69}$$

2.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{221} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{211}$ และ $sum_H = y_{212}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{211} - y_{212}}{y_{212}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{211} - y_{212}}{y_{212}} \times y_{222} \right] + y_{222} \tag{3.70}$$

2.8 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{222} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (C) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{211}$ และ $sum_H = y_{212}$

ดังนั้น $p = \frac{y_{212} - y_{211}}{y_{211}}$ จะได้

$$x = \left[\frac{y_{212} - y_{211}}{y_{211}} \times y_{221} \right] + y_{221} \tag{3.71}$$

3. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4

3.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1111} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1121} + y_{1211} + y_{1221}$

$$sum_H = y_{1122} + y_{1212} + y_{1222}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{1112} \right] + y_{1112} \tag{3.72}$$

3.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1112} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1121} + y_{1211} + y_{1221}$

$$sum_H = y_{1122} + y_{1212} + y_{1222}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{1111} \right] + y_{1111} \tag{3.73}$$

3.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1121} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1111} + y_{1211} + y_{1221}$

$$sum_H = y_{1112} + y_{1212} + y_{1222}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{1122} \right] + y_{1122} \tag{3.74}$$

3.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1122} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1111} + y_{1211} + y_{1221}$

$$sum_H = y_{1112} + y_{1212} + y_{1222}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{1121} \right] + y_{1121} \tag{3.75}$$

3.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1211} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1111} + y_{1121} + y_{1221}$

$$sum_H = y_{1112} + y_{1122} + y_{1222}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{1212} \right] + y_{1212} \tag{3.76}$$

3.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1212} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1111} + y_{1121} + y_{1221}$

$$sum_H = y_{1112} + y_{1122} + y_{1222}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{1211} \right] + y_{1211} \tag{3.77}$$

3.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1221} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1111} + y_{1121} + y_{1211}$

$$sum_H = y_{1112} + y_{1122} + y_{1212}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{1222} \right] + y_{1222} \tag{3.78}$$

3.8 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1222} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{1111} + y_{1121} + y_{1211}$

$$sum_H = y_{1112} + y_{1122} + y_{1212}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{1221} \right] + y_{1221} \tag{3.79}$$

3.9 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2111} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2121} + y_{2211} + y_{2221}$

$$sum_H = y_{2122} + y_{2212} + y_{2222}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{2112} \right] + y_{2112} \tag{3.80}$$

3.10 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2112} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2121} + y_{2211} + y_{2221}$

$$sum_H = y_{2122} + y_{2212} + y_{2222}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{2111} \right] + y_{2111} \tag{3.81}$$

3.11 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2121} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2121} + y_{2211} + y_{2221}$

$$sum_H = y_{2112} + y_{2212} + y_{2222}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{2122} \right] + y_{2122} \tag{3.82}$$

3.12 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2122} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2121} + y_{2211} + y_{2221}$

$$sum_H = y_{2112} + y_{2212} + y_{2222}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{2121} \right] + y_{2121} \tag{3.83}$$

3.13 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2211} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2111} + y_{2121} + y_{2221}$

$$sum_H = y_{2112} + y_{2122} + y_{2222}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{2212} \right] + y_{2212} \tag{3.84}$$

3.14 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2212} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2111} + y_{2121} + y_{2221}$

$$sum_H = y_{2112} + y_{2122} + y_{2222}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{2211} \right] + y_{2211} \tag{3.85}$$

3.15 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2221} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับต่ำ

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2111} + y_{2121} + y_{2211}$

$$sum_H = y_{2112} + y_{2122} + y_{2212}$$

$$x = \left[\frac{sum_L - sum_H}{sum_H} \times y_{2222} \right] + y_{2222} \tag{3.86}$$

3.16 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2222} ซึ่งปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ k (D) อยู่ในระดับสูง

จากสมการ (3.59) $sum_L = y_{2111} + y_{2121} + y_{2211}$

$$sum_H = y_{2112} + y_{2122} + y_{2212}$$

$$x = \left[\frac{sum_H - sum_L}{sum_L} \times y_{2221} \right] + y_{2221} \tag{3.87}$$

3.3 มาตรที่ใช้ในการเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหาย

มาตรที่ใช้ในการเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหายที่ได้ว่าวิธีใดให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลที่ไม่มีการสูญหายได้มากกว่ากัน จะพิจารณาจากเกณฑ์ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error: RE) โดยการหาค่าประมาณค่าข้อมูลสูญหายจากวิธีต่างๆ และนำมาเปรียบเทียบกับค่าของข้อมูลที่ได้จากการทดลองจริง โดยคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ได้จากสมการ (2.4) และจะพิจารณาวิธีที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ต่ำที่สุด แสดงว่า วิธีนั้นให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายได้ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลที่ไม่มีการสูญหายได้มากที่สุด

บทที่ 4

ตัวอย่างผลการวิเคราะห์

ผลการศึกษาในงานวิจัยครั้งนี้ เป็นการศึกษาวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายที่ได้จากแนวคิดพื้นฐานต่างๆและวิธีที่นำเสนอใหม่ แล้วนำมาเปรียบเทียบในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ทั้งหมด 5 วิธี คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด วิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด และวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหายที่ได้ในแต่ละวิธี ด้วยมาตรวัดความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ หากวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายใดมีค่า RE ต่ำที่สุดจะเป็นตัวประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด

4.1 ตัวอย่างข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^k

งานวิจัยนี้ได้ทำตัวอย่างข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 2^3 และ 2^4 ดังนี้

4.1.1 ข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 ข้อ 6-8 (Montgomery, 2001: 278)

ตารางที่ 4.1 ผังข้อมูลตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^2

	B_1	B_2
A_1	28.00	25.00
A_2	38.00	33.00

เมื่อ A คือ เวลาในการเจริญเติบโตของไวรัส (12 และ 18 ชั่วโมง)

B คือ อาหารเลี้ยงเชื้อ (1 และ 2)

y_{ij} คือ การเจริญเติบโตของแบคทีเรีย ของปัจจัย A ระดับที่ i และปัจจัย B ระดับที่ j

4.1.2 ข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^3 (Box, Hunter and Hunter, 1978: 308)

ตารางที่ 4.2 ผังข้อมูลตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^3

	B_1		B_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	60.00	52.00	54.00	45.00
A_2	72.00	83.00	68.00	80.00

เมื่อ A คือ อุณหภูมิ (160 และ 180 $^\circ C$)

B คือ ความตั้งใจ (20 และ 40 %)

C คือ ตัวเร่ง (1 และ 2)

y_{ijk} คือ ผลผลิตที่ได้จากปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j และปัจจัย C ระดับที่ k

4.1.3 ข้อมูลการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 จากตัวอย่าง 6-5 (Montgomery, 2001: 265)

ตารางที่ 4.3 ผังข้อมูลตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2^4

	B_1				B_2			
	C_1		C_2		C_1		C_2	
	D_1	D_2	D_1	D_2	D_1	D_2	D_1	D_2
A_1	378.00	380.00	372.00	378.00	381.00	371.00	385.00	376.00
A_2	416.00	415.00	390.00	392.00	448.00	446.00	430.00	429.00

เมื่อ A คือ อุณหภูมิ (1 และ 2)

B คือ เวลา (1 และ 2)

C คือ ความดัน (1 และ 2)

D คือ การไหลของก๊าซ (1 และ 2)

$y_{ijk\ell}$ คือ ค่าเฉลี่ยความหนาของออกไซด์บนแผ่นเวเฟอร์ที่ได้รับปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่และ k และปัจจัย D ระดับที่ ℓ

4.2 การประมาณค่าข้อมูลสูญหาย

4.2.1 วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{11} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.2) มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_{11} &= 38+25-33 \\ &= 30\end{aligned}$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.16) มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_{122} &= (72+52+54+80)-(60+83+68) \\ &= 47\end{aligned}$$

3. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{2111} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.34) มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_{2111} &= (378+415+390+378+448+371+385+429) \\ &\quad -(380+372+392+381+446+430+376) \\ &= 417\end{aligned}$$

4.2.2 วิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{11} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.43) มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_{122} &= \frac{(25)(96)+(38)(96)-(25)^2-(38)^2+2(-1044.5)}{25+38} \\ &= 30\end{aligned}$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.51) มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_{122} &= \frac{\begin{bmatrix}(166)^2+(202)^2+(215)^2-2(54)^2-2(52)^2-2(80)^2 \\ -(60)(469)-(68)(469)-(83)(469)+4(5135)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}60+68+83+4(54)+4(52)+4(80) \\ -2(166)-2(202)-2(215)+469\end{bmatrix}} \\ &= 47\end{aligned}$$

4.2.3 วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{11} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.56) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{11} = \frac{(25+38+33)}{3}$$
$$= 32$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.56) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{122} = \frac{(60+52+54+72+83+68+80)}{7}$$
$$= 67$$

3. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{2111} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.56) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{2111} = \frac{\begin{bmatrix}378+380+372+378+381+371+385+376\\+415+390+392+448+446+430+429\end{bmatrix}}{15}$$
$$= 398.07$$

4.2.4 วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.57) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{122} = \frac{(54+68+80)}{3}$$
$$= 67.33$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{2111} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3. 57) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{2111} = \frac{(378+380+415)}{3}$$
$$= 391$$

4.2.5 วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง

1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{11} ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.60) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{11} = \left[\frac{(38-33)}{33} \times 25\right] + 25$$
$$= 28.79$$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{122} ซึ่งมีปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับต่ำ และปัจจัยที่ $k\ (C)$ อยู่ในระดับสูง ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.67) มีค่าเท่ากับ

$$\hat{y}_{122} = \left[\frac{52-60}{60} \times 54\right] + 54$$
$$= 46.80$$

3. การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 กำหนดข้อมูลสูญหายในตำแหน่ง y_{2111} ซึ่งมีปัจจัยที่หนึ่ง (A) อยู่ในระดับสูง และปัจจัยที่ $k\ (D)$ อยู่ในระดับต่ำ ค่าประมาณข้อมูลสูญหายจากสมการ (3.80) มีค่าเท่ากับ

$$sum_L = 390 + 448 + 430$$
$$= 1268$$
$$sum_H = 392 + 446 + 429$$
$$= 1267$$
$$\hat{y}_{2111} = \left[\frac{1268-1267}{1267} \times 415\right] + 415$$
$$= 415.33$$

4.3 ผลการเปรียบเทียบค่าประมาณข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยด้วยค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

4.3.1 ค่าประมาณข้อมูลสูญหาย

คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ของค่าประมาณข้อมูลสูญหาย เพื่อหาความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าของข้อมูลจริงกับข้อมูลที่มีการสูญหาย ดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 ค่าประมาณข้อมูลสูญหายและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

แฟกทอเรียล	ไม่มีข้อมูลสูญหาย	วิธีที่ 1		วิธีที่ 2		วิธีที่ 3		วิธีที่ 4		วิธีที่ 5	
		มีข้อมูลสูญหาย	RE (%)	มีข้อมูลสูญหาย	RE (%)	มีข้อมูลสูญหาย	RE (%)	มีข้อมูลสูญหาย	RE (%)	มีข้อมูลสูญหาย	RE (%)
2^2	28.00	30.00	7.14	30.00	7.14	32.00	14.29	-	-	28.79	2.82
2^3	45.00	47.00	4.44	47.00	4.44	67.00	48.89	67.33	49.62	46.80	4.00
2^4	416.00	417.00	0.24	-	-	398.07	4.31	391.00	6.01	415.33	0.16

หมายเหตุ: -ไม่มีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในวิธีดังกล่าว

จากตารางที่ 4.4 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 ค่าข้อมูลในตำแหน่ง y_{11} เท่ากับ 28.00 ซึ่งการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด ให้ค่าประมาณที่เท่ากัน มีค่าเท่ากับ 30.00 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 7.14% การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ มีค่าเท่ากับ 32.00 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 14.29% และการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงมีค่าเท่ากับ 28.79 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 2.82% ส่วนการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุดนั้นไม่มีการประมาณค่าในวิธีนี้ เนื่องจากตำแหน่งค่าของข้อมูลที่อยู่ใกล้กับตำแหน่งข้อมูลสูญหายที่สุดเป็นค่าเดียวกันกับค่าของข้อมูลที่เหลืออยู่ ซึ่งเป็นวิธีเดียวกันกับวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ

การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 ค่าข้อมูลในตำแหน่ง y_{122} เท่ากับ 45.00 ซึ่งการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด ให้ค่าประมาณที่เท่ากัน มีค่าเท่ากับ 47.00 มีค่าความ

คลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 4.44% การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ มีค่าเท่ากับ 67.00 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 48.89% การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด มีค่าเท่ากับ 67.33 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 49.62% และการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงมีค่าเท่ากับ 46.80 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 4.00%

การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 ค่าข้อมูลในตำแหน่ง y_{2111} เท่ากับ 416.00 ซึ่งการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดมีค่าเท่ากับ 417.00 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 0.24% การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ มีค่าเท่ากับ 398.07 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 4.31% การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด มีค่าเท่ากับ 391.00 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 6.01% และการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงมีค่าเท่ากับ 415.33 มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 0.16% ส่วนการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดนั้นไม่มีการประมาณค่าในวิธีนี้ เนื่องจากในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 ค่อนข้างมีความซับซ้อนในการคำนวณ

ทำให้สรุปได้ว่า ทั้งการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 2^3 และ 2^4 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุดและรองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดที่ให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายและร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือและวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายต่างไปจากค่าของข้อมูลที่ไม่มีการสูญหายอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

4.3.2 ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัย

เมื่อทำการประมาณค่าข้อมูลสูญหายแล้ว ค่าประมาณที่ได้อาจส่งผลกระทบต่อค่าผลรวมกำลังสอง และค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัย จึงต้องพิจารณาค่าทั้ง 2 ค่า ดังนี้

1. ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัย

1.1 การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

ตารางที่ 4.5 ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าของข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2

อิทธิพล	SS	วิธีที่ 1		วิธีที่ 2		วิธีที่ 3		วิธีที่ 5	
	ค่าจริง	SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)
A	81.00	64.00	20.99	64.00	20.99	49.00	39.51	74.06	8.57
B	16.00	25.00	56.25	25.00	56.25	36.00	125.00	19.31	20.69
AB	1.00	0.00	100.00	0.00	100.00	1.00	0.00	0.37	63.00

จากตารางที่ 4.5 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุด ยกเว้นอิทธิพล *AB* ที่วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มากกว่าวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด ที่ให้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ และร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ ให้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

1.2 การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

ตารางที่ 4.6 ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3

อิทธิพล	SS ค่าจริง	วิธีที่ 1		วิธีที่ 2		วิธีที่ 3		วิธีที่ 4		วิธีที่ 5	
		SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)
A	1,058.00	1,012.50	4.30	1,012.50	4.30	612.50	42.11	606.74	42.65	1,017.01	3.87
B	50.00	40.50	19.00	40.50	19.00	0.50	99.00	0.68	98.64	41.41	17.18
AB	4.50	2.00	55.56	2.00	55.56	32.00	611.11	33.33	640.75	2.21	50.89
C	4.50	8.00	77.78	8.00	77.78	98.00	2077.78	100.32	2129.41	7.61	69.11
AC	200.00	180.50	9.75	180.50	9.75	40.50	79.75	39.03	80.49	182.41	8.80
BC	0.00	0.50	-	0.50	-	60.50	-	62.33	-	0.41	-
ABC	0.50	0.00	100.00	0.00	100.00	50.00	9900.00	51.66	10232.72	0.01	98.00

หมายเหตุ: - ไม่สามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ได้

จากตารางที่ 4.6 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุด รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดที่ให้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ และร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ และวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

1.3 การทดลองแฟกทอเรียล 2^4

ตารางที่ 4.7 ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4

อิทธิพล	SS ค่าจริง	วิธีที่ 1		วิธีที่ 3		วิธีที่ 4		วิธีที่ 5	
		SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)	SS	RE (%)
A	7439.06	7482.25	0.58	6685.92	10.12	6400.00	13.97	7410.09	0.39
B	1314.06	1296.00	1.37	1659.14	26.26	1806.25	37.46	1326.28	0.93
AB	1139.06	1122.25	1.48	1461.72	28.33	1600.00	40.47	1150.44	1.00
C	430.56	441.00	2.42	264.63	38.54	210.25	51.17	423.61	1.61
AC	451.56	462.25	2.37	281.15	37.74	225.00	50.17	444.45	1.57
BC	60.06	64.00	6.56	10.68	82.22	2.25	96.25	57.49	4.28
ABC	0.56	0.25	55.36	27.38	4789.12	49.00	8650.00	0.84	50.00
D	10.56	12.25	16.00	1.52	85.61	9.00	14.77	9.50	10.04
AD	5.06	4.00	20.95	45.33	795.78	72.25	1327.87	5.85	15.61
BD	60.06	56.25	6.34	149.63	149.14	196.00	226.34	62.70	4.40
ABD	33.06	36.00	8.89	1.61	95.14	0.25	99.24	31.16	5.75
CD	5.06	6.25	23.52	4.98	1.50	16.00	216.21	4.33	14.43
ACD	0.06	0.00	100.00	22.40	37227.59	42.25	70316.67	0.17	183.33
BCD	1.56	2.25	44.23	10.45	569.81	25.00	1502.56	1.17	25.00
ABCD	0.06	0.00	100.00	22.40	37227.59	42.25	70316.67	0.17	183.33

จากตารางที่ 4.7 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุด ยกเว้นอิทธิพล *ACD* และ *ABCD* ที่วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มากกว่าวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ และวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าผลรวมกำลังสองของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

2. ค่าประมาณอิทธิพล

2.1 การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

ตารางที่ 4.8 ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2

อิทธิพล	ค่าประมาณอิทธิพลของค่าจริง	วิธีที่ 1		วิธีที่ 2		วิธีที่ 3		วิธีที่ 5	
		ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)
A	9.00	8.00	11.11	8.00	11.11	7.00	22.22	8.61	4.33
B	-4.00	-5.00	25.00	-5.00	25.00	-6.00	50.00	-4.39	9.75
AB	-1.00	0.00	100.00	0.00	100.00	1.00	200.00	-0.61	39.00

จากตารางที่ 4.8 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^2 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุด รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดที่ให้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆและร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ ให้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

2.2 การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

ตารางที่ 4.9 ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^3

อิทธิพล	ค่าประมาณอิทธิพลของค่าจริง	วิธีที่ 1		วิธีที่ 2		วิธีที่ 3		วิธีที่ 4		วิธีที่ 5	
		ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)
A	23.00	22.50	2.17	22.50	2.17	17.50	23.91	17.42	24.27	22.55	1.96
B	-5.00	-4.50	10.00	-4.50	10.00	0.50	110.00	0.58	111.65	-4.55	9.00
AB	1.50	1.00	33.33	1.00	33.33	-4.00	366.67	-4.08	372.17	1.05	30.00
C	1.50	2.00	33.33	2.00	33.33	7.00	366.67	7.08	372.17	1.95	30.00
AC	10.00	9.50	5.00	9.50	5.00	4.50	55.00	4.42	55.83	9.55	4.50
BC	0.00	0.50	-	0.50	-	5.50	-	5.58	-	0.45	-
ABC	0.50	0.00	100.00	0.00	100.00	-5.00	1100.00	-5.08	1116.50	0.05	90.00

หมายเหตุ: - ไม่สามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ได้

จากตารางที่ 4.9 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^3 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุด รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดที่ให้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆและร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ และวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

2.3 การทดลองแฟกทอเรียล 2^4

ตารางที่ 4.10 ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยและค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของค่าจริงและค่าข้อมูลที่ประมาณได้ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4

อิทธิพล	ค่าประมาณอิทธิพลของค่าจริง	วิธีที่ 1		วิธีที่ 3		วิธีที่ 4		วิธีที่ 5	
		ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)	ค่าประมาณอิทธิพล	RE (%)
A	43.13	43.25	0.28	40.88	5.21	40.00	7.26	43.04	0.21
B	18.13	18.00	0.72	20.37	12.33	21.25	17.21	18.21	0.44
AB	16.88	16.75	0.77	19.12	13.25	20.00	18.48	16.96	0.47
C	-10.38	-10.50	1.16	-8.13	21.64	-7.25	30.15	-10.29	0.87
AC	-10.63	-10.75	1.13	-8.38	21.13	-7.50	29.44	-10.54	0.85
BC	3.88	4.00	3.09	1.63	57.89	0.75	80.67	3.79	2.32
ABC	-0.38	-0.25	34.21	-2.62	588.49	-3.50	821.05	-0.46	21.05
D	-1.63	-1.75	7.36	0.62	137.81	1.50	192.02	-1.54	5.52
AD	1.13	1.00	11.50	3.37	197.90	4.25	276.11	1.21	7.08
BD	-3.88	-3.75	3.35	-6.12	57.64	-7.00	80.41	-3.96	2.06
ABD	2.88	3.00	4.17	0.63	77.99	-0.25	108.68	2.79	3.13
CD	1.13	1.25	10.62	-1.12	198.78	-2.00	276.99	1.04	7.96
ACD	-0.13	0.00	100.00	-2.37	1720.19	-3.25	2400.00	-0.21	61.54
BCD	-0.63	-0.75	19.05	1.62	356.55	2.50	496.83	-0.54	14.29
ABCD	0.13	0.00	100.00	2.37	1720.19	3.25	2400.00	0.21	61.54

จากตารางที่ 4.10 พบว่า การทดลองแฟกทอเรียล 2^4 การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ ใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด เพราะมีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยที่สุด รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ และวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2^k กรณีที่ไม่มีการทำซ้ำ ที่มีค่าสูญหาย 1 ค่า สามารถประมาณได้ทุกตำแหน่งที่มีข้อมูลสูญหาย วิธีการประมาณค่าสูญหายที่ได้จากแนวคิดพื้นฐานต่างๆและวิธีที่นำเสนอใหม่มีทั้งหมด 5 วิธี คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด วิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด และวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง โดยได้เสนอรูปแบบของการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k และให้ตัวอย่างการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 , 2^3และ 2^4

5.1 สรุปและอภิปรายผลการศึกษา

จากการศึกษาวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2^k กรณีที่ไม่มีการทำซ้ำ ผู้วิจัยได้นำเสนอรูปแบบ (Pattern) ของการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด และนำเสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายตัวใหม่ขึ้นมา นั่นคือ วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง แล้วนำวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายทั้ง 5 วิธีมาเปรียบเทียบกันด้วยร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

จากการพิจารณาค่าประมาณข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสอง และค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ พบว่า วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายทั้งการทดลองแฟกทอเรียล 2^2 , 2^3และ 2^4 มีค่าประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสองและค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆของวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากที่สุด รองลงมา คือ วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดที่ให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสอง และค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆเท่ากัน

ซึ่งทั้งวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด จะใช้ได้ดีภายใต้ข้อกำหนดว่าอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดนั้นต้องไม่มีนัยสำคัญ ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ และวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหาย ค่าผลรวมกำลังสอง และค่าประมาณอิทธิพลของปัจจัยต่างๆ แตกต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่มาก ทำให้มีร้อยละของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มาก

ทั้งนี้จากงานวิจัยนี้ พบว่า วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด และวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด มีวิธีการหาค่าประมาณข้อมูลสูญหายเป็นไปในรูปแบบเดียวกันกับการหาโดยกำหนดให้คอนทราสท์ (Contrast) มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งเป็นวิธีของ Draper และ Stoneman ทำให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายที่ได้มีค่าเท่ากัน

ส่วนวิธีของ Qumsiyeh และ Kirchner ได้เสนอวิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย ในการทดลองแฟกทอเรียล 2^4 ซึ่งกำหนดให้มีข้อมูลสูญหายในตำแหน่งค่าสังเกตที่มีทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น *abc* นั่นคือ ตำแหน่ง y_{2221} แล้วนำค่าสังเกตที่มีทรีตเมนต์คอมบิเนชั่น $ab(y_{2211})$, $ac(y_{2121})$, $bc(y_{1221})$ และ $abcd(y_{2222})$ มาหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย จากการใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง 6-5 ในหนังสือ (Montgomery, 2001: 265) ได้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายของแต่ละวิธี ดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 ค่าประมาณข้อมูลสูญหายในตำแหน่งเดียวกับวิธีของ Qumsiyeh และ Kirchner ที่ประมาณด้วยวิธีต่างๆ

ไม่มีข้อมูลสูญหาย	วิธีที่ 1	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5	Qumsiyeh และ Kirchner
430.00	431.00	397.13	401.40	429.34	413.00

จากตารางที่ 5.1 พบว่า ค่าข้อมูลในตำแหน่ง y_{2221} มีค่าเท่ากับ 430.00 ซึ่งการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด มีค่าเท่ากับ 431.00 วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ มีค่าเท่ากับ 397.13 วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด มีค่าเท่ากับ 401.40 วิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง มีค่าเท่ากับ 429.34 และวิธีของ Qumsiyeh และ Kirchner มีค่าเท่ากับ 413.00 ทำให้สรุปได้ว่า การประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด และวิธีสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง ได้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลจริงมากกว่าวิธีของ Qumsiyeh และ Kirchner

ส่วนวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เหลือ และวิธีการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในตำแหน่งที่อยู่ใกล้ที่สุด ให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหาย ต่างไปจากค่าของข้อมูลจริงอยู่ค่อนข้างมาก

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ด้านการนำไปใช้ประโยชน์

จากการศึกษางานวิจัยในครั้งนี้พบว่า วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุดและวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด ให้ค่าประมาณข้อมูลสูญหายเท่ากัน ดังนั้น หากเลือกใช้ 2 วิธีนี้ควรเลือกใช้วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด เนื่องจากง่ายและสะดวกต่อการคำนวณ อีกทั้งยังมีรูปแบบการประมาณค่าข้อมูลสูญหายอีกด้วย ส่วนวิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุดนั้นมีสูตรของการคำนวณที่ค่อนข้างซับซ้อน

5.2.2 ด้านการวิจัยครั้งต่อไป

ควรทำการศึกษาการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในการทดลองแฟกทอเรียล 2^k ในกรณีมีซ้ำหรือการทดลองอื่นๆ เพราะยังมีการทดลองอื่นอีกมากที่เหมาะสมกับงานวิจัยในแต่ละด้าน

บรรณานุกรม

จิราวัลย์ จิตรถเวช. 2552. **การวางแผนและการวิเคราะห์การทดลอง Design and Analysis of Experimental**. กรุงเทพมหานคร : ไทยพัฒนารายวันการพิมพ์.

ดวงฤดี เหง้าพรมนิล. 2545. **การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียวเมื่อมีค่าสูญหายในแผนการทดลอง**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ประชุม สุวัตถี. 2552. **การสำรวจด้วยตัวอย่าง การชักตัวอย่างและการวิเคราะห์**. กรุงเทพมหานคร: สำนักงานกิจการโรงพิมพ์ องค์การสงเคราะห์ทหารผ่านศึก ในพระบรมราชูปถัมภ์.

ประพจน์ ดำรงสุทธิพงศ์. 2546. **การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสูญหายในการวางแผนการทดลองแบบสุ่มบล็อกสมบูรณ์**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปราณี ศรีภา. 2532. **การศึกษาวิธีเปรียบเทียบวิธีวิเคราะห์เมื่อมีค่าสูญหายในบล็อกใดบล็อกหนึ่งในแผนการทดลองบล็อกไม่สมบูรณ์**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รุ่งกานต์ กาใจดำ. 2540. **การประมาณค่าสูญหายจากแผนการทดลอง**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

วิสุทธิดา ศรีดวงโชติ. 2556. **การศึกษาประสิทธิภาพวิธีประมาณค่าสูญหายเพื่อใช้ในการวางแผนการทดลองแบบแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย ที่จัดทรีตเมนต์ในรูปแบบสุ่มในบล็อคสมบูรณ์**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ศุภลักษณ์ กรรณิกา. 2549. **การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสูญหายในการวางแผนการทดลองแบบจัตุรัสละติน**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. 2558. **พจนานุกรมศัพท์สถิติศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา**. กรุงเทพมหานคร: สำนักงานราชบัณฑิตยสภา.

Box, G.E.P.; Hunter W.G. and Hunter, J.S. 1978. **Statistics for Experiments: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building**. New York: Wiley.

Draper, N. and Stoneman, D. 1964. Estimating Missing Values in Unreplicated Two-leval Factorial and Fractional Designs. **Biometrics**. 1964 (September): 443-458.

Ekwueme, C.L. 2014. **Estimation of Missing Values in Replicated Factorial Experiment**. A Thesis Sumitted to The Postgraduate School Ahmadu Bello University, Zaria Nigeria.

John, P.W.M. 1979. Missing Point in 2^k and 2^{k-p} Factorial Designs. **Technometrics**. 21, 2 (May): 225-228.

Montgomery, D.G. 2001. **Design and Analysis of Experiments**. 5th ed. New York: Wiley.

Qumsiyeh, M. and Kirchner, K. 2011. Estimation Methods for Missing data in Un-replicated 2^k Factorial and 2^{k-p} Fractional Factorial Designs. **Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications**. 5 (2): 131-147.

Wu, C.F. Jeff and Hamada, M. 2000. **Experiments : Planning Analysis and Parameter Design Optimization**. New York: Wiley.

ภาคผนวก

ภาคผนวก

การประมาณค่าข้อมูลสูญหาย

1. วิธีผลรวมกำลังสองของอิทธิพลร่วมอันดับสูงสุดมีค่าต่ำสุด

1.1 การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

จาก $SSAB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^{\ 2} - \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^{\ 2}}{b} - \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^{\ 2}}{a} + \frac{y_{..}^{\ 2}}{ab}$

เมื่อ $a=2, b=2$

1.1.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{11}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{12}+x)^2}{2} - \frac{(y_{21}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSAB}{\partial x} = 2x - y_{12} - x - y_{21} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2} = 0$$

$$\frac{(y'_{..}+x)}{2} - y_{12} - y_{21} = 0$$

$$y'_{..} + x = 2y_{21} + 2y_{12}$$

$$x = 2y_{21} + 2y_{12} - y'_{..}$$

$$= 2y_{21} + 2y_{12} - \left(y_{12} + y_{21} + y_{22}\right)$$

$$= y_{21} + y_{12} - y_{22}$$

ดังนั้น $x = y_{21} + y_{12} - y_{22}$

1.1.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{12}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{22}+x)^2}{2} - \frac{(y_{11}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSAB}{\partial x} = 2x - y_{22} - x - y_{11} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2} = 0$$

$$\frac{(y'_{..}+x)}{2} - y_{22} - y_{11} = 0$$

$$y'_{..} + x = 2y_{11} + 2y_{22}$$

$$x = 2y_{11} + 2y_{22} - y'_{..}$$

$$= 2y_{11} + 2y_{22} - \left(y_{22} + y_{11} + y_{21}\right)$$

$$= y_{11} + y_{22} - y_{21}$$

ดังนั้น $x = y_{11} + y_{22} - y_{21}$

1.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{21}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{11}+x)^2}{2} - \frac{(y_{22}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSAB}{\partial x} = 2x - y_{11} - x - y_{22} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2} = 0$$

$$\frac{(y'_{..}+x)}{2} - y_{11} - y_{22} = 0$$

$$y'_{..} + x = 2y_{22} + 2y_{11}$$

$$x = 2y_{22} + 2y_{11} - y'_{..}$$

$$= 2y_{22} + 2y_{11} - \left(y_{11} + y_{22} + y_{12}\right)$$

$$= y_{22} + y_{11} - y_{12}$$

ดังนั้น $x = y_{22} + y_{11} - y_{12}$

1.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{22}

จาก $SSAB = x^2 - \frac{(y_{21}+x)^2}{2} - \frac{(y_{12}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSAB}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSAB}{\partial x} = 2x - y_{21} - x - y_{12} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2} = 0$$

$$\frac{(y'_{..}+x)}{2} - y_{21} - y_{12} = 0$$

$$y'_{..} + x = 2y_{12} + 2y_{21}$$

$$x = 2y_{12} + 2y_{21} - y'_{..}$$

$$= 2y_{12} + 2y_{21} - (y_{11} + y_{12} + y_{21})$$

$$= y_{12} + y_{21} - y_{11}$$

ดังนั้น $x = y_{12} + y_{21} - y_{11}$

1.2 การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

จาก $SSABC = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}{}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}{}^2}{c} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c} y_{i.k}{}^2}{b} - \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{.jk}{}^2}{a}$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i..}{}^2}{bc} + \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}{}^2}{ac} + \frac{\sum_{k=1}^{c} y_{...k}{}^2}{ab} - \frac{y_{...}{}^2}{abc}$$

เมื่อ $a = 2, b = 2, c = 2$

1.2.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{111}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{211}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{1..}+x)^2}{4}$$

$$+ \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{112}-x-y_{121}-x-y_{211}-x+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{112}-y_{121}-y_{211}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{212}-y_{221}-y_{122}=x$$

ดังนั้น $x=y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{212}-y_{221}-y_{122}$

1.2.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{112}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{111}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{122}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{212}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{111}-x-y_{122}-x-y_{212}-x+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{111}-y_{122}-y_{212}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{121}-y_{222}=x$$

ดังนั้น $x=y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{121}-y_{222}$

1.2.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{121}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{122}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{111}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{221}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{122}-x-y_{111}-x-y_{221}-x+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{122}-y_{111}-y_{221}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{112}-y_{222}=x$$

ดังนั้น $x=y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{112}-y_{222}$

1.2.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{122}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{121}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{112}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{222}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{121}-x-y_{112}-x-y_{222}-x+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{121}-y_{112}-y_{222}+\frac{\left(y'_{1..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{212}-y_{221}=x$$

ดังนั้น $x=y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{212}-y_{221}$

1.2.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{211}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{212}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{221}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{111}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{221}-x-y_{221}-x-y_{111}-x+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{221}-y_{221}-y_{111}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{112}-y_{121}-y_{222}=x$$

ดังนั้น $x=y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{112}-y_{121}-y_{222}$

1.2.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{212}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{211}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{222}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{112}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{211}-x-y_{222}-x-y_{112}-x+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{211}-y_{222}-y_{112}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.1.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{221}-y_{122}=x$$

ดังนั้น $x=y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{221}-y_{122}$

1.2.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{221}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{222}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{211}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{121}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{222}-x-y_{211}-x-y_{121}-x+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{222}-y_{211}-y_{121}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..1}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{212}-y_{122}=x$$

ดังนั้น $x=y_{211}+y_{112}+y_{121}+y_{222}-y_{111}-y_{212}-y_{122}$

1.2.8 มีข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{222}

$$SSABC=x^2-\frac{\left(y_{221}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{212}+x\right)^2}{2}-\frac{\left(y_{122}+x\right)^2}{2}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)^2}{4}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)^2}{4}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)^2}{4}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABC}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABC}{\partial x}=2x-y_{221}-x-y_{212}-x-y_{122}-x+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}$$
$$+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4} \qquad =0$$
$$-x-y_{221}-y_{212}-y_{122}+\frac{\left(y'_{2..}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{.2.}+x\right)}{2}+\frac{\left(y'_{..2}+x\right)}{2}-\frac{\left(y'_{...}+x\right)}{4}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{112}-y_{121}=x$$

ดังนั้น $x=y_{111}+y_{212}+y_{221}+y_{122}-y_{211}-y_{112}-y_{121}$

1.3 การทดลองแฟกทอเรียล 2^4

จาก $SSABCD=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{ijk\ell}{}^2-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}y_{ijk.}{}^2}{d}-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{d}y_{ij.\ell}{}^2}{c}$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{c=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{i.k\ell}{}^2}{b}-\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{.jk\ell}{}^2}{a}+\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij..}{}^2}{cd}+\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}y_{i.k.}{}^2}{bd}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{d}y_{i..\ell}{}^2}{bc}+\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}y_{.jk.}{}^2}{ad}+\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{d}y_{.j.\ell}{}^2}{ac}+\frac{\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{d}y_{..k\ell}{}^2}{ab}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i...}{}^2}{bcd}-\frac{\sum_{j=1}^{b}y_{.j..}{}^2}{acd}-\frac{\sum_{k=1}^{c}y_{..k.}{}^2}{abd}-\frac{\sum_{\ell=1}^{d}y_{...\ell}{}^2}{abc}+\frac{y_{....}{}^2}{abcd}$$

เมื่อ $a=2,b=2,c=2,d=2$

1.3.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1111}

$$SSABCD=x^2-\frac{(y_{1112}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1121}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1211}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2111}+x)^2}{2}$$

$$+\frac{(y'_{11..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4}$$

$$+\frac{(y'_{..11}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{1...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}$$

$$+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=2x-y_{1112}-x-y_{1121}-x-y_{1211}-x-y_{2111}-x+\frac{(y'_{11..}+x)}{2}$$

$$+\frac{(y'_{1.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{1..1}+x)}{2}+\frac{(y'_{.11.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.1.1}+x)}{2}+\frac{(y'_{..11}+x)}{2}$$

$$-\frac{(y'_{1...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.1..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..1.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...1}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8}=0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$$

$$-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222}=x$$

ดังนั้น $x=y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$

$$-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222}$$

1.3.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1112}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{11..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.2}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..12}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 2x - y_{1111} - x - y_{1122} - x - y_{1212} - x - y_{2112} - x + \frac{(y'_{11..}+x)}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{1.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{1..2}+x)}{2} + \frac{(y'_{.11.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.1.2}+x)}{2} + \frac{(y'_{..12}+x)}{2}$$
$$- \frac{(y'_{1...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.1..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..1.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...2}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$$
$$- y_{2111} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222} = x$$

ดังนั้น $x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$
$$- y_{2111} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222}$$

1.3.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1121}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1221}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{11..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..21}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x} &= 2x - y_{1122} - x - y_{1111} - x - y_{2121} - x - y_{1221} - x + \frac{(y'_{11..}+x)}{2} \\ &\quad + \frac{(y'_{1.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{1..1}+x)}{2} + \frac{(y'_{1.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.1.1}+x)}{2} + \frac{(y'_{..21}+x)}{2} \\ &\quad - \frac{(y'_{1...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.1..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..2.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...1}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0 \\ &\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\quad y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222} \\ &\quad - y_{2111} - y_{1112} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$

$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222}$$

1.3.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1122}

$$\begin{aligned}SSABCD &= x^2 - \frac{(y_{1121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2122}+x)^2}{2} \\ &\quad + \frac{(y'_{11..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.2}+x)^2}{4} \\ &\quad + \frac{(y'_{..22}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8} \\ &\quad + \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x} &= 2x - y_{1121} - x - y_{1112} - x - y_{1222} - x - y_{2122} - x + \frac{(y'_{11..}+x)}{2} \\ &\quad + \frac{(y'_{1.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{1..2}+x)}{2} + \frac{(y'_{.12.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.1.2}+x)}{2} + \frac{(y'_{..22}+x)}{2} \\ &\quad - \frac{(y'_{1...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.1..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..2.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...2}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0 \\ &\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\quad y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222} \\ &\quad - y_{1111} - y_{2112} - y_{2121} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} - y_{2222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222}$

$$- y_{1111} - y_{2112} - y_{2121} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} - y_{2222}$$

1.3.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1211}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{12..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..11}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 2x - y_{1212} - x - y_{1221} - x - y_{1111} - x - y_{2211} - x + \frac{(y'_{12..}+x)}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{1.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{1..1}+x)}{2} + \frac{(y'_{.21.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.2.1}+x)}{2} + \frac{(y'_{..11}+x)}{2}$$
$$- \frac{(y'_{1...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.2..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..1.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...1}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$$
$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222} = x$$

ดังนั้น $x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$
$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{2212} - y_{2221} - y_{1222}$$

1.3.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1212}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2212}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{12..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..12}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x} &= 2x-y_{1211}-x-y_{1222}-x-y_{1112}-x-y_{2212}-x+\frac{(y'_{12..}+x)}{2}\\ &\quad+\frac{(y'_{1.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{1..2}+x)}{2}+\frac{(y'_{.21.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.2.2}+x)}{2}+\frac{(y'_{..12}+x)}{2}\\ &\quad-\frac{(y'_{1...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.2..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..1.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...2}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ &\quad y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}\\ &\quad-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1221}-y_{2222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$

$$-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1221}-y_{2222}$$

1.3.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1221}

$$\begin{aligned}SSABCD &= x^2-\frac{(y_{1222}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1211}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1121}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2221}+x)^2}{2}\\ &\quad+\frac{(y'_{12..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{1..1}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4}\\ &\quad+\frac{(y'_{..21}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{1...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}\\ &\quad+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x} &= 2x-y_{1211}-x-y_{1222}-x-y_{1112}-x-y_{2212}-x+\frac{(y'_{12..}+x)}{2}\\ &\quad+\frac{(y'_{1.2.}+x)}{2}+\frac{(y'_{1..1}+x)}{2}+\frac{(y'_{.22.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.2.1}+x)}{2}+\frac{(y'_{..21}+x)}{2}\\ &\quad-\frac{(y'_{1...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.2..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..2.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...1}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ &\quad y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}\\ &\quad-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{2222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$

$$-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{2222}$$

1.3.8 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{1222}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{1221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{12..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{1..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..22}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{1...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 2x - y_{1221} - x - y_{1212} - x - y_{1122} - x - y_{2222} - x + \frac{(y'_{12..}+x)}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{1.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{1..2}+x)}{2} + \frac{(y'_{.22.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.2.2}+x)}{2} + \frac{(y'_{..22}+x)}{2}$$
$$- \frac{(y'_{1...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.2..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..2.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...2}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$$
$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221} = x$$

ดังนั้น $x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$
$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2212} - y_{2221}$$

1.3.9 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2111}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1111}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..11}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{1221}-x-y_{1212}-x-y_{1122}-x-y_{2222}-x+\frac{(y'_{21..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{2.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{2..1}+x)}{2}+\frac{(y'_{.11.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.1.1}+x)}{2}+\frac{(y'_{..11}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{2...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.1..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..1.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...1}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\&\vdots \qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}\\&-y_{1112}-y_{1121}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}$

$$-y_{1112}-y_{1121}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222}$$

1.3.10 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2112}

$$\begin{aligned}SSABCD=x^2&-\frac{(y_{2111}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2122}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2212}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1112}+x)^2}{2}\\&+\frac{(y'_{21..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.11.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.1.2}+x)^2}{4}\\&+\frac{(y'_{..12}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{2...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}\\&+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{2111}-x-y_{2122}-x-y_{2212}-x-y_{1112}-x+\frac{(y'_{21..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{2.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{2..2}+x)}{2}+\frac{(y'_{.11.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.1.2}+x)}{2}+\frac{(y'_{..12}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{2...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.1..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..1.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...2}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\&\vdots \qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}\\&-y_{1111}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$

$$-y_{1111}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222}$$

1.3.11 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2121}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1121}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.1}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..21}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 2x - y_{2122} - x - y_{2111} - x - y_{2221} - x - y_{1121} - x + \frac{(y'_{21..}+x)}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{2.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{2..1}+x)}{2} + \frac{(y'_{.12.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.1.1}+x)}{2} + \frac{(y'_{..21}+x)}{2}$$
$$- \frac{(y'_{2...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.1..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..2.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...1}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222}$$
$$- y_{1111} - y_{2121} - y_{1122} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} - y_{2222} = x$$

ดังนั้น $x = y_{2111} + y_{1112} + y_{1121} + y_{2122} + y_{1211} + y_{2212} + y_{2221} + y_{1222}$
$$- y_{1111} - y_{2121} - y_{1122} - y_{2211} - y_{1212} - y_{1221} - y_{2222}$$

1.3.12 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2122}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1122}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{21..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.12.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..22}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.1..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{2121}-x-y_{2112}-x-y_{2222}-x-y_{1122}-x+\frac{(y'_{21..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{2.2.}+x)}{2}+\frac{(y'_{2..2}+x)}{2}+\frac{(y'_{.12.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.1.2}+x)}{2}+\frac{(y'_{..22}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{2...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.1..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..2.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...2}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\&\vdots \qquad\qquad \vdots\\&y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}\\&-y_{2111}-y_{1112}-y_{1121}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}$

$$-y_{2111}-y_{1112}-y_{1121}-y_{1211}-y_{2212}-y_{2221}-y_{1222}$$

1.3.13 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2211}

$$\begin{aligned}SSABCD&=x^2-\frac{(y_{2212}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2221}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2111}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1211}+x)^2}{2}\\&+\frac{(y'_{22..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4}\\&+\frac{(y'_{..11}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{2...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}\\&+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{2212}-x-y_{2221}-x-y_{2111}-x-y_{1211}-x+\frac{(y'_{22..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{2.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{2..1}+x)}{2}+\frac{(y'_{.21.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.2.1}+x)}{2}+\frac{(y'_{..11}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{2...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.2..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..1.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...1}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\&\vdots \qquad\qquad \vdots\\&y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}\\&-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$

$$-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{1212}-y_{1221}-y_{2222}$$

1.3.14 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2212}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1212}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{22..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.21.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..12}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..1.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial SSABCD}{\partial x} = 2x - y_{2211} - x - y_{2222} - x - y_{2112} - x - y_{1212} - x + \frac{(y'_{22..}+x)}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{2.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{2..2}+x)}{2} + \frac{(y'_{.21.}+x)}{2} + \frac{(y'_{.2.2}+x)}{2} + \frac{(y'_{..12}+x)}{2}$$
$$- \frac{(y'_{2...}+x)}{4} - \frac{(y'_{.2..}+x)}{4} - \frac{(y'_{..1.}+x)}{4} - \frac{(y'_{...2}+x)}{4} + \frac{(y'_{....}+x)}{8} = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$$
$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2221} - y_{1222} = x$$

ดังนั้น $x = y_{1111} + y_{2112} + y_{2121} + y_{1122} + y_{2211} + y_{1212} + y_{1221} + y_{2222}$
$$- y_{2111} - y_{1112} - y_{1121} - y_{2122} - y_{1211} - y_{2221} - y_{1222}$$

1.3.15 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2221}

$$SSABCD = x^2 - \frac{(y_{2222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{2121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{1221}+x)^2}{2}$$
$$+ \frac{(y'_{22..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{2..1}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.1}+x)^2}{4}$$
$$+ \frac{(y'_{..21}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{2...}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8} - \frac{(y'_{...1}+x)^2}{8}$$
$$+ \frac{(y'_{....}+x)^2}{16}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{2222}-x-y_{2211}-x-y_{2121}-x-y_{1221}-x+\frac{(y'_{22..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{2.2.}+x)}{2}+\frac{(y'_{2..1}+x)}{2}+\frac{(y'_{.22.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.2.1}+x)}{2}+\frac{(y'_{..21}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{2...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.2..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..2.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...1}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\&\vdots \qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}\\&-y_{2111}-y_{1112}-y_{1121}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{1222} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{1111}+y_{2112}+y_{2121}+y_{1122}+y_{2211}+y_{1212}+y_{1221}+y_{2222}$

$$-y_{2111}-y_{1112}-y_{1121}-y_{2122}-y_{1211}-y_{2212}-y_{1222}$$

1.3.16 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{2222}

$$\begin{aligned}SSABCD=x^2&-\frac{(y_{2221}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2212}+x)^2}{2}-\frac{(y_{2122}+x)^2}{2}-\frac{(y_{1222}+x)^2}{2}\\&+\frac{(y'_{22..}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{2.2.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{2..2}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.22.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{.2.2}+x)^2}{4}\\&+\frac{(y'_{..22}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{2...}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{.2..}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{..2.}+x)^2}{8}-\frac{(y'_{...2}+x)^2}{8}\\&+\frac{(y'_{....}+x)^2}{16}\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial SSABCD}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial SSABCD}{\partial x}&=2x-y_{2221}-x-y_{2212}-x-y_{2122}-x-y_{1222}-x+\frac{(y'_{22..}+x)}{2}\\&+\frac{(y'_{2.2.}+x)}{2}+\frac{(y'_{2..2}+x)}{2}+\frac{(y'_{.22.}+x)}{2}+\frac{(y'_{.2.2}+x)}{2}+\frac{(y'_{..22}+x)}{2}\\&-\frac{(y'_{2...}+x)}{4}-\frac{(y'_{.2..}+x)}{4}-\frac{(y'_{..2.}+x)}{4}-\frac{(y'_{...2}+x)}{4}+\frac{(y'_{....}+x)}{8} \quad = 0\\&\vdots \qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}\\&-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221} \quad = x\end{aligned}$$

ดังนั้น $x=y_{2111}+y_{1112}+y_{1121}+y_{2122}+y_{1211}+y_{2212}+y_{2221}+y_{1222}$

$$-y_{1111}-y_{2112}-y_{2121}-y_{1122}-y_{2211}-y_{1212}-y_{1221}$$

2. วิธีการทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าต่ำที่สุด

จาก $C.V. = \dfrac{\sqrt{MSE}}{\bar{y}} = \dfrac{\sqrt{SSABC...}}{\bar{y}}$

2.1. การทดลองแฟกทอเรียล 2^2

กำหนดให้ $SSAB$ ในพจน์ของค่าข้อมูลที่สูญหาย x แทนด้วย B จะได้

$$C.V. = \frac{(B+R)^{1/2}}{\left[\dfrac{(y'_{..}+x)}{4}\right]} \quad ; \ R \text{ คือ ค่าคงที่}$$

2.1.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{11}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{12}+x)^2}{2} - \frac{(y_{21}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\dfrac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{4(y'_{..}+x)\left(\dfrac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\dfrac{\partial}{\partial x}(B+R) - 4(B+R)^{1/2}\dfrac{\partial}{\partial x}(y'_{..}+x)}{(y'_{..}+x)^2} = 0$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(2x - y_{12} - x - y_{21} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y_{12}y'_{..} + y_{21}y'_{..} - y_{12}^2 - y_{21}^2 + 2R}{y_{12} + y_{21}}$$

ดังนั้น $x = \dfrac{y_{12}y'_{..} + y_{21}y'_{..} - y_{12}^2 - y_{21}^2 + 2R}{y_{12} + y_{21}}$

2.1.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{12}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{22}+x)^2}{2} - \frac{(y_{11}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{4\left(y'_{..}+x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(B+R\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B+R\right) - 4\left(B+R\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(y'_{..}+x\right)}{\left(y'_{..}+x\right)^2} = 0$$

$$2\left(B+R\right) = \left(y'_{..}+x\right)\frac{\partial}{\partial x}B$$

$$2\left(B+R\right) = \left(y'_{..}+x\right)\left(2x - y_{22} - x - y_{11} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y_{11}y'_{..} + y_{22}y'_{..} - y_{11}^2 - y_{22}^2 + 2R}{y_{11}+y_{22}}$$

ดังนั้น $x = \frac{y_{11}y'_{..} + y_{22}y'_{..} - y_{11}^2 - y_{22}^2 + 2R}{y_{11}+y_{22}}$

2.1.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{21}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{11}+x)^2}{2} - \frac{(y_{22}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{4\left(y'_{..}+x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(B+R\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B+R\right) - 4\left(B+R\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(y'_{..}+x\right)}{\left(y'_{..}+x\right)^2} = 0$$

$$2\left(B+R\right) = \left(y'_{..}+x\right)\frac{\partial}{\partial x}B$$

$$2\left(B+R\right) = \left(y'_{..}+x\right)\left(2x - y_{11} - x - y_{22} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y_{22}y'_{..} + y_{11}y'_{..} - y_{22}^2 - y_{11}^2 + 2R}{y_{22}+y_{11}}$$

ดังนั้น $x = \frac{y_{22}y'_{..} + y_{11}y'_{..} - y_{22}^2 - y_{11}^2 + 2R}{y_{22}+y_{11}}$

2.1.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{22}

$$SSAB = x^2 - \frac{(y_{21}+x)^2}{2} - \frac{(y_{12}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{..}+x)^2}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{4\left(y'_{..}+x\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(B+R\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B+R\right) - 4\left(B+R\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(y'_{..}+x\right)}{\left(y'_{..}+x\right)^2} = 0$$

$$2\left(B+R\right) = \left(y'_{..}+x\right)\frac{\partial}{\partial x}B$$

$$2\left(B+R\right) = \left(y'_{..}+x\right)\left(2x - y_{21} - x - y_{12} - x + \frac{(y'_{..}+x)}{2} \right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y_{21}y'_{..} + y_{12}y'_{..} - y_{21}^2 - y_{12}^2 + 2R}{y_{21}+y_{12}}$$

ดังนั้น $x = \frac{y_{21}y'_{..} + y_{12}y'_{..} - y_{21}^2 - y_{12}^2 + 2R}{y_{21}+y_{12}}$

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2^3

กำหนดให้ $SSABC$ ในพจน์ของค่าข้อมูลที่สูญหาย x แทนด้วย B จะได้

$$C.V.=\frac{(B+R)^{1/2}}{\left[\frac{(y'_{..}+x)}{8}\right]} \quad ; \ R \text{ คือ ค่าคงที่}$$

2.2.1 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{111}

$$SSABC=x^2-\frac{(y_{112}+x)^2}{2}-\frac{(y_{121}+x)^2}{2}-\frac{(y_{211}+x)^2}{2}+\frac{(y'_{1..}+x)^2}{4}$$
$$+\frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4}+\frac{(y'_{..1}+x)^2}{4}-\frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x}=0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x}=\frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R)-8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2}=0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B=2(B+R)$$

$$2(B+R)=(y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l}2x-y_{112}-x-y_{121}-x-y_{211}-x+\frac{(y'_{1..}+x)}{2}\\ +\frac{(y'_{.1.}+x)}{2}+\frac{(y'_{..1}+x)}{2}-\frac{(y'_{...}+x)}{4}\end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x=\frac{y'^{\,2}_{1..}+y'^{\,2}_{.1.}+y'^{\,2}_{..1}-2y^2_{112}-2y^2_{121}-2y^2_{211}-y_{122}y'_{...}-y_{212}y'_{...}-y_{221}y'_{...}+4R}{y_{122}+y_{212}+y_{221}+4y_{112}+4y_{121}+4y_{211}-2y'_{1..}-2y'_{.1.}-2y'_{..1}+y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x=\frac{y'^{\,2}_{1..}+y'^{\,2}_{.1.}+y'^{\,2}_{..1}-2y^2_{112}-2y^2_{121}-2y^2_{211}-y_{122}y'_{...}-y_{212}y'_{...}-y_{221}y'_{...}+4R}{y_{122}+y_{212}+y_{221}+4y_{112}+4y_{121}+4y_{211}-2y'_{1..}-2y'_{.1.}-2y'_{..1}+y'_{...}}$$

2.2.2 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{112}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{212}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{1..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..2}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{111} - x - y_{122} - x - y_{212} - x + \frac{(y'_{1..}+x)}{2} \\ + \frac{(y'_{.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..2}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{1..} + y'^{\,2}_{.1.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{111} - 2y^2_{122} - 2y^2_{212} - y_{121}y'_{...} - y_{211}y'_{...} - y_{222}y'_{...} + 4R}{y_{121} + y_{211} + y_{222} + 4y_{111} + 4y_{122} + 4y_{212} - 2y'_{1..} - 2y'_{.1.} - y'_{..2} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{1..} + y'^{\,2}_{.1.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{111} - 2y^2_{122} - 2y^2_{212} - y_{121}y'_{...} - y_{211}y'_{...} - y_{222}y'_{...} + 4R}{y_{121} + y_{211} + y_{222} + 4y_{111} + 4y_{122} + 4y_{212} - 2y'_{1..} - 2y'_{.1.} - y'_{..2} + y'_{...}}$$

2.2.3 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{121}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{122}+x)^2}{2} - \frac{(y_{111}+x)^2}{2} - \frac{(y_{221}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{1..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{122} - x - y_{111} - x - y_{221} - x + \frac{(y'_{1..}+x)}{2} \\ + \frac{(y'_{.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..1}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{1..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..1} - 2y^2_{122} - 2y^2_{111} - 2y^2_{221} - y_{112}y'_{...} - y_{211}y'_{...} - y_{222}y'_{...} + 4R}{y_{112} + y_{211} + y_{222} + 4y_{122} + 4y_{111} + 4y_{221} - 2y'_{1..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..1} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{1..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..1} - 2y^2_{122} - 2y^2_{111} - 2y^2_{221} - y_{112}y'_{...} - y_{211}y'_{...} - y_{222}y'_{...} + 4R}{y_{112} + y_{211} + y_{222} + 4y_{122} + 4y_{111} + 4y_{221} - 2y'_{1..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..1} + y'_{...}}$$

2.2.4 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{122}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{121}+x)^2}{2} - \frac{(y_{112}+x)^2}{2} - \frac{(y_{222}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{1..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..2}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{121} - x - y_{112} - x - y_{222} - x + \frac{(y'_{1..}+x)}{2} \\ + \frac{(y'_{.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..2}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{1..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{121} - 2y^2_{112} - 2y^2_{222} - y_{111}y'_{...} - y_{221}y'_{...} - y_{212}y'_{...} + 4R}{y_{111} + y_{221} + y_{212} + 4y_{121} + 4y_{112} + 4y_{222} - 2y'_{1..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..2} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{1..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{121} - 2y^2_{112} - 2y^2_{222} - y_{111}y'_{...} - y_{221}y'_{...} - y_{212}y'_{...} + 4R}{y_{111} + y_{221} + y_{212} + 4y_{121} + 4y_{112} + 4y_{222} - 2y'_{1..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..2} + y'_{...}}$$

2.2.5 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{211}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{111}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{221} - x - y_{221} - x - y_{111} - x + \frac{(y'_{2..}+x)}{2} \\ + \frac{(y'_{.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..1}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.1.} + y'^{\,2}_{..1} - 2y^2_{212} - 2y^2_{221} - 2y^2_{111} - y_{222}y'_{...} - y_{112}y'_{...} - y_{121}y'_{...} + 4R}{y_{222} + y_{112} + y_{121} + 4y_{212} + 4y_{221} + 4y_{111} - 2y'_{2..} - 2y'_{.1.} - 2y'_{..1} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.1.} + y'^{\,2}_{..1} - 2y^2_{212} - 2y^2_{221} - 2y^2_{111} - y_{222}y'_{...} - y_{112}y'_{...} - y_{121}y'_{...} + 4R}{y_{222} + y_{112} + y_{121} + 4y_{212} + 4y_{221} + 4y_{111} - 2y'_{2..} - 2y'_{.1.} - 2y'_{..1} + y'_{...}}$$

2.2.6 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{212}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{112}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.1.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..2}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{211} - x - y_{222} - x - y_{112} - x \\ + \frac{(y'_{2..}+x)}{2} + \frac{(y'_{.1.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..2}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.1.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{211} - 2y^2_{222} - 2y^2_{112} - y_{221}y'_{...} - y_{111}y'_{...} - y_{122}y'_{...} + 4R}{y_{221} + y_{111} + y_{122} + 4y_{211} + 4y_{222} + 4y_{112} - 2y'_{2..} - 2y'_{.1.} - 2y'_{..2} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.1.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{211} - 2y^2_{222} - 2y^2_{112} - y_{221}y'_{...} - y_{111}y'_{...} - y_{122}y'_{...} + 4R}{y_{221} + y_{111} + y_{122} + 4y_{211} + 4y_{222} + 4y_{112} - 2y'_{2..} - 2y'_{.1.} - 2y'_{..2} + y'_{...}}$$

2.2.7 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{221}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{222}+x)^2}{2} - \frac{(y_{211}+x)^2}{2} - \frac{(y_{121}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..1}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{222} - x - y_{211} - x - y_{121} - x \\ + \frac{(y'_{2..}+x)}{2} + \frac{(y'_{.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..1}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..1} - 2y^{2}_{222} - 2y^{2}_{211} - 2y^{2}_{121} - y_{212}y'_{...} - y_{122}y'_{...} - y_{111}y'_{...} + 4R}{y_{212} + y_{122} + y_{111} + 4y_{222} + 4y_{211} + 4y_{121} - 2y'_{2..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..1} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..1} - 2y^{2}_{222} - 2y^{2}_{211} - 2y^{2}_{121} - y_{212}y'_{...} - y_{122}y'_{...} - y_{111}y'_{...} + 4R}{y_{212} + y_{122} + y_{111} + 4y_{222} + 4y_{211} + 4y_{121} - 2y'_{2..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..1} + y'_{...}}$$

2.2.8 ข้อมูลสูญหาย x เกิดขึ้นในตำแหน่ง y_{222}

$$SSABC = x^2 - \frac{(y_{221}+x)^2}{2} - \frac{(y_{212}+x)^2}{2} - \frac{(y_{122}+x)^2}{2} + \frac{(y'_{2..}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{.2.}+x)^2}{4} + \frac{(y'_{..2}+x)^2}{4} - \frac{(y'_{...}+x)^2}{8}$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{\partial C.V.}{\partial x} = 0$ และแก้สมการหาค่า x จะได้

$$\frac{\partial C.V.}{\partial x} = \frac{8(y'_{...}+x)\left(\frac{1}{2}\right)(B+R)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(B+R) - 8(B+R)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y'_{...}+x)}{(y'_{...}+x)^2} = 0$$

$$(y'_{..}+x)\frac{\partial}{\partial x}B = 2(B+R)$$

$$2(B+R) = (y'_{..}+x)\left(\begin{array}{l} 2x - y_{221} - x - y_{212} - x - y_{122} - x \\ + \frac{(y'_{2..}+x)}{2} + \frac{(y'_{.2.}+x)}{2} + \frac{(y'_{..2}+x)}{2} - \frac{(y'_{...}+x)}{4} \end{array}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{221} - 2y^2_{212} - 2y^2_{122} - y_{211}y'_{...} - y_{121}y'_{...} - y_{112}y'_{...} + 4R}{y_{211} + y_{121} + y_{112} + 4y_{221} + 4y_{212} + 4y_{122} - 2y'_{2..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..2} + y'_{...}}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{y'^{\,2}_{2..} + y'^{\,2}_{.2.} + y'^{\,2}_{..2} - 2y^2_{221} - 2y^2_{212} - 2y^2_{122} - y_{211}y'_{...} - y_{121}y'_{...} - y_{112}y'_{...} + 4R}{y_{211} + y_{121} + y_{112} + 4y_{221} + 4y_{212} + 4y_{122} - 2y'_{2..} - 2y'_{.2.} - 2y'_{..2} + y'_{...}}$$

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ นามสกุล	นางสาวกนิฏฐา ลาภาพงศ์
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (สถิติ) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ปีที่สำเร็จการศึกษา พ.ศ. 2555
รางวัลหรือทุนการศึกษา	ทุนส่งเสริมการศึกษาประเภทที่ 1 (Full Scholarship) คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
ประสบการณ์การทำงาน	พ.ศ. 2556-2557 เจ้าหน้าที่ประกันคุณภาพการศึกษา คณะเกษตรศาสตร์ มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์