

ตัวประมาณค่าด้วยวิธีของซีสต์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียว

ชัชวาลย์ กองน้ำ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)

คณะสถิติประยุกต์

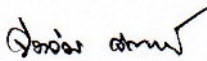
สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

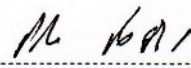
2559

ตัวประมาณค่าด้วยวิธีของซีสต์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียว

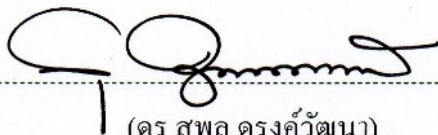
ัชชาลัย กองน้ำ

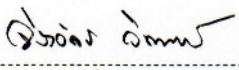
คณะสถิติประยุกต์

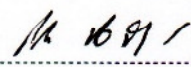
รองศาสตราจารย์..........อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช)

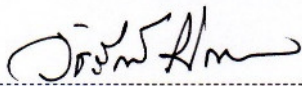
รองศาสตราจารย์..........อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม
(ดร.วิจิต ห่อจ๊ะระชนหกุล)

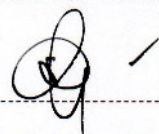
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาแล้วเห็นสมควรอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของ
การศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)

รองศาสตราจารย์..........ประธานกรรมการ
(ดร.สุเทพ ทองงาม)

รองศาสตราจารย์..........กรรมการ
(ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช)

รองศาสตราจารย์..........กรรมการ
(ดร.วิจิต ห่อจ๊ะระชนหกุล)

อาจารย์..........กรรมการ
(ดร.วัชรินทร์ ไชยมงคล)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์..........คณบดี
(ดร.สุเทพ ทองงาม)

กุมภาพันธ์ 2560

บทคัดย่อ

ชื่อวิทยานิพนธ์	ตัวประมาณค่าด้วยวิธีของซิลส์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม ชั้นเดียว
ชื่อผู้เขียน	นายชัชวาลย์ กองน้ำ
ชื่อปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ปีการศึกษา	2559

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้วิธีการของซิลส์ สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ ตัวประมาณค่าตัวแรก พัฒนาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม และตัวประมาณค่าที่สอง พัฒนาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม ข้อมูลที่ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าทั้งสอง เป็นข้อมูลที่มีการเผยแพร่แล้ว ที่ประชากรมีการแบ่งออกเป็น 20 กลุ่ม ซึ่งจะสุ่มเลือกตัวอย่างขนาดเท่ากับ 5, 10 และ 15 กลุ่ม แต่ละขนาดตัวอย่างจะสุ่มเลือกทั้งหมด 30 ครั้ง พบว่าตัวประมาณทั้งสองตัวที่พัฒนาด้วยวิธีของซิลส์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิมทุกกรณี ภายใต้เงื่อนไขที่หามาได้

ABSTRACT

Title of Thesis	Estimator in Single-Stage Cluster Sampling: Searls Approach
Author	Mr. Chatchawan Kongnam
Degree	Master of Science (Applied Statistics)
Year	2016

This research presents two population mean estimators using Searls approach in single-stage cluster sampling with simple random sampling without replacement. The first estimator is developed based on the cluster mean when the coefficient of variation of cluster mean and cluster size are known and the second based on the ratio of the cluster total mean and cluster size mean when the coefficients of variations of cluster total and cluster size are known. The population for efficiency comparisons of the two proposed estimators is a published data and consists of 20 clusters. Three sample sizes, 5, 10 and 15, are randomly selected from the population and 30 replications are performed for each sample size. It is found that the efficiencies of both estimators using Searls approach are higher than the traditional estimator in all cases under the conditions consistent with the derived conditions.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเนื่องมาจากผู้เขียนได้รับความกรุณาและช่วยเหลือเป็นอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช ผู้ซึ่งเป็นทั้งอาจารย์ที่ปรึกษาและอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์ ดร.วิจิต หล่อจิระสุนท์กุล ผู้ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ได้กรุณาสละเวลาให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ข้อชี้แนะ ข้อคิดเห็นตลอดจนติดตามความคืบหน้าในการจัดทำวิทยานิพนธ์ทุกขั้นตอน รวมทั้งตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ อันเป็นประโยชน์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จเป็นรูปเล่ม ผู้เขียนขอขอบพระคุณและสำนึกในบุญคุณยิ่ง

ขอขอบพระคุณท่านคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้แก่ รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล คุรงค์วัฒนา และอาจารย์ ดร.วัชรินทร์ ไชยมงคล ที่ช่วยให้คำแนะนำ และแนวคิดที่เป็นประโยชน์ตลอดจนช่วยตรวจสอบ แก้ไขให้วิทยานิพนธ์นี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านของภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้เป็นผู้เริ่มต้นในการถ่ายทอดความรู้ทางสถิติให้กับผู้เขียน

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ทุกท่านของคณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ที่ได้ถ่ายทอดความรู้ และให้คำปรึกษาในทุกด้าน รวมทั้งเจ้าหน้าที่คณะสถิติประยุกต์ และเจ้าหน้าที่ห้องสมุด ที่ให้ความช่วยเหลือ และอำนวยความสะดวกในการจัดทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้เป็นอย่างดี ขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษา คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ อันเป็นที่รักของผู้เขียนทุกคน สำหรับกำลังใจและความช่วยเหลือที่มีให้มาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณและมอบความสำเร็จทั้งหมดจากการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้แด่คุณทวิ และคุณวรรณภา กองน้ำ ผู้ซึ่งเป็นคุณพ่อและคุณแม่ของผู้เขียน ตลอดจนญาติพี่น้องของผู้เขียน ที่ให้ความห่วงใย และช่วยเป็นกำลังใจส่งเสริม สนับสนุนในทุกๆ ด้าน ซึ่งเป็นแรงใจที่สำคัญยิ่งของผู้เขียน จนกระทั่งวิทยานิพนธ์นี้ประสบความสำเร็จดังตั้งใจ

ชัชวาลย์ กองน้ำ

กุมภาพันธ์ 2560

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ	(3)
ABSTRACT	(4)
กิตติกรรมประกาศ	(5)
สารบัญ	(6)
สารบัญตาราง	(8)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
1.3 ขอบเขตการวิจัย	4
1.4 นิยามศัพท์ที่เกี่ยวข้อง	4
1.5 ข้อยกเว้นของการวิจัย	7
1.6 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย	7
บทที่ 2 ทบทวนวรรณกรรม	8
บทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	20
3.1 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขึ้นเดียวแบบง่ายไม่คืนที่	20
3.2 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์	22
บทที่ 4 ผลการวิจัย	31
บทที่ 5 สรุปผลและอภิปรายผลการวิจัย	39
5.1 สรุปผลการวิจัย	39
5.2 อภิปรายผลการวิจัย	40
5.3 ข้อเสนอแนะ	41
บรรณานุกรม	42

ภาคผนวก	44
ภาคผนวก ก บทพิสูจน์	45
ภาคผนวก ข ค่าประมาณของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร	65
ประวัติผู้เขียน	78

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4.1 ขนาดของกลุ่ม ค่ายอดรวมของกลุ่ม และค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ของประชากร ที่มีการแบ่งเป็น 20 กลุ่ม	32
4.2 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1s}$ ขนาดตัวอย่างและค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากรและจากตัวอย่าง	33
4.3 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2s}$ ขนาดตัวอย่างและค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากรและจากตัวอย่าง	35
4.4 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น (เปอร์เซ็นต์) จากกรณีใช้ค่าประมาณ สัมประสิทธิ์การแปรผันจากตัวอย่าง เมื่อไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของประชากร	37
ข.1 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ย ของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n=5$	66
ข.2 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง เมื่อขนาดตัวอย่าง $n=5$	67
ข.3 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ย	68

[illegible]

- ข.11 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน 76
 กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม
 ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2_s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวม
 ของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 15$
- ข.12 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อน 77
 กำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตาม
 ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2_s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม
 และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 15$

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

การสำรวจตัวอย่าง (Sample Survey) เป็นวิธีการทางสถิติที่สำคัญมากและนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในหลากหลายวงการและสาขาวิชาต่างๆ ทั้งในภาครัฐและเอกชน เช่น การสำรวจความคิดเห็นทางด้านการเมือง การสำรวจระดับความพึงพอใจต่อสินค้าและบริการ และการวิจัยตลาด เป็นต้น ซึ่งการสำรวจตัวอย่างจะทำการเก็บรวบรวมข้อมูลจากบางหน่วยของประชากรที่ศึกษา เพื่อนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter) ที่สนใจ ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ยอดรวม สัดส่วน และอัตราส่วนของประชากร

ในการสำรวจตัวอย่างขนาดใหญ่ หรือการสำรวจตัวอย่างที่ประชากรที่ศึกษามีจำนวนหน่วยตัวอย่างเป็นจำนวนมาก หรือครอบคลุมเป็นบริเวณกว้าง เช่น ทั้งประเทศ เป็นต้น มักจะพบปัญหาที่ตามมา คือการหากรอบตัวอย่าง (Sampling Frame) ที่ครบถ้วนสมบูรณ์และถูกต้องกับการสำรวจที่ต้องการศึกษา ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย (Simple Random Sampling) ดังนั้นวิธีการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) จึงเป็นวิธีการเลือกตัวอย่างที่ช่วยลดปัญหาการสร้างกรอบตัวอย่างที่ทำให้ยากสำหรับการสำรวจตัวอย่างขนาดใหญ่และสามารถหากรอบตัวอย่างได้ง่ายกว่าการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย

การเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม เป็นวิธีการแบ่งประชากรออกเป็นกลุ่ม (Cluster) ที่มีลักษณะของประชากรภายในกลุ่มมีความแตกต่างกันเนื่องจากมีความผันแปรของประชากรภายในกลุ่มสูง แต่ลักษณะของประชากรระหว่างกลุ่มมีลักษณะใกล้เคียงกันเนื่องจากมีความผันแปรของประชากรระหว่างกลุ่มต่ำ จากนั้นทำการเลือกตัวอย่างที่ถือว่าหน่วยตัวอย่างที่จะถูกเลือกมารวมอยู่ในตัวอย่างนั้น คือกลุ่มของหน่วยเล็กหลายหน่วยของประชากร ซึ่งกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งที่อาจถูกเลือกสามารถนำมาเป็นตัวแทนของกลุ่มต่างๆ ในการใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ และในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม อาจใช้วิธีการเลือกกลุ่มด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย วิธีการเลือกตัวอย่างแบบมีระบบ (Systematic Sampling) วิธีการเลือกตัวอย่างแบบใช้ความน่าจะเป็นได้สัดส่วนกับขนาด (Probability

Proportional to Size Sampling) หรืออาจแบ่งกลุ่มออกเป็นชั้นภูมิ (Strata) จากนั้นทำการเลือกกลุ่มด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างแบบชั้นภูมิ (Stratified Sampling) เมื่อเลือกได้กลุ่มใดจะเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุกหน่วยเล็กภายในกลุ่มนั้น ซึ่งเป็นการเลือกตัวอย่างขั้นเดียว (Single-Stage Sampling) เนื่องจากไม่มีการเลือกตัวอย่างอีกชั้นจากตัวอย่างที่สุ่มได้แล้วอีกต่อไป ข้อดีของการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม คือการเตรียมกรอบตัวอย่างที่ประกอบไปด้วยกลุ่มต่างๆ ทั้งหมดในขอบเขตที่ศึกษาทำได้ง่าย เช่น แผนที่ หรือบล็อกรถของถนน เป็นต้น และหน่วยเล็กของประชากรภายในกลุ่มอยู่ใกล้กัน ทำให้ไม่เสียเวลาและประหยัดค่าใช้จ่ายในการสำรวจ ส่วนข้อเสียของการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มนี้ พบว่ามักมีค่าคลาดเคลื่อนค่อนข้างสูง (ประชุม สุวดี, 2552) เนื่องจากในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มจะสุ่มเลือกเพียงบางกลุ่มมาเป็นตัวแทนเพื่อประมาณค่าเฉลี่ยประชากรซึ่งแต่ละกลุ่มนั้นมีขนาดไม่เท่ากัน และระหว่างกลุ่มนั้นจะประกอบด้วยค่าสังเกตภายในกลุ่มที่เหมือนกัน เพราะระหว่างกลุ่มมีลักษณะของประชากรภายในกลุ่มใกล้เคียงกัน ซึ่งอาจลดการเป็นตัวแทนที่ดีของตัวอย่าง และอาจทำให้ค่าคลาดเคลื่อนจากการเลือกตัวอย่างเพิ่มขึ้นได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาและพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรเพื่อต้องการลดค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าว

เมื่อพิจารณาตัวประมาณ (Estimator) พบว่าคุณลักษณะหรือสมบัติบางประการที่พึงปรารถนาของตัวประมาณที่ควรจะเป็น ได้แก่ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased) คงเส้นคงวา (Consistent) ความแปรปรวน (Variance) ต่ำ หรือค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: MSE) ต่ำ เป็นต้น

การพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการศึกษานี้ใช้วิธีการของซิลส์ (Searls, 1964) ซึ่งอาศัยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation) ของประชากรช่วยให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ด้วยวิธีของซิลส์ (Searls) มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม แต่ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซิลส์เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง (Biased Estimator) ส่วนตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) ดังนั้นวิธีการประมาณค่าของซิลส์ยอมให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรเป็นตัวประมาณที่เอนเอียง เพื่อให้ตัวประมาณที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำลงทำให้ตัวประมาณค่ามีประสิทธิภาพดีขึ้น

Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul (2013) ได้ทำการศึกษาและนำวิธีของซิลส์มาใช้ในการพัฒนา ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย โดยวิธีดังกล่าวคือ การนำค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่ศึกษา และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของ

ประชากรของตัวแปรช่วย ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร จากนั้นทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และจากผลการศึกษาในงานวิจัย พบว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Estimators) ที่ถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของซิลส์ มีประสิทธิภาพมากที่สุด ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย

วิชญาพร สิงห์นวน และจิราวัลย์ จิตรถเวช (2559) ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรอื่นที่ใช้วิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ด้วยข้อมูลจริง ซึ่งเป็นข้อมูลค่าเฉลี่ยจำนวนอาจารย์ต่อสถานศึกษาในเขตกรุงเทพมหานครและเขตปริมณฑล และจากผลการศึกษาในงานวิจัย พบว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นที่ถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของซิลส์ มีประสิทธิภาพมากที่สุด ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย สอดคล้องกับผลงานวิจัยทางทฤษฎีที่ได้ศึกษาไว้แล้วของ Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul (2013)

การพัฒนาตัวประมาณค่าในงานวิจัยนี้พัฒนามาจากวิธีของซิลส์ของการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่าย ไม่คั่นที่ เนื่องจากวิธีของซิลส์นั้นอาศัยการทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร เมื่อนำมาใช้แล้วจะทำให้ตัวประมาณที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำลงจึงทำให้ตัวประมาณค่ามีประสิทธิภาพดีขึ้น โดยจะพัฒนาตัวประมาณค่า 2 ตัว โดยใช้หลักการการประมาณค่าแบบเดิมและตัวประมาณค่าแบบอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยซึ่งจะนำเสนอทฤษฎีการประมาณค่าของการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่าย ไม่คั่นที่ รวมทั้งการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยวิธีดั้งเดิมและวิธีอัตราส่วนของค่าเฉลี่ย หัวข้อถัดไปจะเป็นการพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่ปรับจากวิธีดั้งเดิมและวิธีอัตราส่วนของค่าเฉลี่ย ภายใต้ข้อกำหนดของซิลส์ที่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่ศึกษา และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย พร้อมทั้งทฤษฎีบทในการพิสูจน์คุณสมบัติและเงื่อนไขของตัวประมาณค่าที่พัฒนาขึ้นมา หัวข้อสุดท้ายจะเป็นการใช้ตัวประมาณค่าที่ได้พัฒนาขึ้นมาใช้กับข้อมูลจากหนังสือของคอแครน (Cochran, 1977) เพื่อศึกษาถึงความสอดคล้องกับทฤษฎีที่พัฒนาขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1) เพื่อศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่าย ไม่คั่นที่

- 2) เพื่อพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ด้วยวิธีของซิลส์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่
- 3) เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม
- 4) เพื่อศึกษาข้อกำหนดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของตัวประมาณค่าที่ทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม

1.3 ขอบเขตการวิจัย

- 1) ศึกษาภายใต้วิธีการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ แต่ละกลุ่มมีขนาดไม่เท่ากัน (Unequal Size)
- 2) ศึกษาโดยใช้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร 2 แบบ คือ ตัวประมาณค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน
- 3) ศึกษาใน 2 กรณี คือ กรณีทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร และกรณีใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันจากตัวอย่าง
- 4) เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม ในแต่ละกรณี
- 5) ข้อมูลที่ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม เป็นข้อมูลจากหนังสือของคอเครน (Cochran, 1977)

1.4 นิยามศัพท์ที่เกี่ยวข้อง

- 1) การเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม คือ การเลือกตัวอย่างที่ถือว่าหน่วยตัวอย่าง คือ กลุ่มของหน่วยสังเกต เมื่อเลือกตัวอย่างกลุ่มมาจำนวนหนึ่งด้วยวิธีการที่เหมาะสมแล้ว จะเก็บรวบรวมข้อมูลจากหน่วยสังเกตทั้งหมดภายในกลุ่ม (ประชุม สุวดี, 2552)
- 2) การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย คือ การเลือกตัวอย่างที่ตัวอย่างที่เป็นไปได้แต่ละตัวอย่างมีความน่าจะเป็นที่จะถูกเลือกเท่า ๆ กัน (Equal Probability) (ประชุม สุวดี, 2554)
- 3) ความแปรปรวน หมายถึง ค่าคาดหมายของกำลังสองของผลต่างระหว่างตัวประมาณ $\hat{q}$ กับค่าคาดหมายของตัวประมาณ $E(\hat{q})$ หาได้จาก $V(\hat{q}) = E[\hat{q} - E(\hat{q})]^2$ (ประชุม สุวดี, 2552)

4) ค่าของตัวประมาณ หมายถึง ค่าของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในตัวอย่างที่ได้จากการแทนค่าของตัวแปรด้วยค่าสังเกตจากตัวอย่าง เรียกว่า ค่าประมาณ (Estimate) ของพารามิเตอร์ที่สนใจ (ประชุม สุวดี, 2552)

5) ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า (Relative Error: RE) หมายถึง ค่าสัมบูรณ์ของอัตราส่วนของผลต่างระหว่างค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ได้กับค่าเฉลี่ยประชากรจริงต่อค่าเฉลี่ยประชากรจริง ซึ่งหาได้จาก (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า} = \left| \frac{\text{ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ได้} - \text{ค่าเฉลี่ยประชากรจริง}}{\text{ค่าเฉลี่ยประชากรจริง}} \right|$$

6) ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย หมายถึง ค่าคาดหวังของกำลังสองของผลต่างระหว่างตัวประมาณ $\hat{q}$ กับพารามิเตอร์ q หาได้จาก $MSE(\hat{q}) = E[\hat{q} - q]^2$ เมื่อ MSE คือค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

โดยทั่วไปหาได้จาก $MSE(\hat{q}) = V(\hat{q}) + [\text{Bias}(\hat{q})]^2$ และเมื่อทราบว่าตัวประมาณ $\hat{q}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ q หรือ $E(\hat{q}) = q$ ดังนั้นจะได้ $MSE(\hat{q}) = V(\hat{q})$ (ประชุม สุวดี, 2552)

7) ค่าคาดหวัง (Expected Value) หมายถึง ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักด้วยความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม ซึ่งค่าคาดหวังของตัวประมาณ $\hat{q}$ ของพารามิเตอร์ q อาจแทนด้วย $E(\hat{q})$ โดยที่ E เป็นสัญลักษณ์แทนค่าคาดหวัง (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

8) ตัวประมาณ หมายถึง ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ในตัวอย่างที่ใช้ประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (ประชุม สุวดี, 2552)

9) ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง หมายถึง ตัวประมาณที่มีค่าคาดหวังเท่ากับพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่า กล่าวคือตัวประมาณ $\hat{q}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ q ก็ต่อเมื่อ $E(\hat{q}) = q$ (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

10) ตัวประมาณที่เอนเอียง หมายถึง ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ค่าคาดหวังของตัวประมาณไม่เท่ากับค่าพารามิเตอร์ (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558) ซึ่งผลต่างระหว่างค่าคาดหวังของ $\hat{q}$ กับพารามิเตอร์ q เรียกว่า ค่าเอนเอียง หาได้จาก $\text{Bias}(\hat{q}) = E(\hat{q}) - q$ (ประชุม สุวดี, 2553)

11) ตัวอย่าง (Sample) หมายถึง ส่วนหนึ่งหรือเซตย่อย (Subset) ของประชากร ตัวอย่างประกอบไปด้วย หน่วยตัวอย่างจำนวนหนึ่งของประชากร และจำนวนหน่วยตัวอย่างในตัวอย่างเรียกว่า ขนาดตัวอย่าง (Sample Size) (ประชุม สุวดี, 2552)

12) ประชากร (Population) หมายถึง เซตของหน่วยตัวอย่าง (Sampling Unit) ทั้งหมด ที่ครอบคลุมในการศึกษาและจำนวนหน่วยตัวอย่างในประชากร เรียกว่า ขนาดประชากร (Population Size) (ประชุม สุวดี, 2552)

13) ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ หมายถึง ค่าเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ 2 ตัว ($\hat{q}_1$ และ $\hat{q}_2$) ของพารามิเตอร์เดียวกัน โดยค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของ $\hat{q}_1$ และ $\hat{q}_2$ หาได้จาก

$$\text{ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของ } \hat{q}_1 \text{ เทียบกับ } \hat{q}_2 = \frac{\text{MSE}(\hat{q}_2)}{\text{MSE}(\hat{q}_1)}$$

ถ้ามีค่ามากกว่า 1 แสดงว่า $\hat{q}_1$ มีประสิทธิภาพมากกว่า $\hat{q}_2$ ในกรณีที่ตัวประมาณทั้ง 2 ตัวเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง จะแทนค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยด้วยความแปรปรวน (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

14) พารามิเตอร์ หมายถึง ค่าคงที่ (Constant) ซึ่งไม่ทราบค่า เป็นสิ่งที่แสดงคุณลักษณะหรือสมบัติบางประการของประชากร (ประชุม สุวดี, พาชิตชนัด ศิริพานิช, จิราวัลย์ จิตรถเวช และสำรวม จงเจริญ, 2555)

15) สถิติ (Statistic) หมายถึง ฟังก์ชันของค่าสังเกตจากตัวอย่าง ที่ไม่มีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่ารวมอยู่ด้วย (ประชุม สุวดี, พาชิตชนัด ศิริพานิช, จิราวัลย์ จิตรถเวช และสำรวม จงเจริญ, 2555)

16) สัมประสิทธิ์การแปรผัน หมายถึง ค่าวัดการกระจายสัมพัทธ์เพื่อเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลชุดต่าง ๆ เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ยหรือหน่วยวัดแตกต่างกัน สัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) กับค่าสัมบูรณ์ของค่าคาดหมายของตัวประมาณ $\hat{q}$ มักแสดงในรูปร้อยละ โดยการคูณด้วย 100 ดังนั้นสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวประมาณ $\hat{q}$ เท่ากับ $C.V.(\hat{q}) = \frac{\sqrt{V(\hat{q})}}{|E(\hat{q})|}$ (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

17) สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) หมายถึง ค่าที่บ่งบอกขนาดและทิศทางของความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปร 2 ตัว โดยปรกติมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง +1 โดยค่า 0 หมายความว่าตัวแปรทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกัน ส่วนค่า -1 กับ +1 แสดงความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้ามและทิศทางเดียวกันโดยสมบูรณ์ตามลำดับ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีหลายตัว แต่ละตัวเหมาะสมกับข้อมูลลักษณะต่าง ๆ กัน โดยทั่วไปเมื่อไม่ระบุชื่อเฉพาะจะหมายถึง สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y หาได้จาก

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \text{ โดยที่ } S_x \text{ คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปร } x, S_y \text{ คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}$$

ของตัวแปร y และ S_{xy} คือ ความแปรปรวนร่วมของตัวแปร x และตัวแปร y (สำนักงานราชบัณฑิตยสภา, 2558)

1.5 ข้อจำกัดของการวิจัย

ข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยเป็นข้อมูลจากหนังสือของคอแครน (Cochran, 1977) เนื่องจากผู้วิจัยได้ทำการจำลองข้อมูล (Simulation) เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบชิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม พบว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบชิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิมมีค่าแตกต่างกันน้อยมากๆ จนไม่สามารถแยกความแตกต่างกันได้อย่างชัดเจน เมื่อนำข้อมูลจากหนังสือของคอแครน (Cochran, 1977) มาใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าทั้งสอง พบว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบชิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิมมีค่าแตกต่างกันที่ดีกว่าการใช้ข้อมูลจากการจำลองข้อมูล ดังนั้นผู้วิจัยจึงไม่ได้ใช้ข้อมูลจากการจำลองข้อมูลในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าทั้งสองดังกล่าวในงานวิจัยนี้

1.6 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

- 1) ได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม
- 2) สามารถเลือกใช้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรได้อย่างเหมาะสม เมื่อทราบข้อกำหนดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่
- 3) เป็นแนวทางในการศึกษาและสามารถนำแนวคิดไปประยุกต์ใช้กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างแบบอื่นๆ

บทที่ 2

ทบทวนวรรณกรรม

สำหรับการศึกษาวิธีการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม พบว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีนี้มีค่าคลาดเคลื่อนค่อนข้างสูง และในงานวิจัยนี้ได้นำเอาวิธีของซิลล์มาช่วยในการพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร เพื่อให้ได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่มีค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม ดังนั้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีดังนี้

Cochran (1977) พิจารณาการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่ายขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ ซึ่งแต่ละกลุ่มมีขนาดของกลุ่มไม่เท่ากัน กำหนดให้ y_{ij} เป็นค่าสังเกตของตัวแปรที่สนใจศึกษา จากหน่วยสังเกตที่ j ในกลุ่มที่ i ในตัวอย่าง โดยที่ $j=1, 2, \dots, M_i, i=1, 2, \dots, n$ และให้ M_i คือขนาดของกลุ่มที่ i จะได้

1) ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของค่ายอดรวมของประชากร Y เขียนได้เป็น

$$\hat{Y} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.1)$$

โดยที่ $y_i = \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij} = M_i \bar{y}_i$ คือค่ายอดรวมของตัวแปรในกลุ่มที่ i

$\bar{y}_i = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปรในกลุ่มที่ i

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{Y}$ เขียนได้เป็น

$$V(\hat{Y}) = \frac{N^2(1-f)}{n} \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1} \quad (2.2)$$

โดยที่ $\bar{Y} = \frac{Y}{N}$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปรต่อกลุ่มในประชากร

$f = \frac{n}{N}$ คือเศษส่วนของการสุ่ม (Sampling Fraction)

ตัวประมาณ $\hat{Y}$ มีความแม่นยำค่อนข้างต่ำ (Poor Precision) เนื่องจาก $\bar{y}_i$ มักจะมีค่าแตกต่างกันน้อย ในขณะที่ M_i มักจะมีค่าแตกต่างกันมาก จึงทำให้ $M_i \bar{y}_i$ มีค่าแตกต่างกันมากด้วยเช่นกัน ซึ่งจะทำให้ความแปรปรวนมีค่าค่อนข้างสูง

2) เมื่อทราบค่า $M_i, i=1, 2, \dots, N$ และกำหนดให้ $M_0 = \sum_{i=1}^N M_i$ คือจำนวน

ทั้งหมดของหน่วยสังเกตในประชากร จะได้ตัวประมาณค่ายอดรวมแบบอัตราส่วน เขียนได้เป็น

$$\hat{Y}_R = M_0 \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (2.3)$$

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{Y}_R$ เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_R) &\approx \frac{N^2(1-f)}{n} \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - M_i \bar{\bar{Y}})^2}{N-1} \\ &\approx \frac{N^2(1-f)}{n} \frac{\sum_{i=1}^N M_i^2 (\bar{y}_i - \bar{\bar{Y}})^2}{N-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

โดยที่ $\bar{\bar{Y}} = \frac{Y}{M_0}$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปรต่อหน่วยสังเกตในประชากร

ส่วนใหญ่มักจะพบว่า $V(\hat{Y}_R)$ มีค่าน้อยกว่า $V(\hat{Y})$ และถ้าต้องการประมาณค่ายอดรวมด้วยตัวประมาณ $\hat{Y}_R$ จะต้องทราบค่า M_0 ซึ่งตัวประมาณ $\hat{Y}$ ไม่จำเป็นต้องทราบค่า M_0

สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร $\bar{\bar{Y}}$ จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร เขียนได้เป็น

$$\hat{\bar{\bar{Y}}} = \frac{\hat{Y}}{M_0} = \frac{N}{nM_0} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.5)$$

$$\hat{\bar{\bar{Y}}}_R = \frac{\hat{Y}_R}{M_0} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (2.6)$$

พบว่าเมื่อต้องการประมาณค่าเฉลี่ยด้วยตัวประมาณ $\hat{\bar{\bar{Y}}}$ จะต้องทราบค่า M_0 ส่วนตัวประมาณ $\hat{\bar{\bar{Y}}}_R$ ทราบเฉพาะค่า $M_i, i=1, 2, \dots, n$

Nafiu (2012) ได้ศึกษาตัวประมาณค่าในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวเพื่อประมาณค่ายอดรวมของประชากร (Population Total) และได้เสนอตัวประมาณค่าแบบใหม่ ซึ่งให้ความสนใจกับจำนวนผู้ที่ตกเป็นหน่วยตัวอย่างที่แท้จริง เพื่อใช้ประมาณค่ายอดรวมของประชากร และกำหนดให้ y_{ij} เป็นค่าสังเกตของตัวแปรที่สนใจศึกษา จากหน่วยสังเกตที่ j ในกลุ่มที่ i ซึ่ง $j=1, 2, \dots, n_i, i=1, 2, \dots, n$ และ n_i เป็นจำนวนหน่วยตัวอย่างที่แท้จริงที่ตกอยู่ภายในกลุ่มที่

มีขนาดของกลุ่ม N_i หน่วย โดยที่ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ตัวประมาณค่ายอดรวมแบบใหม่ (Newly Proposed Estimator: $\hat{Y}_{1NPE}$) ที่เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของค่ายอดรวมของประชากร Y เขียนได้เป็น

$$\hat{Y}_{1NPE} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{N_i}{n_i^2} y_{ij} \quad (2.7)$$

โดยที่ $\gamma = \frac{n}{N}$ คือเศษส่วนการสุ่ม (Sampling Fraction)

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{Y}_{1NPE}$ เขียนได้เป็น

$$V(\hat{Y}_{1NPE}) = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i^2}{n_i^4} - \frac{N_i}{n_i^2} \right) \sigma_i^2 \quad (2.8)$$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของความแปรปรวน $V(\hat{Y}_{1NPE})$ เขียนได้เป็น

$$\hat{V}(\hat{Y}_{1NPE}) = \frac{N^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i (N_i - n_i^2)}{n_i^4} s_i^2 \quad (2.9)$$

$$\text{โดยที่ } s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{Y}_{1NPE})^2$$

จากนั้นทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่ายอดรวมแบบใหม่ที่น่าเสนอกับตัวประมาณค่ายอดรวมอื่นที่ใช้การเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียว โดยใช้ข้อมูลเชิงตัวเลข พบว่าค่ายอดรวมที่คำนวณได้ของตัวประมาณค่าทุกตัวตกอยู่ในช่วงความเชื่อมั่นของตัวประมาณค่าต่างๆ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และพบว่าความแปรปรวน และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวประมาณค่ายอดรวมแบบใหม่ที่น่าเสนอมีค่าน้อยที่สุด ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียว

Sakizadeh and Gerami (2012) ได้เสนอตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่โดยการใช้ตัวแปรช่วยในการสร้างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรสำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม ซึ่งแต่ละกลุ่มมีขนาดของกลุ่มเท่ากัน (Equal Size) ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่น่าเสนอได้อาศัยตัวประมาณค่าแบบอัตราส่วนการถดถอย (Regression-Ratio Type Estimator) มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร พบว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่น่าเสนอมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณแบบถดถอยที่เป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม ได้แก่

1) กำหนดให้ y_{ij} เป็นค่าของตัวแปรศึกษา และ x_{ij} เป็นค่าของตัวแปรช่วย ซึ่งมีค่าจากหน่วยสังเกตที่ j ในกลุ่มที่ i ของประชากร โดยที่ $j = 1, 2, \dots, M$, $i = 1, 2, \dots, N$

ดังนั้น ตัวประมาณแบบถดถอยด้วยวิธีของ Gupta and Shabbir (2008 quoted in Sakizadeh and Gerami, 2012) สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มแบบง่าย ไม่คืนที่ เขียนได้เป็น

$$\bar{y}_{mc(0)} = \omega_1 \bar{y} + \omega_2 (\bar{X} - \bar{x}) \quad (2.10)$$

โดยที่ ω_1 และ ω_2 เป็นค่าคงที่ไม่จำกัด (Restriction)

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \bar{y}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad y_i = \sum_{j=1}^M y_{ij} \quad \text{ซึ่ง } M \text{ คือขนาดของกลุ่ม}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_i = \sum_{j=1}^M x_{ij}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{M} \bar{Y}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad \text{และ} \quad \bar{X} = \frac{1}{M} \bar{X}, \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}_{mc(0)}$ เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}_{mc(0)}) = \bar{Y}(\omega_1 - 1) \quad (2.11)$$

สำหรับการทำให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด จะกำหนดค่าต่างๆ ดังนี้

$$v_y = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\bar{Y}}, \quad v_x = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}$$

$$E(v_y^2) = u_y^2, \quad E(v_x^2) = u_x^2, \quad E(v_x v_y) = u_{xy}$$

จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{mc(0)}$ เขียนได้เป็น

$$\text{MSE}(\bar{y}_{mc(0)}) = \omega_1^2 \bar{Y}^2 u_y^2 + \omega_2^2 \bar{X}^2 u_x^2 - 2\omega_1 \omega_2 \bar{Y} \bar{X} u_{xy} + \bar{Y}^2 (\omega_1 - 1)^2 \quad (2.12)$$

ซึ่งค่าของ ω_1 และ ω_2 ที่ทำให้สมการที่ (12) มีค่าต่ำสุดได้แก่

$$\omega_1^* = \frac{u_x^2}{u_x^2 u_y^2 + u_x^2 - u_{xy}^2}, \quad \omega_2^* = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \left(\frac{u_{xy}}{u_x^2 u_y^2 + u_x^2 - u_{xy}^2} \right)$$

และเมื่อแทนค่า ω_1^* และ ω_2^* ลงในสมการที่ (12) จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (Minimum MSE) ของตัวประมาณ $\bar{y}_{mc(0)}$ เขียนได้เป็น

$$\text{MSE}(\bar{y}_{mc(0)})_{\min} = \bar{Y}^2 \frac{\left(u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} \right)}{\left(u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} \right) + 1} \quad (2.13)$$

2) เมื่อ ω_1 และ ω_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ และ λ และ η เป็นค่าคงที่หรือฟังก์ชันของพารามิเตอร์ที่ทราบค่า ดังนั้นตัวประมาณแบบอัตราส่วนด้วยวิธีของ Gupta and Shabbir (2008 quoted in Sakizadeh and Gerami, 2012) สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มแบบง่าย ไม่คืนที่ เขียนได้เป็น

$$\bar{y}_{mc} = \left\{ \omega_1 \bar{y} + \omega_2 (\bar{X} - \bar{x}) \right\} \left(\frac{\lambda + \eta \bar{X}}{\lambda + \eta \bar{x}} \right) \quad (2.14)$$

และตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่สร้างจากสมการที่ (14) ซึ่งเขียนอยู่ในเทอมของ v_x , v_y เขียนได้เป็น

$$\bar{y}_{mc} = \left\{ \omega_1 \bar{Y} (1 + v_y) - \omega_2 \bar{X} v_x \right\} (\alpha v_x + 1)^{-1} \quad (2.15)$$

โดยที่ $\alpha = \frac{\eta \bar{X}}{\lambda + \eta \bar{X}}$

ค่าเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง (First Order Approximation) เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}_{mc}) \approx \omega_1 \bar{Y} (1 - \alpha u_{xy} + \alpha^2 u_x^2) + \omega_2 \bar{X} (\alpha u_x^2) - \bar{Y} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\bar{y}_{mc}) \approx & (\omega_1 - 1)^2 \bar{Y}^2 + \omega_1^2 \bar{Y}^2 (u_y^2 - 4\alpha u_{xy} + 3\alpha^2 u_x^2) \\ & - 2\omega_1 \bar{Y}^2 (\alpha^2 u_x^2 - \alpha u_{xy}) + \omega_2^2 \bar{X}^2 u_x^2 - 2\alpha \omega_2 \bar{X} \bar{Y} u_x^2 \\ & - 2\omega_1 \omega_2 \bar{X} \bar{Y} (u_{xy} - 2\alpha u_x^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

ซึ่งค่าของ ω_1 และ ω_2 ที่ทำให้สมการที่ (17) มีค่าต่ำสุด ได้แก่

$$\omega_1^* \approx \frac{1 - \alpha^2 u_x^2}{1 + u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} - \alpha^2 u_x^2}, \quad \omega_2^* \approx \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \left(\frac{(u_{xy} - 2\alpha u_x^2)(1 - \alpha^2 u_x^2)}{u_x^2 + u_x^2 u_y^2 - u_{xy}^2 - \alpha^2 u_x^4} + \alpha \right)$$

และเมื่อแทนค่า ω_1^* และ ω_2^* ลงในสมการที่ (17) โดยที่ $(u_x^2 + u_x^2 u_y^2 - u_{xy}^2 - \alpha^2 u_x^4) > 0$ จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ เขียนได้เป็น

$$\text{MSE}(\bar{y}_{mc})_{\min} \approx \bar{Y}^2 \frac{\left(u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} \right) (1 - \alpha^2 u_x^2)}{\left(u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} \right) + 1 - \alpha^2 u_x^2} \quad (2.18)$$

3) เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า

กำหนดให้ตัวประมาณแบบอัตราส่วนและตัวประมาณแบบถดถอยสำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มแบบง่าย ไม่คืนที่ เขียนได้เป็น

$$\bar{y}_0 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} \quad (2.19)$$

$$\bar{y}_{reg} = \bar{y} + B(\bar{X} - \bar{x}) \quad (2.20)$$

โดยที่ $B = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$

เมื่อทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า พบว่า

1) ตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{mc(0)}$ ภายใต้ข้อกำหนด $u_x^2 \left(u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} \right) > 0$ และพบว่าเงื่อนไขนี้มักจะเป็นจริงเสมอ ซึ่งทำให้ตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{mc(0)}$ เสมอ

2) ตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{reg}$ ภายใต้ข้อกำหนด $\left(u_y^2 - \frac{u_{xy}^2}{u_x^2} \right) > 0$ และพบว่าเงื่อนไขนี้มักจะเป็นจริงเสมอ ซึ่งทำให้ตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{reg}$ เสมอ

จากผลลัพธ์เชิงตัวเลขในงานวิจัย พบว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{mc}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{(0)}$, $\bar{y}_{reg}$ และ $\bar{y}_{mc(0)}$

Searls (1964) ได้พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรขึ้นมาจากตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม ($\bar{y}$) ด้วยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร ทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซิลส์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม แต่ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซิลส์เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง ส่วนตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ดังนั้นวิธีของซิลส์นั้นยอมให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรเป็นตัวประมาณที่เอนเอียง เพื่อให้ตัวประมาณที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำลงทำให้ตัวประมาณมีประสิทธิภาพดีขึ้น

จากตัวอย่างสุ่มขนาด n เมื่อ $y_1, y_2, \dots, y_n$ คือค่าของตัวแปร y ที่สนใจจากหน่วยที่ $1, 2, \dots, n$ ของตัวอย่าง จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบซีสต์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้เป็น

$$\bar{y}' = \frac{1}{(n + v^2)} \sum_{j=1}^n y_j \quad (2.21)$$

โดยที่ v คือค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'$ เขียนได้เป็น

$$\text{MSE}(\bar{y}') = \frac{\sigma^2}{(n + v^2)} \quad (2.22)$$

จากสมการที่ (22) ก่อนข้างชัดเจนว่า $\text{MSE}(\bar{y}')$ มีค่าน้อยกว่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม ($\bar{y}$) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n}$ เสมอ และประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของตัวประมาณ $\bar{y}'$ เทียบกับตัวประมาณ $\bar{y}$ เขียนได้เป็น

$$\text{R.E.} = \frac{\text{MSE}(\bar{y})}{\text{MSE}(\bar{y}')} = \frac{(n + v^2)}{n} \quad (2.23)$$

Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul (2013) ได้ทำการศึกษาและนำวิธีของซีสต์มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย โดยวิธีดังกล่าวคือ การนำค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่ศึกษา (C_y) และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย (C_x) ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร จากนั้นทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่พัฒนามาจากวิธีของซีสต์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม

ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายขนาด n จากประชากรขนาด N โดยไม่คืนที่ จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซีสต์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้เป็น

$$\bar{y}'_{wy} = \frac{\bar{y}}{1 + \gamma C_y^2} \quad (2.24)$$

โดยที่ C_y คือค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่ศึกษา ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า

$\gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ คือปัจจัยปรับค่ากรณีที่ประชากรมีจำนวนที่จำกัด (Finite Population Correction)

ค่าเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซิลส์ เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}'_{wy}) = -\frac{\gamma C_y^2 \bar{Y}}{1 + \gamma C_y^2} \quad (2.25)$$

$$\text{MSE}(\bar{y}'_{wy}) = \frac{\gamma C_y^2 \bar{Y}^2}{1 + \gamma C_y^2} \quad (2.26)$$

ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซิลส์ ($\bar{y}'_{wy}$) กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม ($\bar{y}$) มีค่าเท่ากับ $(1 + \gamma C_y^2) > 1$ และเพื่อไม่ให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าเอนเอียงมากเกินไปที่จะยอมรับได้ ดังนั้น $\gamma C_y^2 \ll 1$

เมื่อทราบค่าตัวแปรช่วย X และมีความสัมพันธ์กันสูงกับตัวแปรที่ศึกษา Y ดังนั้นตัวประมาณแบบอัตราส่วน (Ratio Estimator) แบบดั้งเดิม เขียนได้เป็น

$$\bar{y}_r = \frac{\bar{X}}{\bar{x}} \bar{y} \quad (2.27)$$

ค่าเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_r$ ภายใต้การกระจายอนุกรมแท่งเลอร์ดถึงอันดับที่หนึ่ง (Cochran, 1977) เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}_r) \approx \gamma \bar{Y} (C_x^2 - \rho C_y C_x) \quad (2.28)$$

$$\text{MSE}(\bar{y}_r) \approx \gamma \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 - 2\rho C_y C_x) \quad (2.29)$$

พบว่าค่า $\text{MSE}(\bar{y}_r)$ มีค่าน้อยกว่าค่า $\text{MSE}(\bar{y})$ ภายใต้ข้อกำหนด $\rho > \frac{C_x}{2C_y}$ โดยที่ C_x

คือค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า

ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ทั้ง 4 ตัว ที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์ ได้แก่

1) ตัวประมาณแบบอัตราส่วนแบบใหม่ (New Ratio Estimator) เขียนได้เป็น

$$\bar{y}'_{rwyx} = \frac{\bar{X}}{\bar{x}'_{wx}} \bar{y}'_{wy} = \frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} \bar{y}_r \quad (2.30)$$

โดยที่ $\bar{y}'_{wy} = \frac{\bar{y}}{1 + \gamma C_y^2}$, $\bar{x}'_{wx} = \frac{\bar{x}}{1 + \gamma C_x^2}$ และ $\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปรช่วยในประชากร

ค่าเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{rwyx}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมแท่งเลอร์ดถึงอันดับที่หนึ่ง เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}'_{rwyx}) = \frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} \text{Bias}(\bar{y}_r) - \frac{\gamma(C_y^2 - C_x^2)}{1 + \gamma C_y^2} \bar{Y} \quad (2.31)$$

$$\text{MSE}(\bar{y}'_{rwyx}) \approx \left(\frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} \right)^2 \text{MSE}(\bar{y}_r) \quad (2.32)$$

ตัวประมาณแบบอัตราส่วนแบบใหม่ ($\bar{y}'_{rwyx}$) จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณแบบอัตราส่วนแบบดั้งเดิม ($\bar{y}_r$) ภายใต้ข้อกำหนด $C_x < C_y$

2) เมื่อเฉพาะ C_x ถูกใช้ในตัวประมาณค่า จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เอนเอียงแบบใหม่ (New Biased Sample Mean) เขียนได้เป็น

$$\bar{y}'_{wx} = \frac{\bar{y}}{1 + \gamma C_x^2} \quad (2.33)$$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}'_{wx}$ เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}'_{wx}) = -\frac{\gamma C_x^2 \bar{Y}}{1 + \gamma C_x^2} \quad (2.34)$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{wx}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เขียนได้เป็น

$$\text{MSE}(\bar{y}'_{wx}) \approx \frac{\gamma C_y^2 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_x^2)^2} \quad (2.35)$$

ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เอนเอียงแบบใหม่ ($\bar{y}'_{wx}$) จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซีสส์ ($\bar{y}'_{wy}$) ภายใต้ข้อกำหนด $C_y < C_x \sqrt{2 + \gamma C_x^2}$

3) ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบใหม่ (New Linear Regression Estimator) ที่พัฒนามาจากตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบดั้งเดิม ($\bar{y}_{lr}$) (Cochran, 1977) เขียนได้เป็น

$$\bar{y}'_{lrwyx} = \bar{y}'_{wy} + b_{wyx} (\bar{X} - \bar{x}_{wx}) \quad (2.36)$$

โดยที่ $b_{wyx} = \frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} b$ และ $b = \rho \frac{S_y}{S_x}$ (Cochran, 1977)

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrwyx}$ เขียนได้เป็น

$$\text{Bias}(\bar{y}'_{lrwyx}) = \text{Bias}(\bar{y}'_{wy}) \left(1 - \rho \frac{C_x}{C_y} \right) \quad (2.37)$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrwyx}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เขียนได้เป็น

$$MSE(\bar{y}'_{lrwyx}) \approx \frac{MSE(\bar{y}_{lr})}{(1 + \gamma C_y^2)^2} \quad (2.38)$$

ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบใหม่ ($\bar{y}'_{lrwyx}$) จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบดั้งเดิม ($\bar{y}_{lr}$) เสมอ

4) เมื่อเฉพาะ C_x ถูกใช้ในตัวประมาณค่า จะได้ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบใหม่ เขียนได้เป็น

$$\bar{y}'_{lrwx} = \bar{y}_{wx} + b_{wx}(\bar{X} - \bar{x}_{wx}) \quad (2.39)$$

โดยที่ $b_{wx} = b$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrwx}$ เขียนได้เป็น

$$Bias(\bar{y}'_{lrwx}) = Bias(\bar{y}_{wx}) \left(1 - \rho \frac{C_y}{C_x} \right) \quad (2.40)$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrwx}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เขียนได้เป็น

$$MSE(\bar{y}'_{lrwx}) \approx \frac{MSE(\bar{y}_{lr})}{(1 + \gamma C_x^2)^2} \quad (2.41)$$

ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบใหม่ เมื่อเฉพาะ C_x ถูกใช้ในตัวประมาณค่า ($\bar{y}'_{lrwx}$) จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบดั้งเดิม ($\bar{y}_{lr}$) เสมอ

จากนั้นทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และจากผลการศึกษาในงานวิจัย พบว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นทั้ง 2 ตัว ที่ถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของซิลส์ มีประสิทธิภาพมากที่สุด ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย

วิษญาพร สิงห์นวน และจิราวัลย์ จิตรถเวช (2559) ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์ในการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย (Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul, 2013) กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรอื่นที่ใช้การสุ่มตัวอย่างแบบง่าย โดยใช้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

ประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า ซึ่งตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์ที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่

$$1) \text{ ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เอนเอียงของซิลส์เขียนได้เป็น } \bar{y}'_S = \frac{\bar{y}}{1 + \gamma C_y^2}$$

โดยที่ C_y คือค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่ศึกษา ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า $\gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ คือค่าปรับแก้กรณีที่ประชากรมีจำนวนจำกัด และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเท่ากับ

$$\text{ดังนั้น } \text{MSE}(\bar{y}'_S) = \frac{\gamma C_y^2 \bar{Y}^2}{1 + \gamma C_y^2}$$

$$2) \text{ ตัวประมาณแบบอัตราส่วนแบบใหม่เขียนได้เป็น } \bar{y}'_{rwyx} = \frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} \bar{y}_r \text{ โดยที่}$$

C_y และ C_x คือค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่ศึกษาและตัวแปรช่วยตามลำดับ ซึ่งเป็นตัวที่ทราบค่า $\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปรช่วยในประชากร และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเท่ากับดังนี้

$$\text{MSE}(\bar{y}'_{rwyx}) \approx \left(\frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} \right)^2 \text{MSE}(\bar{y}_r)$$

3) ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นแบบใหม่ได้แก่

$$\bar{y}'_{lrwyx} = \bar{y}'_{wy} + b_{wyx} (\bar{X} - \bar{x}'_{wx}) \text{ เมื่อ } \bar{y}'_{wy} = \frac{\bar{y}}{1 + \gamma C_y^2}, \bar{x}'_{wx} = \frac{\bar{x}}{1 + \gamma C_x^2} \text{ โดยที่}$$

$$b_{wyx} = \frac{1 + \gamma C_x^2}{1 + \gamma C_y^2} b \text{ และ } b = \rho \frac{S_y}{S_x} \text{ (Cochran, 1977) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเท่ากับ}$$

$$\text{ดังนั้น } \text{MSE}(\bar{y}'_{lrwyx}) \approx \frac{\text{MSE}(\bar{y}_{lr})}{(1 + \gamma C_y^2)^2}$$

4) เมื่อเฉพาะ C_x ถูกใช้ในตัวประมาณค่า จะได้ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้น

$$\text{แบบใหม่เขียนได้เป็น } \bar{y}'_{lrwx} = \bar{y}'_{wx} + b_{wx} (\bar{X} - \bar{x}'_{wx}) \text{ โดยที่ } \bar{y}'_{wx} = \frac{\bar{y}}{1 + \gamma C_x^2} \text{ และ } b_{wx} = b \text{ และ}$$

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเท่ากับดังนี้ } \text{MSE}(\bar{y}'_{lrwx}) \approx \frac{\text{MSE}(\bar{y}_{lr})}{(1 + \gamma C_x^2)^2}$$

สำหรับการเปรียบเทียบตัวประมาณค่า ข้อมูลที่ใช้เป็นข้อมูลค่าเฉลี่ยจำนวนอาจารย์ต่อสถานศึกษาในเขตกรุงเทพมหานครและเขตปริมณฑลจำนวน 1,009 โรงเรียน ทำการสุ่มตัวอย่างโดยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย ไม่คืนที่ มาจำนวน 187 หน่วย และกระทำการสุ่มซ้ำจำนวน 30 ครั้ง

ผลการศึกษาพบว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นที่ถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของซิลส์ทั้ง 2 ตัว มีประสิทธิภาพมากที่สุด ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย สอดคล้องกับผลงานวิจัยทางทฤษฎีที่ได้ศึกษาไว้แล้วของ Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul (2013)

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการดำเนินการวิจัย ผู้วิจัยได้ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ และนำข้อกำหนดของซิลส์มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร และศึกษาเงื่อนไขที่สอดคล้องกับตัวประมาณค่า

3.1 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่ายไม่คืนที่

พิจารณาแบ่งประชากรออกเป็น N กลุ่มที่มีลักษณะของค่าสังเกต y_{ij} ภายในกลุ่มแตกต่างกันและลักษณะของตัวแปรระหว่างกลุ่มมีลักษณะคล้ายคลึงกัน และกลุ่มที่ i มีขนาดของกลุ่ม M_i หน่วย โดยที่ $i = 1, 2, \dots, N$ กำหนดให้ y_{ij} เป็นค่าสังเกตที่สนใจศึกษาจากหน่วยสังเกตที่ j ในกลุ่มที่ i ของประชากร โดยที่ $j = 1, 2, \dots, M_i, i = 1, 2, \dots, N$ และกำหนดให้

$$Y_i = \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}, \quad \bar{Y}_i = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij} \quad \text{เป็นค่ายอดรวม และค่าเฉลี่ยของค่าสังเกต } y_{ij} \text{ ในกลุ่มที่ } i$$

$$\text{ตามลำดับ} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{\sum_{i=1}^N M_i} \quad \text{เป็นค่าเฉลี่ยประชากร}$$

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i, \quad \bar{\bar{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{Y}_i \quad \text{เป็นขนาดเฉลี่ยของกลุ่ม และค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยของกลุ่มในประชากร ตามลำดับ}$$

$C_{\bar{Y}}, C_Y$ และ C_M เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม ของประชากร ตามลำดับ

ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่ม ได้แก่

1) ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่ายขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่า $M_i, i=1, 2, \dots, n$ จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่เป็น ตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ดังนี้ (Gupta and Kabe, 2011)

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i \quad (3.1)$$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ เท่ากับ

$$\text{Bias}(\bar{y}_1) = -\frac{N-1}{N} \rho_{YM} C_Y C_M \bar{Y} \quad (3.2)$$

โดยที่ ρ_{YM} เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มกับขนาดของกลุ่ม

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ เท่ากับ

$$V(\bar{y}_1) = \gamma C_Y^2 \bar{Y}^2 \quad (3.3)$$

โดยที่ $\gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ เป็นปัจจัยปรับค่ากรณีที่ประชากรมีจำนวนที่จำกัด

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ เท่ากับดังนี้

$$\text{MSE}(\bar{y}_1) = \gamma C_Y^2 \bar{Y}^2 + \left(\frac{N-1}{N} \right)^2 \rho_{YM}^2 C_Y^2 C_M^2 \bar{Y}^2 \quad (3.4)$$

2) ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่ายขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่า $M_i, i=1, 2, \dots, n$ จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วนที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ดังนี้ (Gupta and Kabe, 2011)

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (3.5)$$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง (First-Order Taylor Series Approximation) เท่ากับ

$$\text{Bias}(\bar{y}_2) \approx \bar{Y} (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M) \quad (3.6)$$

โดยที่ ρ_{YM} เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างค่ายอดรวมของกลุ่มกับขนาดของกลุ่ม

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เท่ากับ

$$V(\bar{y}_2) \approx \bar{Y}^2 (\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) \quad (3.7)$$

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เท่ากับดังนี้

$$\text{MSE}(\bar{y}_2) \approx \bar{Y}^2 (\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) \quad (3.8)$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ในสมการที่ (3.7) และ (3.8) มีค่าเท่ากัน เนื่องจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่งเท่านั้น

3.2 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์

ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้วิธีการของซิลส์ สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขึ้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ ตัวประมาณค่าตัวแรก พัฒนาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม และตัวประมาณค่าที่สอง พัฒนาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม มีทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง 4 ทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขึ้นเดียวแบบง่ายขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ เมื่อกำหนดให้ $\bar{Y}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ i ; $i = 1, 2, \dots, n$ และทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่มในประชากร (C_Y) และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของขนาดของกลุ่มในประชากร (C_M) เป็นตัวที่ทราบค่าและ γC_Y^2 มีค่าน้อยกว่า 1 จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ด้วยวิธีของซิลส์ที่พัฒนาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่มดังนี้

$$\bar{y}_{1s} = \left(\frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^n \bar{Y}_i}{n} \quad (3.9)$$

$$\text{ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ } \bar{y}_{1s} \text{ เท่ากับ } \text{Bias}(\bar{y}_{1s}) = \text{Bias}(\bar{y}_1) - \frac{\gamma C_Y^2 \bar{Y}}{1 + \gamma C_Y^2} \quad (3.10)$$

$$\text{ความแปรปรวนของตัวประมาณ } \bar{y}_{1s} \text{ เท่ากับ } V(\bar{y}_{1s}) = \frac{\gamma C_Y^2 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \quad (3.11)$$

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{1s}$ เท่ากับดังนี้

$$\text{MSE}(\bar{y}_{1s}) = \text{MSE}(\bar{y}_1) - \left[\frac{\gamma^2 C_Y^4 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)} - 2 \left(\frac{N-1}{N} \right) \rho_{YM} \frac{\gamma C_M C_Y^3 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)} \right] \quad (3.12)$$

พิสูจน์ ตัวประมาณค่าด้วยวิธีของซิลล์ที่นำเสนอเมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่มเป็นดังนี้

$$\bar{y}_{1_s} = \left(\frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^n \bar{Y}_i}{n}$$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\bar{y}_{1_s}) &= E(\bar{y}_{1_s}) - \bar{Y} \\ &= \frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i\right) - \bar{Y} \\ &= \frac{\bar{\bar{Y}}}{1 + \gamma C_Y^2} - \bar{Y} \\ &= \text{Bias}(\bar{y}_1) + \frac{\bar{\bar{Y}}}{1 + \gamma C_Y^2} - \bar{Y} \\ &= \text{Bias}(\bar{y}_1) - \frac{\gamma C_Y^2 \bar{\bar{Y}}}{1 + \gamma C_Y^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_{1_s}) &= E\left[\bar{y}_{1_s} - E(\bar{y}_{1_s})\right]^2 \\ &= \frac{1}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right]^2 \end{aligned}$$

ให้ $z_i = \bar{Y}_i$, $\bar{Z} = \bar{\bar{Y}}$ และ $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ จะได้ $E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right]^2 = E[\bar{z} - \bar{Z}]^2$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท

ที่ ก.1 ในภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned} E[\bar{z} - \bar{Z}]^2 &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{(N-1)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2}{(N-1)} \quad (\text{แทนค่า } z_i = \bar{Y}_i \text{ และ } \bar{Z} = \bar{\bar{Y}}) \\ &= \gamma C_Y^2 \bar{\bar{Y}}^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$V(\bar{y}_{1_s}) = \frac{\gamma C_Y^2 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \quad (3.14)$$

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}(\bar{y}_{1_s}) &= V(\bar{y}_{1_s}) + [\text{Bias}(\bar{y}_{1_s})]^2 \\
 &= \frac{V(\bar{y}_1)}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)^2} + \text{Bias}^2(\bar{y}_1) - 2\text{Bias}(\bar{y}_1) \frac{\gamma C_{\bar{Y}}^2 \bar{\bar{Y}}}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} + \frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)^2} \\
 &= \frac{V(\bar{y}_1)}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)^2} - V(\bar{y}_1) + V(\bar{y}_1) + \text{Bias}^2(\bar{y}_1) - \frac{2\text{Bias}(\bar{y}_1) \gamma C_{\bar{Y}}^2 \bar{\bar{Y}}}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} + \frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)^2} \\
 &= \text{MSE}(\bar{y}_1) + \frac{\gamma C_{\bar{Y}}^2 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)^2} + \frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)^2} - \gamma C_{\bar{Y}}^2 \bar{\bar{Y}}^2 - \frac{2\text{Bias}(\bar{y}_1) \gamma C_{\bar{Y}}^2 \bar{\bar{Y}}}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} \\
 &= \text{MSE}(\bar{y}_1) - \left[\frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} - 2 \left(\frac{N-1}{N} \right) \rho_{\bar{Y}M} \frac{\gamma C_M C_{\bar{Y}}^3 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} \right] \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 2 ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\rho_{\bar{Y}M} < \frac{\gamma C_{\bar{Y}}}{2 \left(\frac{N-1}{N} \right) C_M} \quad (3.16)$$

เมื่อ $\rho_{\bar{Y}M}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยของกลุ่มและขนาดของกลุ่มในประชากร γ เป็นปัจจัยปรับค่ากรณีประชากรมีจำนวนที่จำกัด $C_{\bar{Y}}$, C_M เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม ของประชากร ตามลำดับ และ N เป็นจำนวนกลุ่มของประชากร

พิสูจน์ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ เมื่อ $\text{MSE}(\bar{y}_1) > \text{MSE}(\bar{y}_{1_s})$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}(\bar{y}_1) &> \text{MSE}(\bar{y}_1) - \left[\frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} - 2 \left(\frac{N-1}{N} \right) \rho_{\bar{Y}M} \frac{\gamma C_M C_{\bar{Y}}^3 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} \right] \\
 \frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} &> 2 \left(\frac{N-1}{N} \right) \rho_{\bar{Y}M} \frac{\gamma C_M C_{\bar{Y}}^3 \bar{\bar{Y}}^2}{(1 + \gamma C_{\bar{Y}}^2)} \\
 \rho_{\bar{Y}M} &< \frac{\gamma C_{\bar{Y}}}{2 \left(\frac{N-1}{N} \right) C_M} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

ในกรณีไม่ทราบค่า $C_{\bar{Y}}$ และ C_M อาจประมาณได้จากตัวอย่างด้วย

$$\hat{C}_{\bar{Y}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_i - \bar{\bar{y}})^2}}{\bar{\bar{y}}} \quad \text{และ} \quad \hat{C}_M = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{m})^2}}{\bar{m}} \quad \text{โดยที่} \quad \bar{\bar{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i \quad \text{และ} \\ \bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$$

ในการพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซีกส์จากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน จะใช้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง (Second-Order Taylor Series Approximation) ซึ่งจะทำให้การพิสูจน์ตามทฤษฎีบทที่ 3 เพื่อให้มีความแม่นยำในการหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมากขึ้น ซึ่งทำให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าแตกต่างกับความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_2$

ทฤษฎีบทที่ 3 ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขึ้นเดียวแบบง่ายขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่า $M_i, i=1, 2, \dots, n$ จะได้ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับ

$$V(\bar{y}_2) \approx \bar{Y}^2 \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) - (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M)^2 + O(n^{-2}) \right] \quad (3.18)$$

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับดังนี้

$$\text{MSE}(\bar{y}_2) \approx \bar{Y}^2 \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) + O(n^{-2}) \right] \quad (3.19)$$

$$\text{เมื่อ } O(n^{-2}) = \frac{\theta_1}{n^2} (4C_{12} - 2C_{03} - 2C_{21}) + \frac{\theta_2}{n^2} (3C_{02}C_{20} + 6C_{11}^2 + 9C_{02}^2 - 18C_{02}C_{11})$$

$$\text{โดยที่ } \theta_1 = \frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}, \quad \theta_2 = \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \quad (\text{Sharma, Verma, Sanaullah}$$

$$\text{and Singh, 2013) และ } C_{rs} = \frac{E[(Y - E(Y))^r (M - E(M))^s]}{E^r(Y) E^s(M)} \quad (\text{Tin, 1965})$$

$$\text{พิสูจน์ ตัวประมาณ } \bar{y}_2 \text{ เขียนได้ดังนี้ } \bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n M_i} = \frac{\bar{Y}_t (1 + \delta_{\bar{Y}_t})}{\bar{M} (1 + \delta_{\bar{m}})}$$

กำหนดให้ $\delta_{\bar{y}_t} = \frac{(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)}{\bar{Y}_t}$, $\delta_{\bar{m}} = \frac{(\bar{m} - \bar{M})}{\bar{M}}$ จะได้ $E(\delta_{\bar{y}_t}) = 0$, $E(\delta_{\bar{m}}) = 0$,
 $E(\delta_{\bar{y}_t}^2) = \gamma C_Y^2$, $E(\delta_{\bar{m}}^2) = \gamma C_M^2$, $E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}) = \gamma \rho_{YM} C_Y C_M$ เมื่อ $\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$
, $\bar{Y}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ และ $\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i$ และจะได้ค่าคาดหวังต่อไปนี้ (Sharma, Verma,

Sanaullah and Singh, 2013)

$$\begin{aligned} E(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}) &= \frac{\theta_1}{n^2} C_{21}, & E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^2) &= \frac{\theta_1}{n^2} C_{12}, \\ E(\delta_{\bar{m}}^3) &= \frac{\theta_1}{n^2} C_{03}, & E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^3) &= 3 \frac{\theta_2}{n^2} C_{02} C_{11}, \\ E(\delta_{\bar{m}}^4) &= 3 \frac{\theta_2}{n^2} C_{02}^2 \text{ และ } E(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}^2) &= \frac{\theta_2}{n^2} (C_{02} C_{20} + 2C_{11}^2) \end{aligned}$$

(ดูพิสูจน์ได้ที่ ทฤษฎีบทที่ ก.2 และ ทฤษฎีบทที่ ก.3 ภาคผนวก ก)

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับ

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_2) &= E(\bar{y}_2^2) - [E(\bar{y}_2)]^2 \\ &\approx \left[\bar{Y}^2 E(1 + \delta_{\bar{y}_t}^2 + 3\delta_{\bar{m}}^2 + 3\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^2 + 5\delta_{\bar{m}}^4 + 2\delta_{\bar{y}_t} - 2\delta_{\bar{m}} - 4\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}} + 6\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^2 - 4\delta_{\bar{m}}^3 \right. \\ &\quad \left. - 8\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^3 - 2\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}) \right] - \left[\bar{Y} E(1 + \delta_{\bar{y}_t} - \delta_{\bar{m}} - \delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}} + \delta_{\bar{m}}^2 + \delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^2 - \delta_{\bar{m}}^3 \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^3 + \delta_{\bar{m}}^4) \right]^2 \\ &\approx \bar{Y}^2 \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) - (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta_1}{n^2} (4C_{12} - 2C_{03} - 2C_{21}) + \frac{\theta_2}{n^2} (3C_{02} C_{20} + 6C_{11}^2 + 9C_{02}^2 - 18C_{02} C_{11}) \right] \\ &\approx \bar{Y}^2 \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) - (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M)^2 + O(n^{-2}) \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

และ ค่าคาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับดังนี้

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\bar{y}_2) &= V(\bar{y}_2) + [\text{Bias}(\bar{y}_2)]^2 \\ &\approx \bar{Y}^2 \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) - (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M)^2 + O(n^{-2}) \right] \\ &\quad + \left[\bar{Y} (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M) \right]^2 \\ &\approx \bar{Y}^2 \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) + O(n^{-2}) \right] \quad (3.21) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 4 ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่ายขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ เมื่อกำหนดให้ Y_i เป็นค่ายอดรวมของกลุ่มที่ i ; $i = 1, 2, \dots, n$ และทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่มในประชากร (C_Y) และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของขนาดของกลุ่มในประชากร (C_M) เป็นตัวที่ทราบค่าและ γC_Y^2 มีค่าน้อยกว่า 1 จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ด้วยวิธีของซิลส์ที่พัฒนาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ดังนี้

$$\bar{y}_{2_s} = \left(\frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (3.22)$$

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่งเท่ากับ

$$\text{Bias}(\bar{y}_{2_s}) \approx \text{Bias}(\bar{y}_2) \left[\frac{C_M^2 - C_Y^2 - \rho_{YM} C_Y C_M}{(1 + \gamma C_Y^2)(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)} \right] \quad (3.23)$$

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สองเท่ากับ

$$V(\bar{y}_{2_s}) \approx \frac{\bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) - (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M)^2 + O(n^{-2}) \right] \quad (3.24)$$

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับดังนี้

$$\text{MSE}(\bar{y}_{2_s}) \approx \frac{\text{MSE}(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} - \frac{\gamma^2 C_Y^2 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \left[2(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M) - C_Y^2 \right] \quad (3.25)$$

พิสูจน์ ตัวประมาณค่าด้วยวิธีของซิลส์ที่นำเสนอเมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่มเป็นดังนี้

$$\bar{y}_{2_s} = \left(\frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n M_i} = \left(\frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \right) \frac{\bar{Y}_t(1 + \delta_{\bar{y}_t})}{\bar{M}(1 + \delta_{\bar{m}})}$$

กำหนดให้ $\delta_{\bar{y}_t} = \frac{(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)}{\bar{Y}_t}$, $\delta_{\bar{m}} = \frac{(\bar{m} - \bar{M})}{\bar{M}}$ จะได้ $E(\delta_{\bar{y}_t}) = 0$, $E(\delta_{\bar{m}}) = 0$,
 $E(\delta_{\bar{y}_t}^2) = \gamma C_Y^2$, $E(\delta_{\bar{m}}^2) = \gamma C_M^2$, $E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}) = \gamma \rho_{YM} C_Y C_M$ เมื่อ $\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$
, $\bar{Y}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ และ $\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i$

(ดูพิสูจน์ได้ที่ ทฤษฎีบทที่ ก.2 ภาคผนวก ก)

ค่าเอนเอียงของตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เท่ากับ

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\bar{y}_{2_s}) &= E(\bar{y}_{2_s}) - \bar{Y} \\ &\approx \frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \left[\bar{Y} E(1 + \delta_{\bar{y}_t} - \delta_{\bar{m}} - \delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}} + \delta_{\bar{m}}^2) \right] - \bar{Y} \\ &\approx \frac{1}{1 + \gamma C_Y^2} \left[\bar{Y} (1 + \gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M) \right] - \bar{Y} \\ &\approx \frac{\text{Bias}(\bar{y}_2)}{1 + \gamma C_Y^2} - \frac{\gamma C_Y^2}{1 + \gamma C_Y^2} \left[\frac{\text{Bias}(\bar{y}_2)}{\gamma (C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)} \right] \\ &\approx \text{Bias}(\bar{y}_2) \left[\frac{C_M^2 - C_Y^2 - \rho_{YM} C_Y C_M}{(1 + \gamma C_Y^2)(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับ

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_{2_s}) &= \frac{1}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} V(\bar{y}_2) \\ &\approx \frac{\bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) - (\gamma C_M^2 - \gamma \rho_{YM} C_Y C_M)^2 \right. \\ &\quad \left. + O(n^{-2}) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

และ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่สอง เท่ากับดังนี้

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\bar{y}_{2_s}) &= V(\bar{y}_{2_s}) + [\text{Bias}(\bar{y}_{2_s})]^2 \\ &\approx \frac{V(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} + \text{Bias}^2(\bar{y}_2) \frac{(C_M^2 - C_Y^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2 (C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{V(\bar{y}_2) + \text{Bias}^2(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} - \frac{\text{Bias}^2(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} + \frac{\text{Bias}^2(\bar{y}_2)(C_M^2 - C_Y^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2 (C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)^2} \\
&\approx \frac{\text{MSE}(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} - \frac{\text{Bias}^2(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \left[1 - \frac{(C_M^2 - C_Y^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)^2}{(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M)^2} \right] \\
&\approx \frac{\text{MSE}(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} - \frac{\gamma^2 C_Y^2 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \left[2(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M) - C_Y^2 \right] \tag{3.28}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 5 ตัวประมาณ $\bar{y}_{2s}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\rho_{YM} < \frac{(1 + \gamma C_Y^2) \gamma C_Y^2 + (4 + \gamma C_Y^2) \gamma C_M^2 + (2 + \gamma C_Y^2) O(n^{-2})}{(6 + 2\gamma C_Y^2) \gamma C_Y C_M} \tag{3.29}$$

เมื่อ ρ_{YM} เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของค่ายอดรวมของกลุ่มและขนาดของกลุ่มในประชากร γ เป็นปัจจัยปรับค่ากรณีประชากรมีจำนวนที่จำกัด และ C_Y, C_M เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม ของประชากร ตามลำดับ โดยที่ $O(n^{-2}) = \frac{\theta_1}{n^2} (4C_{12} - 2C_{03} - 2C_{21}) + \frac{\theta_2}{n^2} (3C_{02}C_{20} + 6C_{11}^2 + 9C_{02}^2 - 18C_{02}C_{11})$

พิสูจน์ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2s}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ เมื่อ

$\text{MSE}(\bar{y}_2) > \text{MSE}(\bar{y}_{2s})$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\text{MSE}(\bar{y}_2) > \frac{\text{MSE}(\bar{y}_2)}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} - \frac{\gamma^2 C_Y^2 \bar{Y}^2}{(1 + \gamma C_Y^2)^2} \left[2(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M) - C_Y^2 \right] \\
&(2\gamma C_Y^2 + \gamma^2 C_Y^4) \text{MSE}(\bar{y}_2) > \gamma^2 C_Y^2 \bar{Y}^2 \left[C_Y^2 - 2(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M) \right] \\
&(2 + \gamma C_Y^2) \left[(\gamma C_Y^2 + \gamma C_M^2 - 2\gamma \rho_{YM} C_Y C_M) + O(n^{-2}) \right] > \gamma \left[C_Y^2 - 2(C_M^2 - \rho_{YM} C_Y C_M) \right] \\
&\rho_{YM} < \frac{(1 + \gamma C_Y^2) \gamma C_Y^2 + (4 + \gamma C_Y^2) \gamma C_M^2 + (2 + \gamma C_Y^2) O(n^{-2})}{(6 + 2\gamma C_Y^2) \gamma C_Y C_M} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

ในกรณีไม่ทราบค่า C_Y , C_M และ $O(n^{-2})$ อาจประมาณได้จากตัวอย่างด้วย

$$\hat{C}_Y = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y}_t)^2}}{\bar{y}_t} \quad \text{และ} \quad \hat{C}_M = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{m})^2}}{\bar{m}} \quad \text{และ} \quad \hat{O}(n^{-2}) \quad \text{เมื่อ}$$

$$\hat{C}_{rs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{y}_t)^r (M_i - \bar{m})^s}{\bar{y}_t^r \bar{m}^s} \quad (\text{Sharma, Verma, Sanaullah and Singh, 2013}) \quad \text{โดยที่}$$

$$\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{และ} \quad \bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$$

บทที่ 4

ผลการวิจัย

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ด้วยวิธีของซิลส์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ และเพื่อตรวจสอบตัวประมาณค่าที่พัฒนาขึ้นจึงใช้ข้อมูลที่มีการเผยแพร่แล้วจากหนังสือของคอคแรน (Cochran, 1977) ดังแสดงไว้ในตารางที่ 4.1 โดยทำการศึกษาใน 2 กรณี ได้แก่

1) กรณีที่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม (C_Y) และขนาดของกลุ่ม (C_M) จากประชากร สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1_s}$) และตัวประมาณค่าเฉลี่ยของกลุ่มแบบเดิม ($\bar{y}_1$) และทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม (C_Y) และขนาดของกลุ่ม (C_M) จากประชากร สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2_s}$) และตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วนแบบเดิม ($\bar{y}_2$)

2) กรณีใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วย $\hat{C}_Y$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1_s}$) และตัวประมาณค่าเฉลี่ยของกลุ่มแบบเดิม ($\bar{y}_1$) และใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันด้วย $\hat{C}_Y$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2_s}$) และตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วนแบบเดิม ($\bar{y}_2$)

ทำการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ด้วยข้อมูลที่ประชากรมีการแบ่งออกเป็น 20 กลุ่ม ขนาดตัวอย่างที่ทำการศึกษากับ 5, 10 และ 15 กลุ่ม ตามลำดับ แต่ละขนาดตัวอย่างจะสุ่มเลือกทั้งหมด 30 ครั้ง โดยแต่ละขนาดตัวอย่างจะทำการสุ่มเลือกกลุ่มด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย และแต่ละขนาดตัวอย่างจะตรวจสอบเงื่อนไขที่หามาได้ของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์ จากนั้นทำการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของซิลส์และวิธีแบบเดิมทั้ง 30 ครั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า และนำค่าเฉลี่ยของทั้ง 30 ครั้งจากข้อมูลในภาคผนวก ข เป็นผลการวิจัยเชิงตัวเลข จะได้ผลลัพธ์ของตัวประมาณค่าเฉลี่ยของกลุ่มแบบเดิม ($\bar{y}_1$) และตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1_s}$) แสดงดังตารางที่ 4.2 และได้ผลลัพธ์ของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วนแบบเดิม ($\bar{y}_2$) และตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2_s}$) แสดงดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.1 ขนาดของกลุ่ม ค่ายอดรวมของกลุ่ม และค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ของประชากร ที่มีการแบ่งเป็น 20 กลุ่ม

กลุ่มที่	ขนาดของกลุ่ม (M_i)	ค่ายอดรวมของกลุ่ม (Y_i)	ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{Y}_i$)
1	15	577.5	38.5
2	19	845.5	44.5
3	19	836.0	44.0
4	16	768.0	48.0
5	16	832.0	52.0
6	19	731.5	38.5
7	18	774.0	43.0
8	18	900.0	50.0
9	18	720.0	40.0
10	18	945.0	52.5
11	20	1,350.0	67.5
12	18	729.0	40.5
13	19	1,092.5	57.5
14	19	1,254.0	66.0
15	18	621.0	34.5
16	16	824.0	51.5
17	16	880.0	55.0
18	19	655.5	34.5
19	19	950.0	50.0
20	19	836.0	44.0
รวม	359	17,121.5	952.0

แหล่งที่มา: Cochran, 1977: 306.

ค่าเฉลี่ยประชากร เท่ากับ

$$\bar{Y} = \frac{17,121.5}{359} = 47.6922$$

ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม จากประชากร จากตารางที่ 4.1 เท่ากับ $C_{\bar{Y}} = 0.1947$, $C_Y = 0.2270$ และ $C_M = 0.0777$ ตามลำดับ นำค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันเหล่านี้ของประชากร ไปหาค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากรของตัวประมาณ $\bar{y}_1$, $\bar{y}_{1_s}$, $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2_s}$ ในกรณีทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันจากประชากร

ตารางที่ 4.2 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1_s}$ ขนาดตัวอย่างและค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากรและจากตัวอย่าง

ขนาด ตัวอย่าง (กลุ่ม)	ค่าสัมประสิทธิ์ การแปรผัน	ตัวประมาณ ค่าเฉลี่ย ประชากร	ค่าประมาณ ค่าเฉลี่ย ประชากร	ค่าเอน เอียง	ความ แปร ปรวน	MSE	ค่าคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์ของตัว ประมาณค่า (%)
$n = 5$	$C_{\bar{Y}} = 0.1947$	$\bar{y}_1$	49.9733	-0.0650	14.2099	14.2148	5.0454
	$C_M = 0.0777$	$\bar{y}_{1_s}$	49.6909	-0.3474	14.0498	14.1713	4.5647
	$\hat{C}_{\bar{Y}} = 0.2436$	$\bar{y}_1$	49.9733	-0.0943	22.2830	22.2934	5.0454
	$\hat{C}_M = 0.0914$	$\bar{y}_{1_s}$	49.5306	-0.5370	21.8797	22.1747	4.3471
$n = 10$	$C_{\bar{Y}} = 0.1947$	$\bar{y}_1$	48.2767	-0.0262	4.4218	4.4227	3.1672
	$C_M = 0.0777$	$\bar{y}_{1_s}$	48.1854	-0.1175	4.4051	4.4191	3.1532
	$\hat{C}_{\bar{Y}} = 0.2112$	$\bar{y}_1$	48.2767	-0.0309	5.2161	5.2172	3.1672
	$\hat{C}_M = 0.0849$	$\bar{y}_{1_s}$	48.1690	-0.1386	5.1926	5.2120	3.1555
$n = 15$	$C_{\bar{Y}} = 0.1947$	$\bar{y}_1$	47.9778	-0.0031	1.4539	1.4540	0.8861
	$C_M = 0.0777$	$\bar{y}_{1_s}$	47.9475	-0.0334	1.4521	1.4533	0.8645
	$\hat{C}_{\bar{Y}} = 0.2091$	$\bar{y}_1$	47.9778	-0.0032	1.6772	1.6773	0.8861
	$\hat{C}_M = 0.0729$	$\bar{y}_{1_s}$	47.9428	-0.0381	1.6748	1.6763	0.8617

จากตารางที่ 4.2 ในกรณีทราบค่า $C_{\bar{Y}}$ และ C_M จากประชากร เมื่อพิจารณาจากค่า MSE พบว่า ขนาดตัวอย่าง $n = 5$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีค่า MSE = 14.1713 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่มีค่า MSE = 14.2148 ขนาดตัวอย่าง $n = 10$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีค่า MSE = 4.4191 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่มีค่า MSE = 4.4227 และ ขนาดตัวอย่าง $n = 15$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีค่า MSE = 1.4533 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่มีค่า MSE = 1.4540 ดังนั้น ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ภายใต้เงื่อนไขที่หามาได้จากสมการที่ (3.16)

ในกรณีใช้ค่าประมาณด้วย $\hat{C}_{\bar{Y}}$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง เมื่อพิจารณาจากค่า MSE พบว่า ขนาดตัวอย่าง $n = 5$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีค่า MSE = 22.1747 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่มีค่า MSE = 22.2934 ขนาดตัวอย่าง $n = 10$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีค่า MSE = 5.2120 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่มีค่า MSE = 5.2172 และ ขนาดตัวอย่าง $n = 15$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีค่า MSE = 1.6763 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่มีค่า MSE = 1.6773 ดังนั้น ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ภายใต้เงื่อนไขที่หามาได้จากสมการที่ (3.16)

จากขนาดตัวอย่างในตารางที่ 4.2 เมื่อพิจารณาขนาดตัวอย่างเปลี่ยนแปลงจากขนาดเล็กไปขนาดใหญ่ จะสังเกตเห็นว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะมีค่ามาก และลดลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

เมื่อพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า พบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ มีเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ทุกขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา ทั้งในกรณีทราบค่า $C_{\bar{Y}}$ และ C_M จากประชากร และในกรณีใช้ค่าประมาณด้วย $\hat{C}_{\bar{Y}}$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง

ตารางที่ 4.3 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2_s}$ ขนาดตัวอย่างและค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากรและจากตัวอย่าง

ขนาด ตัวอย่าง (กลุ่ม)	ค่าสัมประสิทธิ์ การแปรผัน	ตัวประมาณ ค่าเฉลี่ย ประชากร	ค่าประมาณ ค่าเฉลี่ย ประชากร	ค่าเอน เอียง	ความ แปร ปรวน	MSE	ค่าคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์ของตัว ประมาณค่า (%)
$n = 5$	$C_Y = 0.2270$	$\bar{y}_2$	50.0527	-0.0121	15.6607	15.6609	5.1912
	$C_M = 0.0777$	$\bar{y}_{2_s}$	49.6687	-0.3961	15.4213	15.5785	4.5375
	$\hat{C}_Y = 0.2849$	$\bar{y}_2$	50.0527	-0.0215	24.9816	24.9821	5.1912
	$\hat{C}_M = 0.0914$	$\bar{y}_{2_s}$	49.4489	-0.6251	24.3707	24.7679	4.2271
$n = 10$	$C_Y = 0.2270$	$\bar{y}_2$	48.3059	-0.0024	5.0869	5.0869	3.1730
	$C_M = 0.0777$	$\bar{y}_{2_s}$	48.1817	-0.1266	5.0608	5.0768	3.1526
	$\hat{C}_Y = 0.2417$	$\bar{y}_2$	48.3059	-0.0023	5.7800	5.7800	3.1730
	$\hat{C}_M = 0.0849$	$\bar{y}_{2_s}$	48.1649	-0.1434	5.7460	5.7667	3.1482
$n = 15$	$C_Y = 0.2270$	$\bar{y}_2$	47.9809	-0.0001	1.7433	1.7433	0.8972
	$C_M = 0.0777$	$\bar{y}_{2_s}$	47.9397	-0.0413	1.7403	1.7420	0.8678
	$\hat{C}_Y = 0.2336$	$\bar{y}_2$	47.9809	-0.0005	1.8473	1.8473	0.8972
	$\hat{C}_M = 0.0729$	$\bar{y}_{2_s}$	47.9373	-0.0441	1.8439	1.8459	0.8664

จากตารางที่ 4.3 ในกรณีทราบค่า C_Y และ C_M ของประชากร เมื่อพิจารณาจากค่า MSE พบว่า ขนาดตัวอย่าง $n = 5$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีค่า MSE = 15.5785 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่มีค่า MSE = 15.6609 ขนาดตัวอย่าง $n = 10$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีค่า MSE = 5.0768 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่มีค่า MSE = 5.0869 และ ขนาดตัวอย่าง $n = 15$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีค่า MSE = 1.7420 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่มีค่า MSE = 1.7433 ดังนั้น ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้เงื่อนไขที่หามาได้จากสมการที่ (3.29)

ในกรณีใช้ค่าประมาณด้วย $\hat{C}_Y$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง เมื่อพิจารณาจากค่า MSE พบว่า ขนาดตัวอย่าง $n = 5$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีค่า MSE = 24.7679 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่มีค่า MSE = 24.9821 ขนาดตัวอย่าง $n = 10$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีค่า MSE = 5.7667 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า

ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่มีค่า $MSE = 5.7800$ และ ขนาดตัวอย่าง $n = 15$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีค่า $MSE = 1.8459$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่มีค่า $MSE = 1.8473$ ดังนั้น ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ภายใต้เงื่อนไขที่หาได้จากสมการที่ (3.29)

จากขนาดตัวอย่างในตารางที่ 4.3 เมื่อพิจารณาขนาดตัวอย่างเปลี่ยนแปลงจากขนาดเล็กไปขนาดใหญ่ จะสังเกตเห็นว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะมีค่ามาก และลดลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

เมื่อพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า พบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ มีเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่าน้อยกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ทุกขนาดตัวอย่าง ในกรณีทราบค่า C_Y และ C_M ของประชากร และในกรณีใช้ค่าประมาณด้วย $\hat{C}_Y$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง

จากผลการวิจัยเชิงตัวเลขในตารางที่ 4.2 และ 4.3 ถึงแม้ว่าค่า MSE ของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอใหม่จะให้ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ดีกว่าทั้งหมด แต่ตัวเลขที่ได้นั้นไม่ได้แสดงให้เห็นว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอใหม่ดีกว่า ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิมอย่างชัดเจน เพราะว่าตัวเลขที่ได้นั้นใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นเมื่อพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า พบว่า เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร ที่ขนาดตัวอย่าง $n = 5$ ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.6454 - 11.9680$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0765 - 11.3352$ ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.6848 - 12.1777$ และตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0813 - 11.3170$ ขนาดตัวอย่าง $n = 10$ ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.1212 - 8.5083$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0681 - 8.3031$ ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.1853 - 8.5898$ และตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0723 - 8.3107$ และขนาดตัวอย่าง $n = 15$ ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0535 - 2.3927$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0929 - 2.3281$ ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0328 - 2.4055$ และตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.0663 - 2.3176$ ซึ่งจากผลการวิจัยของแต่ละขนาดตัวอย่างทั้ง 30 ครั้ง พบว่า ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอใหม่ส่วนใหญ่จะมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม และในกรณีใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันจากตัวอย่าง ที่ขนาดตัวอย่าง $n = 5$ ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.6454 - 11.9680$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.4100 - 10.7941$ ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.6848 - 12.1777$ และตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.3234 - 10.7232$ ขนาดตัวอย่าง $n = 10$ ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง $0.1212 - 8.5083$ ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะ

มีค่า RE อยู่ในช่วง 0.1362 - 8.2968 ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง 0.1853 - 8.5898 และตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง 0.1499 - 8.2984 และขนาดตัวอย่าง $n = 15$ ตัวประมาณ $\bar{y}_1$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง 0.0535 - 2.3927 ตัวประมาณ $\bar{y}_{1_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง 0.0835 - 2.3191 ตัวประมาณ $\bar{y}_2$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง 0.0328 - 2.4055 และตัวประมาณ $\bar{y}_{2_s}$ จะมีค่า RE อยู่ในช่วง 0.0606 - 2.3158 ซึ่งจากผลการวิจัยของแต่ละขนาดตัวอย่างทั้ง 30 ครั้ง พบว่า ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอใหม่ส่วนใหญ่จะมีค่าน้อยกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิมเช่นเดียวกัน แสดงให้เห็นว่าส่วนใหญ่ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ดีกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม

จากตารางที่ 4.2 และ 4.3 จะสังเกตเห็นได้ว่า ค่าเอนเอียงของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์มีค่ามากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม แต่ความแปรปรวนและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์มีค่าน้อยกว่า ซึ่งการนำวิธีของซิลส์มาใช้ก็เพื่อขอมให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าเอนเอียงเพิ่มขึ้น เพื่อให้ได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำลง ทำให้ตัวประมาณค่ามีประสิทธิภาพดีขึ้น

ตารางที่ 4.4 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น (เปอร์เซ็นต์) จากกรณีใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันจากตัวอย่าง เมื่อไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร

ขนาดตัวอย่าง (กลุ่ม)	ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร			
	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_{1_s}$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_{2_s}$
5	36.24	36.09	37.31	37.10
10	15.23	15.21	11.99	11.96
15	13.31	13.30	5.63	5.63

ในกรณีใช้ค่าประมาณด้วย $\hat{C}_{\bar{Y}}$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง เมื่อไม่ทราบค่า $C_{\bar{Y}}$ และ C_M ของประชากร สำหรับตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1_s}$ พบว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรดังกล่าวแต่ละขนาดตัวอย่างจะมีค่า MSE เพิ่มขึ้นตามที่แสดงในตารางที่ 4.4 และพบว่าจะมีค่าลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเปลี่ยนแปลงจากขนาดเล็กไปขนาดใหญ่

ในกรณีใช้ค่าประมาณด้วย $\hat{C}_Y$ และ $\hat{C}_M$ จากตัวอย่าง เมื่อไม่ทราบค่า C_Y และ C_M ของประชากร สำหรับตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2_s}$ พบว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรดังกล่าวแต่ละขนาดตัวอย่างจะมีค่า MSE เพิ่มขึ้นตามที่แสดงในตารางที่ 4.4 และพบว่าจะมีค่าลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเปลี่ยนแปลงจากขนาดเล็กไปขนาดใหญ่

บทที่ 5

สรุปผลและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้วิธีการของซิลส์ สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ ตัวประมาณค่าตัวแรก คือ ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1_s}$) เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($C_{\bar{Y}}$) และของขนาดของกลุ่ม (C_M) และตัวประมาณค่าที่สอง คือ ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2_s}$) เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม (C_Y) และของขนาดของกลุ่ม (C_M) ข้อมูลที่ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ทั้งสองกับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม เป็นข้อมูลที่มีการเผยแพร่แล้วจากหนังสือของคอแครน (Cochran, 1977) ที่ประชากรมีการแบ่งออกเป็น 20 กลุ่ม ซึ่งจะสุ่มเลือกตัวอย่างขนาดเท่ากับ 5, 10 และ 15 กลุ่ม แต่ละขนาดตัวอย่างจะสุ่มเลือกทั้งหมด 30 ครั้ง

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร พบว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1_s}$) มีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยของกลุ่มแบบเดิม ($\bar{y}_1$) ทุกขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา ทั้งในกรณีที่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($C_{\bar{Y}}$) และของขนาดของกลุ่ม (C_M) ของประชากร และในกรณีใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\hat{C}_{\bar{Y}}$) และของขนาดของกลุ่ม ($\hat{C}_M$) จากตัวอย่าง

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2_s}$) มีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วนแบบเดิม ($\bar{y}_2$) ทุกขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา ทั้งในกรณีที่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม (C_Y) และของขนาดของกลุ่ม (C_M) ของประชากร และในกรณีใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม ($\hat{C}_Y$) และของขนาดของกลุ่ม ($\hat{C}_M$) จากตัวอย่าง

ดังนั้น ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์ทั้ง 2 ตัวดังกล่าว มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม เมื่อข้อกำหนดสอดคล้องกับเงื่อนไขที่หามาได้

5.2 อภิปรายผลการวิจัย

การพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการศึกษานี้ใช้วิธีการของซิลส์ ซึ่งอาศัยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร ช่วยทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ด้วยวิธีของซิลส์ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร พบว่า เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม ของประชากร สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1s}$) และทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม ของประชากร สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2s}$) ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ทั้ง 2 ตัว มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิม ภายใต้เงื่อนไขที่หามาได้ ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul (2013) ที่ได้นำวิธีของซิลส์มาใช้พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย และสอดคล้องกับผลการศึกษาของ วิชญพร สิงห์นวล และจิราวัทย์ จิตรถเวช (2559) ที่ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของซิลส์กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ใช้การสุ่มตัวอย่างแบบง่าย

เมื่อทำการศึกษาเพิ่มเติมในกรณีไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรและใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\bar{y}_{1s}$) และใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง สำหรับตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ที่พัฒนามาจากค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วน ($\bar{y}_{2s}$) พบว่า เมื่อตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบซิลส์ทั้ง 2 ตัวดังกล่าว มีข้อกำหนดสอดคล้องกับเงื่อนไขที่หามาได้ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเดิมเช่นเดียวกัน

ดังนั้น ในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนาจากวิธีของซิลส์ สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ ควรทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ของ

ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่มของประชากร แต่หากไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันดังกล่าวของประชากร อาจประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันดังกล่าวได้จากตัวอย่าง

5.3 ข้อเสนอแนะ

1) งานวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้วิธีการของซิลส์ สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ ดังนั้นในการวิจัยครั้งต่อไปอาจใช้วิธีการของซิลส์พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มสองขั้น (Two-Stage Cluster Sampling) แบบง่าย ไม่คืนที่ หรือใช้วิธีการของซิลส์พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร สำหรับการเลือกตัวอย่างแบบอื่น อย่างเช่น การเลือกตัวอย่างแบบชั้นภูมิ (Stratified Sampling) เป็นต้น

2) สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ควรมีการใช้ข้อมูลจากการจำลองข้อมูลควบคู่กับข้อมูลจริงด้วย เพื่อพิสูจน์ความถูกต้องของทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ แต่เนื่องจากข้อจำกัดของการวิจัยที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 1 จึงทำให้ไม่ได้นำข้อมูลจากการจำลองข้อมูลมาใช้กับงานวิจัยครั้งนี้

บรรณานุกรม

- ประชุม สุวดี. 2552. การสำรวจด้วยตัวอย่าง: การชักตัวอย่างและการวิเคราะห์.
กรุงเทพมหานคร: โครงการส่งเสริมและพัฒนาเอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิต
พัฒนบริหารศาสตร์.
- ประชุม สุวดี. 2553. ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ. พิมพ์ครั้งที่ 3 ปรับปรุงแก้ไข.
กรุงเทพมหานคร: โครงการส่งเสริมและพัฒนาเอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิต
พัฒนบริหารศาสตร์.
- ประชุม สุวดี. 2554. ทฤษฎีการชักตัวอย่าง. กรุงเทพมหานคร: โครงการส่งเสริมและพัฒนา
เอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์.
- ประชุม สุวดี, พาชิตชนัด ศรีพานิช, จิราวัลย์ จิตรถเวช และสำรวม จงเจริญ. 2555. ระเบียบวิธี
สถิติ 1. กรุงเทพมหานคร: โครงการส่งเสริมและพัฒนาเอกสารวิชาการ สถาบัน
บัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์.
- วิษญาพร สิงห์นวล และจิราวัลย์ จิตรถเวช. 2559. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า
ต่างๆ กับตัวประมาณค่าของซิลส์ที่ปรับปรุงใหม่. วารสารวิจัยและพัฒนา มจร. 39
(กรกฎาคม - กันยายน): 327-336.
- สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. 2558. พจนานุกรมศัพท์สถิติศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา.
กรุงเทพมหานคร: สำนักงานราชบัณฑิตยสภา.
- Cochran, W. G. 1977. **Sampling Techniques**. 3rd ed. New York: John Wiley and Sons.
- Gupta, A. K. and Kabe, D. G. 2011. **Theory of Sample Surveys**. Singapore: World Scientific
Publishing.
- Jirawan Jitthavech and Vichit Lorchirachoonkul. 2013. Estimators in Simple Random Sampling:
Searls Approach. **Songklanakarin Journal of Science and Technology**. 35, 6
(November - December): 749-760.
- Nafiu, L. A. 2012. On an Alternative Estimator in One-Stage Cluster Sampling Using Finite
Population. **American International Journal of Contemporary Research**. 2
(July): 102-107.

- Sakizadeh, M. and Gerami, A. 2012. Some Improvement in the Estimation of Population Mean in Cluster Sampling. **Statistical Research and Training Center**. 9 (2012): 159-177.
- Searls, D. T. 1964. The Utilization of a Known Coefficient of Variation in the Estimation Procedure. **American Statistical Association Journal**. 59 (December): 1225-1226.
- Sharma, P.; Verma, H. K.; Sanaullah, A. and Singh, R. 2013. Some Exponential Ratio-Product Type Estimators Using Information on Auxiliary Attributes under Second Order Approximation. **International Journal of Statistics and Economics**. 12 (January): 58-66.
- Sukhatme, P. V. and Sukhatme, B. V. 1970. **Sampling Theory of Surveys with Applications**. Iowa: Iowa State University Press.
- Tin, M. 1965. Comparisons of Some Ratio Estimators. **Journal of American Statistics Association**. 60 (March): 294-307.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

บทพิสูจน์

ทฤษฎีบทที่ ก.1 เมื่อให้ $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ และ $E(\bar{z}) = \bar{Z}$ โดยที่ $\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$ จะได้

$$E(\bar{z} - \bar{Z})^2 = \left(\frac{1-f}{n} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{(N-1)} \quad (\text{Cochran, 1977})$$

พิสูจน์

$$n(\bar{z} - \bar{Z}) = (z_1 - \bar{Z}) + (z_2 - \bar{Z}) + \cdots + (z_n - \bar{Z})$$

$$n^2(\bar{z} - \bar{Z})^2 = [(z_1 - \bar{Z}) + (z_2 - \bar{Z}) + \cdots + (z_n - \bar{Z})]^2$$

$$n^2 E(\bar{z} - \bar{Z})^2 = E[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_n - \bar{Z})^2]$$

$$+ 2E[(z_1 - \bar{Z})(z_2 - \bar{Z}) + (z_1 - \bar{Z})(z_3 - \bar{Z}) + \cdots + (z_{n-1} - \bar{Z})(z_n - \bar{Z})] \quad (\text{ก.1})$$

จากบทแทรก (Cochran, 1977)

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

$$E(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \frac{n}{N} (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)$$

พิจารณาเทอมแรกของสมการที่ (72) จะได้

$$\begin{aligned} & E[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_n - \bar{Z})^2] \\ &= \frac{n}{N} [(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_N - \bar{Z})^2] \end{aligned} \quad (\text{ก.2})$$

และพิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (72) จะได้

$$\begin{aligned} & E\left[(z_1 - \bar{Z})(z_2 - \bar{Z}) + (z_1 - \bar{Z})(z_3 - \bar{Z}) + \cdots + (z_{n-1} - \bar{Z})(z_n - \bar{Z})\right] \\ &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left[(z_1 - \bar{Z})(z_2 - \bar{Z}) + (z_1 - \bar{Z})(z_3 - \bar{Z}) + \cdots + (z_{N-1} - \bar{Z})(z_N - \bar{Z}) \right] \end{aligned} \quad (ก.3)$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (73) และ (74) ลงในสมการที่ (72) จะได้

$$\begin{aligned} & n^2 E(\bar{z} - \bar{Z})^2 \\ &= \frac{n}{N} \left\{ \left[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_N - \bar{Z})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(n-1)}{(N-1)} \left[(z_1 - \bar{Z})(z_2 - \bar{Z}) + (z_1 - \bar{Z})(z_3 - \bar{Z}) + \cdots + (z_{N-1} - \bar{Z})(z_N - \bar{Z}) \right] \right\} \\ &= \frac{n}{N} \left\{ \left[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_N - \bar{Z})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)}{(N-1)} \left[\left((z_1 - \bar{Z}) + (z_2 - \bar{Z}) + \cdots + (z_N - \bar{Z}) \right)^2 - \left((z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (z_N - \bar{Z})^2 \right) \right] \right\} \\ &= \frac{n}{N} \left\{ \left[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_N - \bar{Z})^2 \right] - \frac{(n-1)}{(N-1)} \left[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (z_N - \bar{Z})^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{เพราะว่า } (z_1 - \bar{Z}) + (z_2 - \bar{Z}) + \cdots + (z_N - \bar{Z}) = \sum_{i=1}^N z_i - N\bar{Z} = 0$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{N} \left\{ \left[1 - \frac{(n-1)}{(N-1)} \right] \left[(z_1 - \bar{Z})^2 + (z_2 - \bar{Z})^2 + \cdots + (z_N - \bar{Z})^2 \right] \right\} \\ &= \frac{n}{N} \left\{ \left[1 - \frac{(n-1)}{(N-1)} \right] \left[\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (ก.4)$$

นำ n^2 หารทั้งสองข้างในสมการที่ (75) จะได้

$$E(\bar{z} - \bar{Z})^2 = \frac{n}{n^2 N} \left\{ \left[1 - \frac{(n-1)}{(N-1)} \right] \left[\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2 \right] \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{(N-1)} \quad (\text{ก.5})$$

ทฤษฎีบทที่ ก.2 เมื่อ $\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$, $\bar{Y}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ และ $\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i$

กำหนดให้ $\delta_{\bar{y}_t} = \frac{(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)}{\bar{Y}_t}$ และ $\delta_{\bar{m}} = \frac{(\bar{m} - \bar{M})}{\bar{M}}$ จะได้ค่าคาดหวังต่อไปนี้

$$E(\delta_{\bar{y}_t}) = 0, \quad E(\delta_{\bar{m}}) = 0, \quad E(\delta_{\bar{y}_t}^2) = \gamma C_Y^2,$$

$$E(\delta_{\bar{m}}^2) = \gamma C_M^2 \quad \text{และ} \quad E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}) = \gamma \rho_{YM} C_Y C_M$$

พิสูจน์

$$1) \quad E(\delta_{\bar{y}_t}) = \frac{E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)}{\bar{Y}_t} = 0 \quad (\text{ก.6})$$

$$2) \quad E(\delta_{\bar{m}}) = \frac{E(\bar{m} - \bar{M})}{\bar{M}} = 0 \quad (\text{ก.7})$$

$$3) \quad E(\delta_{\bar{y}_t}^2) = \frac{E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)^2}{\bar{Y}_t^2} \\ = \frac{1}{\bar{Y}_t^2} E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \bar{Y}_t \right]^2$$

ให้ $z_i = Y_i$, $\bar{Z} = \bar{Y}_t$ และ $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ จะได้ $E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \bar{Y}_t \right]^2 = E[\bar{z} - \bar{Z}]^2$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท

ที่ ก.1 ในภาคผนวก ก จะได้

$$E[\bar{z} - \bar{Z}]^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{(N-1)} \\ = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_t)^2}{(N-1)} \quad (\text{แทนค่า } z_i = Y_i \text{ และ } \bar{Z} = \bar{Y}_t) \\ = \gamma C_Y^2 \bar{Y}_t^2$$

$$\text{ดังนั้น} \quad E(\delta_{\bar{y}_t}^2) = \gamma C_Y^2 \quad (\text{ก.8})$$

$$4) \quad E(\delta_{\bar{m}}^2) = \frac{E(\bar{m} - \bar{M})^2}{\bar{M}^2}$$

$$= \frac{1}{\bar{M}^2} E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i - \bar{M} \right]^2$$

ให้ $z_i = M_i$, $\bar{Z} = \bar{M}$ และ $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ จะได้ $E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i - \bar{M} \right]^2 = E [\bar{z} - \bar{Z}]^2$ ดังนั้น จาก

ทฤษฎีบทที่ ก.1 ในภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned} E [\bar{z} - \bar{Z}]^2 &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{(N-1)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (M_i - \bar{M})^2}{(N-1)} \quad (\text{แทนค่า } z_i = M_i \text{ และ } \bar{Z} = \bar{M}) \\ &= \gamma C_M^2 \bar{M}^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad E(\delta_{\bar{m}}^2) = \gamma C_M^2 \quad (\text{ก.9})$$

$$5) \quad E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}) = \frac{E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)(\bar{m} - \bar{M})}{\bar{Y}_t \bar{M}}$$

หา $E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)(\bar{m} - \bar{M})$ โดยกำหนดให้ $z_i = Y_i + M_i$, $\bar{Z} = \bar{Y}_t + \bar{M}$ และ $\bar{z} = \bar{y}_t + \bar{m}$ ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ ก.1 ในภาคผนวก ก จะได้

$$E [\bar{z} - \bar{Z}]^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{(N-1)}$$

เมื่อแทนค่า $z_i = Y_i + M_i$, $\bar{Z} = \bar{Y}_t + \bar{M}$ และ $\bar{z} = \bar{y}_t + \bar{m}$ จะได้

$$E [(\bar{y}_t - \bar{Y}_t) + (\bar{m} - \bar{M})]^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N [(Y_i - \bar{Y}_t) + (M_i - \bar{M})]^2}{(N-1)}$$

$$E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)^2 + 2E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)(\bar{m} - \bar{M}) + E(\bar{m} - \bar{M})^2$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_t)^2}{(N-1)} + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_t)(M_i - \bar{M})}{(N-1)} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (M_i - \bar{M})^2}{(N-1)}$$

$$E(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)(\bar{m} - \bar{M}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_t)(M_i - \bar{M})}{(N-1)} = \gamma \rho_{YM} C_Y \bar{Y}_t C_M \bar{M}$$

ดังนั้น $E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}) = \gamma \rho_{YM} C_Y C_M$ (ก.10)

ทฤษฎีบทที่ ก.3 เมื่อ $\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$, $\bar{Y}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ และ $\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i$

กำหนดให้ $\varepsilon_{Y_i} = Y_i - \bar{Y}_t$, $\varepsilon_{M_i} = M_i - \bar{M}$, $\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t} = \bar{y}_t - \bar{Y}_t$, $\bar{\varepsilon}_{\bar{m}} = \bar{m} - \bar{M}$, $\delta_{\bar{y}_t} = \frac{(\bar{y}_t - \bar{Y}_t)}{\bar{Y}_t}$

และ $\delta_{\bar{m}} = \frac{(\bar{m} - \bar{M})}{\bar{M}}$ แล้วให้ $\mu_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_t)^r (M_i - \bar{M})^s$ จะได้ $C_{rs} = \frac{\mu_{rs}}{\bar{Y}_t^r \bar{M}^s}$

และกำหนดให้ $\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^a \varepsilon_{Y_j}^b \varepsilon_{M_i}^c \varepsilon_{M_j}^d = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^a \varepsilon_{M_i}^c \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j}^b \varepsilon_{M_j}^d - \varepsilon_{Y_i}^b \varepsilon_{M_i}^d \right)$ และ

$$\sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^a \varepsilon_{Y_j}^b \varepsilon_{Y_k}^u \varepsilon_{M_i}^c \varepsilon_{M_j}^d \varepsilon_{M_k}^v = \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^a \varepsilon_{Y_j}^b \varepsilon_{M_i}^c \varepsilon_{M_j}^d \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k}^u \varepsilon_{M_k}^v - \varepsilon_{Y_i}^u \varepsilon_{M_i}^v - \varepsilon_{Y_j}^u \varepsilon_{M_j}^v \right)$$

(Sukhatme and Sukhatme, 1970) จะได้ค่าคาดหวังต่อไปนี้ (Sharma, Verma, Sanaullah and Singh,

$$\begin{aligned} 2013) \quad E(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}) &= \frac{\theta_1}{n^2} C_{21}, \quad E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^2) = \frac{\theta_1}{n^2} C_{12}, \\ E(\delta_{\bar{m}}^3) &= \frac{\theta_1}{n^2} C_{03}, \quad E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^3) = 3 \frac{\theta_2}{n^2} C_{02} C_{11}, \\ E(\delta_{\bar{m}}^4) &= 3 \frac{\theta_2}{n^2} C_{02}^2 \text{ และ } E(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}^2) = \frac{\theta_2}{n^2} (C_{02} C_{20} + 2 C_{11}^2) \end{aligned}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} 1) \quad E(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}) &= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}} E(\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t}^2 \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}) \\ &= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}} \frac{1}{n^3} E \left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}} \frac{1}{n^3} E \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_k} \right] \\ &= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left(\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_k} \right] \end{aligned} \quad (\text{ก.11})$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (ก.11) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \\
&= -N\mu_{21}
\end{aligned} \tag{ก.12}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการที่ (ก.11) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \\
&= -N\mu_{21}
\end{aligned} \tag{ก.13}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการที่ (ก.11) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{Y_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} - \varepsilon_{Y_i} \right) \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} - \varepsilon_{Y_i} \right) \\
&\quad - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \\
&= 2N\mu_{21}
\end{aligned} \tag{ก.14}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (ก.12), (ก.13) และ (ก.14) ลงในสมการที่ (ก.11) จะได้

$$\begin{aligned}
E\left(\delta_{Y_i}^2 \delta_{\bar{m}}\right) &= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}} \frac{1}{n^3} \left[n\mu_{21} - 3 \frac{n(n-1)}{(N-1)} \mu_{21} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \mu_{21} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)} \right] \frac{\mu_{21}}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\theta_1}{n^2} C_{21} \quad (ก.15)$$

$$\begin{aligned}
2) \quad E\left(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^2\right) &= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^2} E\left(\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^2\right) \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^2} \frac{1}{n^3} E\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^2} \frac{1}{n^3} E\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^2} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left(\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \right] \quad (ก.16)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (ก.16) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \\
&= -N\mu_2 \quad (ก.17)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการที่ (ก.16) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \\
&= -N\mu_2 \quad (ก.18)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการที่ (ก.16) จะได้

$$\sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} = \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} + 2N\mu_{12} \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} + 2N\mu_{12} \\
&= 2N\mu_{12}
\end{aligned} \tag{ก.19}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (ก.17), (ก.18) และ (ก.19) ลงในสมการที่ (ก.16) จะได้

$$\begin{aligned}
E(\delta_{\bar{y}_i}^2 \delta_{\bar{m}}^2) &= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^2} \frac{1}{n^3} \left[n\mu_{12} - 3 \frac{n(n-1)}{(N-1)} \mu_{12} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \mu_{12} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)} \right] \frac{\mu_{12}}{\bar{Y}_t \bar{M}^2} \\
&= \frac{\theta_1}{n^2} C_{12}
\end{aligned} \tag{ก.20}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad E(\delta_{\bar{m}}^3) &= \frac{1}{\bar{M}^3} E(\bar{\varepsilon}_{\bar{m}} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^2) \\
&= \frac{1}{\bar{M}^3} \frac{1}{n^3} E \left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\bar{M}^3} \frac{1}{n^3} E \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}^3 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \right] \\
&= \frac{1}{\bar{M}^3} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^3 + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left(\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \right]
\end{aligned} \tag{ก.21}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (ก.21) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^3 \\
&= -N\mu_{03}
\end{aligned} \tag{ก.22}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการที่ (ก.21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^2 \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^2 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^3 \\
 &= -N\mu_{03}
 \end{aligned} \tag{ก.23}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการที่ (ก.21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} + 2N\mu_{03} \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} + 2N\mu_{03} \\
 &= 2N\mu_{03}
 \end{aligned} \tag{ก.24}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (ก.22), (ก.23) และ (ก.24) ลงในสมการที่ (ก.21) จะได้

$$\begin{aligned}
 E(\delta_{\bar{m}}^3) &= \frac{1}{\bar{M}^3} \frac{1}{n^3} \left[n\mu_{03} - 3 \frac{n(n-1)}{(N-1)} \mu_{03} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \mu_{03} \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)} \right] \frac{\mu_{03}}{\bar{M}^3} \\
 &= \frac{\theta_1}{n^2} C_{03}
 \end{aligned} \tag{ก.25}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad E(\delta_{\bar{y}_t} \delta_{\bar{m}}^3) &= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} E(\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^3) \\
 &= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} E \left[(\bar{\varepsilon}_{\bar{m}}) (\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^2) \right] \\
 &= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} \frac{1}{n^4} E \left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} \frac{1}{n^4} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i} \right) \left(\sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} \frac{1}{n^4} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^3 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 + 3 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} \right. \\
&\quad + 3 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 3 \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} + 3 \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \varepsilon_{M_l} \right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} \frac{1}{n^4} \mathbb{E} \left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^3 \right. \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left(\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 + 3 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} + 3 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \right) \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \left(3 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} + 3 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \right) \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \varepsilon_{M_l} \right] \quad (ก.26)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^3 - \varepsilon_{M_i}^3 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^3 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^3 \\
&= -N\mu_3 \quad (ก.27)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^3 \\
&= -N\mu_3 \quad (ก.28)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^3 \\
 &= N^2 \mu_{11} \mu_{02} - N \mu_{13}
 \end{aligned} \tag{ก.29}$$

พิจารณาเทอมที่ห้าของสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
 &= 2N \mu_{13} - N^2 \mu_{11} \mu_{02}
 \end{aligned} \tag{ก.30}$$

พิจารณาเทอมที่หกของสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \\
 &= 2N \mu_{13} - N^2 \mu_{11} \mu_{02}
 \end{aligned} \tag{ก.31}$$

พิจารณาเทอมที่เจ็ดของสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \varepsilon_{M_l} &= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \left(\sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_k} \right) \\
 &= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
 &\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2 \\
 &= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
 &\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 - \varepsilon_{M_j}^2 \right) \\
 &= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 \\
& + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
& = \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
& - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 \\
& + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
& = \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
& - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 \\
& + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
& = -6N\mu_{13} + 3N^2\mu_{11}\mu_{02} \tag{ก.32}
\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (ก.27), (ก.28), (ก.29), (ก.30), (ก.31) และ (ก.32) ลงในสมการที่ (ก.26) จะได้

$$\begin{aligned}
E(\delta_{\bar{y}_c} \delta_{\bar{m}}^3) &= \frac{1}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} \frac{1}{n^4} \left[n\mu_{13} + \frac{n(n-1)}{(N-1)} (-\mu_{13} - 3\mu_{13} + 3N\mu_{11}\mu_{02} - 3\mu_{13}) \right. \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} (6\mu_{13} - 3N\mu_{11}\mu_{02} + 6\mu_{13} - 3N\mu_{11}\mu_{02}) \\
&- \left. \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} (6\mu_{13} - 3N\mu_{11}\mu_{02}) \right] \\
&= \left[\frac{(N-n)(N^2 + N - 6nN + 6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^3} \frac{\mu_{13}}{\bar{Y}_t \bar{M}^3} \right. \\
&+ 3 \frac{(n-1)N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^3} \frac{\mu_{02}}{\bar{M}^2} \frac{\mu_{11}}{\bar{Y}_t \bar{M}} \left. \right] \\
&= 3 \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^2} \frac{\mu_{02}}{\bar{M}^2} \frac{\mu_{11}}{\bar{Y}_t \bar{M}} \\
&= 3 \frac{\theta_2}{n^2} C_{02} C_{11} \tag{ก.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad E(\delta_{\bar{m}}^4) &= \frac{1}{\bar{M}^4} E(\bar{\varepsilon}_{\bar{m}} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^3) \\
&= \frac{1}{\bar{M}^4} E\left[(\bar{\varepsilon}_{\bar{m}})(\bar{\varepsilon}_{\bar{m}} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^2)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{M}^4} \frac{1}{n^4} E\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}^3 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{M}^4} \frac{1}{n^4} E\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}^3\right) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}\right) \left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2\right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}\right) \left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j}\right) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}\right) \left(\sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{M}^4} \frac{1}{n^4} E\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{M_i}^4 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 + 3 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 + 3 \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} + 3 \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \varepsilon_{M_l}\right] \\
&= \frac{1}{\bar{M}^4} \frac{1}{n^4} E\left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left(\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 + 3 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} + 3 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \left(3 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} + 3 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \varepsilon_{M_l}\right] \tag{ก.34}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (ก.34) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^3 - \varepsilon_{M_i}^3\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^3 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^4 \\
&= -N\mu_{04} \tag{ก.35}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการที่ (ก.34) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^3 \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^3 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^4 \\
 &= -N\mu_{04}
 \end{aligned} \tag{ก.36}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการที่ (ก.34) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^2 \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^2 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^4 \\
 &= N^2 \mu_{02}^2 - N\mu_{04}
 \end{aligned} \tag{ก.37}$$

พิจารณาเทอมที่ห้าของสมการที่ (ก.34) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
 &= 2N\mu_{04} - N^2 \mu_{02}^2
 \end{aligned} \tag{ก.38}$$

พิจารณาเทอมที่หกของสมการที่ (ก.34) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 - \varepsilon_{M_j}^2 \right) \\
 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{M_i}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k}^2 - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^3 \\
 &= 2N\mu_{04} - N^2 \mu_{02}^2
 \end{aligned} \tag{ก.39}$$

พิจารณาเทอมที่เจ็ดของสมการที่ (ก.34) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \varepsilon_{M_l} &= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \left(\sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_k} \right) \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2 \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
&\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2 \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{M_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^3 \varepsilon_{M_j} \\
&\quad + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{M_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}^2 \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}^2 \\
&= -6N\mu_{04} + 3N^2\mu_{02}^2 \tag{ก.40}
\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (ก.35), (ก.36), (ก.37), (ก.38), (ก.39) และ (ก.40) ลงในสมการที่ (ก.34) จะได้

$$\begin{aligned}
E(\delta_m^4) &= \frac{1}{\bar{M}^4} \frac{1}{n^4} \left[n\mu_{04} + \frac{n(n-1)}{(N-1)} (-\mu_{04} - 3\mu_{04} + 3N\mu_{02}^2 - 3\mu_{04}) \right. \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} (6\mu_{04} - 3N\mu_{02}^2 + 6\mu_{04} - 3N\mu_{02}^2) \\
&\quad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} (6\mu_{04} - 3N\mu_{02}^2) \right] \\
&= \left[\frac{(N-n)(N^2 + N - 6nN + 6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^3} \frac{\mu_{04}}{\bar{M}^4} \right. \\
&\quad \left. + 3 \frac{(n-1)N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^3} \frac{\mu_{02}^2}{\bar{M}^4} \right] \\
&= 3 \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^2} \frac{\mu_{02}^2}{\bar{M}^4} \\
&= 3 \frac{\theta_2}{n^2} C_{02}^2 \tag{ก.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad \mathbb{E}(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}^2) &= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \mathbb{E}(\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t}^2 \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^2) \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \mathbb{E}\left[\left(\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t}\right)\left(\bar{\varepsilon}_{\bar{y}_t} \bar{\varepsilon}_{\bar{m}}^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \frac{1}{n^4} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \frac{1}{n^4} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}\right)\left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2\right)\right. \\
&\quad \left.+ 2\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}\right)\left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}\right) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}\right)\left(\sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \frac{1}{n^4} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i}^2\right)\right. \\
&\quad \left.+ \left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i}^2 + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_j}^2\right)\right. \\
&\quad \left.+ 2\left(\sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right. \\
&\quad \left.+ \left(\sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} + 2 \sum_{i \neq j \neq k}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_l} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \frac{1}{n^4} \mathbb{E}\left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2\right. \\
&\quad \left.+ \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left(2 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i}^2 + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ 2 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}\right)\right. \\
&\quad \left.+ \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \left(\sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} + 2 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right)\right. \\
&\quad \left.+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_l} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k}\right] \quad (n.42)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i}^2 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} - \varepsilon_{Y_i} \right) \varepsilon_{M_i}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 \\
 &= -N\mu_{22}
 \end{aligned} \tag{ก.43}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 \\
 &= N^2 \mu_{20} \mu_{02} - N\mu_{22}
 \end{aligned} \tag{ก.44}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 \\
 &= -N\mu_{22}
 \end{aligned} \tag{ก.45}$$

พิจารณาเทอมที่ห้าของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 \\
 &= N^2 \mu_{11}^2 - N\mu_{22}
 \end{aligned} \tag{ก.46}$$

พิจารณาเทอมที่หกของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_j}^2 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} - \varepsilon_{Y_i} - \varepsilon_{Y_j} \right) \\
 &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j}^2 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 \\
&= -N^2 \mu_{20} \mu_{02} + 2N \mu_{22} \tag{ก.47}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่เจ็ดของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} - \varepsilon_{Y_i} - \varepsilon_{Y_j} \right) \\
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \\
&= 2N \mu_{22} - N^2 \mu_{11}^2 \tag{ก.48}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่แปดของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j}^2 \\
&= 2N \mu_{22} - N^2 \mu_{20} \mu_{02} \tag{ก.49}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่เก้าของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{M_j} \right) \\
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 \\
&= \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 - \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i}^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i}^2 \\
&= 2N \mu_{22} - N^2 \mu_{11}^2 \tag{ก.50}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สิบของสมการที่ (ก.42) จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_l} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} &= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \left(\sum_{l=1}^N \varepsilon_{Y_l} - \varepsilon_{Y_i} - \varepsilon_{Y_j} - \varepsilon_{Y_k} \right) \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{Y_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_k} \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{Y_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_k} - \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} - \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \right) \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{Y_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_k} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{Y_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} - \varepsilon_{M_i} \right) \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 \\
&= \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \sum_{l=1}^N \varepsilon_{Y_l} - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad - \sum_{i \neq j \neq k}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j} \varepsilon_{M_k} - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{M_j} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_k} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{M_i} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{Y_k} \varepsilon_{M_k} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i}^2 \varepsilon_{M_i} \varepsilon_{M_j} + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{Y_i} \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{M_j}^2 \\
&= -6N\mu_{22} + 2N^2\mu_{11}^2 + N^2\mu_{20}\mu_{02} \tag{ก.51}
\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการที่ (ก.43), (ก.44), (ก.45), (ก.46), (ก.47), (ก.48), (ก.49), (ก.50) และ (ก.51)

ลงในสมการที่ (ก.42) จะได้

$$E\left(\delta_{\bar{y}_t}^2 \delta_{\bar{m}}^2\right) = \frac{1}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \frac{1}{n^4} \left[n\mu_{22} + \frac{n(n-1)}{(N-1)} \left(N^2\mu_{20}\mu_{02} + 2N^2\mu_{11}^2 - 7N\mu_{22} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \left(2N^2 \mu_{20} \mu_{02} + 4N^2 \mu_{11}^2 - 12N \mu_{22} \right) \\
& + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \left(N^2 \mu_{20} \mu_{02} + 2N^2 \mu_{11}^2 - 6N \mu_{22} \right) \Big] \\
& = \left[\frac{(N-n)(N^2 + N - 6nN + 6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^3} \frac{\mu_{22}}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(n-1)N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^3} \left(\frac{\mu_{20} \mu_{02}}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} + 2 \frac{\mu_{11}^2}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \right) \right] \\
& = \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\mu_{20} \mu_{02}}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} + 2 \frac{\mu_{11}^2}{\bar{Y}_t^2 \bar{M}^2} \right) \\
& = \frac{\theta_2}{n^2} \left(C_{20} C_{02} + 2C_{11}^2 \right) \tag{n.52}
\end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

ค่าประมาณของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร

จากตารางที่ ข.1 – ข.6 แสดงค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_{1s}$ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10 และ 15 กลุ่ม ตามลำดับ และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม จากประชากรและจากตัวอย่าง ที่แต่ละขนาดตัวอย่างมีการสุ่มเลือกทั้งหมด 30 ครั้ง และแต่ละขนาดตัวอย่างสอดคล้องกับเงื่อนไขที่หามาได้

จากตารางที่ ข.7 – ข.12 แสดงค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2s}$ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10 และ 15 กลุ่ม ตามลำดับ และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่ายอดรวมของกลุ่ม และของขนาดของกลุ่ม จากประชากรและจากตัวอย่าง ที่แต่ละขนาดตัวอย่างมีการสุ่มเลือกทั้งหมด 30 ครั้ง และแต่ละขนาดตัวอย่างสอดคล้องกับเงื่อนไขที่หามาได้

ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของ ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากประชากรเท่ากับ $C_{\bar{y}} = 0.1947$, $C_Y = 0.2270$ และ $C_M = 0.0777$ ตามลำดับ และแถวสุดท้ายของแต่ละตาราง จะแสดงถึงค่าเฉลี่ยของ 30 ครั้ง

ตารางที่ ข.1 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
 เฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ
 $\bar{y}_{1s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม
 จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 5$

แบบเดิม					แบบซีสต์				
$\bar{y}_1$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{1s}$	Bias	Variance	MSE	RE
50.2000	-0.0299	14.3240	14.3249	5.2583	49.9163	-0.3136	14.1626	14.2609	4.6634
49.6000	-0.1039	13.9837	13.9945	4.0002	49.3197	-0.3842	13.8260	13.9737	3.4124
51.4000	-0.0311	15.0170	15.0180	7.7744	51.1095	-0.3216	14.8478	14.9512	7.1653
49.0000	-0.0950	13.6474	13.6564	2.7422	48.7231	-0.3719	13.4936	13.6319	2.1615
49.9000	-0.0513	14.1533	14.1560	4.6293	49.6180	-0.3334	13.9938	14.1049	4.0379
50.6000	-0.0958	14.5532	14.5624	6.0970	50.3140	-0.3818	14.3892	14.5349	5.4974
51.2000	-0.0975	14.9004	14.9099	7.3551	50.9106	-0.3869	14.7324	14.8821	6.7483
48.8000	-0.0072	13.5362	13.5363	2.3228	48.5242	-0.2830	13.3836	13.4637	1.7445
52.1000	-0.0717	15.4288	15.4340	9.2422	51.8055	-0.3661	15.2549	15.3890	8.6248
48.0000	-0.0643	13.0960	13.1002	0.6454	47.7287	-0.3356	12.9484	13.0611	0.0765
48.9000	-0.0566	13.5917	13.5949	2.5325	48.6236	-0.3329	13.4385	13.5494	1.9530
50.0000	-0.0890	14.2101	14.2180	4.8389	49.7174	-0.3716	14.0499	14.1880	4.2464
49.6000	-0.0369	13.9837	13.9850	4.0002	49.3197	-0.3172	13.8260	13.9267	3.4124
50.3000	-0.0301	14.3811	14.3821	5.4680	50.0157	-0.3144	14.2190	14.3179	4.8719
53.4000	-0.0829	16.2084	16.2153	11.9680	53.0982	-0.3847	16.0257	16.1737	11.3352
51.3000	-0.0399	14.9586	14.9602	7.5648	51.0101	-0.3299	14.7900	14.8988	6.9568
48.4000	-0.0869	13.3152	13.3228	1.4841	48.1264	-0.3605	13.1651	13.2951	0.9105
48.8000	-0.0862	13.5362	13.5437	2.3228	48.5242	-0.3621	13.3836	13.5147	1.7445
52.1000	-0.0717	15.4288	15.4340	9.2422	51.8055	-0.3661	15.2549	15.3890	8.6248
52.6000	-0.0844	15.7264	15.7335	10.2906	52.3027	-0.3817	15.5491	15.6948	9.6672
49.1000	-0.0894	13.7032	13.7111	2.9518	48.8225	-0.3669	13.5487	13.6833	2.3700
50.0000	-0.0890	14.2101	14.2180	4.8389	49.7174	-0.3716	14.0499	14.1880	4.2464
47.1000	-0.0307	12.6095	12.6105	1.2417	46.8338	-0.2969	12.4674	12.5556	1.7999
51.0000	-0.0597	14.7842	14.7878	6.9357	50.7118	-0.3480	14.6176	14.7387	6.3313
49.6000	-0.1000	13.9837	13.9937	4.0002	49.3197	-0.3803	13.8260	13.9707	3.4124
47.3000	-0.0523	12.7169	12.7196	0.8224	47.0327	-0.3197	12.5735	12.6757	1.3829
46.8000	-0.0321	12.4494	12.4505	1.8707	46.5355	-0.2966	12.3091	12.3971	2.4254
51.4000	-0.0623	15.0170	15.0209	7.7744	51.1095	-0.3528	14.8478	14.9722	7.1653
51.8000	-0.0642	15.2517	15.2558	8.6131	51.5072	-0.3570	15.0797	15.2072	7.9993
48.9000	-0.0566	13.5917	13.5949	2.5325	48.6236	-0.3329	13.4385	13.5494	1.9530
49.9733	-0.0650	14.2099	14.2148	5.0454	49.6909	-0.3474	14.0498	14.1713	4.5647

ตารางที่ ข.2 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
เฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ
 $\bar{y}_{1s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง
เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 5$

$\hat{C}_{\bar{Y}}$	$\hat{C}_M$	แบบเดิม					แบบจำลอง				
		$\bar{y}_1$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{1s}$	Bias	Variance	MSE	RE
0.2455	0.0824	50.2000	-0.0400	22.7738	22.7754	5.2583	49.7504	-0.4896	22.3676	22.6074	4.3156
0.2440	0.0815	49.6000	-0.1366	21.9638	21.9824	4.0002	49.1611	-0.5755	21.5768	21.9080	3.0800
0.2161	0.1039	51.4000	-0.0462	18.5138	18.5159	7.7744	51.0423	-0.4039	18.2570	18.4201	7.0245
0.2642	0.1005	49.0000	-0.1668	25.1438	25.1716	2.7422	48.4922	-0.6746	24.6253	25.0804	1.6774
0.2431	0.1039	49.9000	-0.0858	22.0763	22.0836	4.6293	49.4615	-0.5243	21.6899	21.9648	3.7098
0.2326	0.1005	50.6000	-0.1481	20.7825	20.8044	6.0970	50.1926	-0.5555	20.4492	20.7578	5.2428
0.2204	0.1005	51.2000	-0.1428	19.0988	19.1191	7.3551	50.8297	-0.5131	18.8235	19.0867	6.5786
0.2667	0.1039	48.8000	-0.0132	25.4175	25.4177	2.3228	48.2847	-0.5285	24.8835	25.1629	1.2422
0.2262	0.1120	52.1000	-0.1201	20.8388	20.8532	9.2422	51.7031	-0.5170	20.5224	20.7898	8.4099
0.2686	0.1039	48.0000	-0.1188	24.9375	24.9516	0.6454	47.4860	-0.6327	24.4063	24.8066	-0.4323
0.2596	0.0824	48.9000	-0.0800	24.1763	24.1827	2.5325	48.4105	-0.5695	23.6947	24.0190	1.5062
0.2585	0.0815	50.0000	-0.1240	25.0500	25.0654	4.8389	49.5040	-0.6200	24.5554	24.9398	3.7989
0.2374	0.0862	49.6000	-0.0499	20.8013	20.8037	4.0002	49.1841	-0.4658	20.4539	20.6709	3.1283
0.2438	0.0815	50.3000	-0.0396	22.5488	22.5503	5.4680	49.8557	-0.4839	22.1521	22.3863	4.5363
0.2658	0.0815	53.4000	-0.1188	30.2138	30.2279	11.9680	52.8401	-0.6786	29.5835	30.0440	10.7941
0.2165	0.1039	51.3000	-0.0594	18.4988	18.5023	7.5648	50.9419	-0.4175	18.2414	18.4157	6.8139
0.2670	0.0815	48.4000	-0.1251	25.0575	25.0732	1.4841	47.8878	-0.6374	24.5299	24.9362	0.4100
0.2362	0.0862	48.8000	-0.1161	19.9238	19.9372	2.3228	48.3951	-0.5209	19.5945	19.8659	1.4739
0.2262	0.1120	52.1000	-0.1201	20.8388	20.8532	9.2422	51.7031	-0.5170	20.5224	20.7898	8.4099
0.2160	0.0815	52.6000	-0.0983	19.3575	19.3672	10.2906	52.2345	-0.4638	19.0894	19.3045	9.5243
0.2464	0.0824	49.1000	-0.1200	21.9638	21.9782	2.9518	48.6567	-0.5633	21.5690	21.8863	2.0224
0.2585	0.0815	50.0000	-0.1240	25.0500	25.0654	4.8389	49.5040	-0.6200	24.5554	24.9398	3.7989
0.2930	0.0824	47.1000	-0.0490	28.5638	28.5662	1.2417	46.5013	-0.6478	27.8422	28.2618	2.4971
0.2180	0.0824	51.0000	-0.0710	18.5438	18.5488	6.9357	50.6390	-0.4320	18.2821	18.4688	6.1787
0.2440	0.0824	49.6000	-0.1329	21.9638	21.9814	4.0002	49.1611	-0.5718	21.5768	21.9038	3.0800
0.2761	0.0815	47.3000	-0.0779	25.5863	25.5923	0.8224	46.7652	-0.6127	25.0109	25.3863	1.9438
0.2093	0.1100	46.8000	-0.0489	14.3925	14.3949	1.8707	46.4945	-0.3544	14.2052	14.3308	2.5114
0.2205	0.0862	51.4000	-0.0783	19.2638	19.2699	7.7744	51.0279	-0.4503	18.9859	19.1887	6.9943
0.2283	0.1005	51.8000	-0.0974	20.9738	20.9832	8.6131	51.3982	-0.4992	20.6497	20.8988	7.7707
0.2596	0.0824	48.9000	-0.0800	24.1763	24.1827	2.5325	48.4105	-0.5695	23.6947	24.0190	1.5062
0.2436	0.0914	49.9733	-0.0943	22.2830	22.2934	5.0454	49.5306	-0.5370	21.8797	22.1747	4.3471

ตารางที่ ข.3 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
 เหลือ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ
 $\bar{y}_{1s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม
 จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 10$

$\bar{y}_1$	แบบเดิม				$\bar{y}_{1s}$	แบบจำลอง			
	Bias	Variance	MSE	RE		Bias	Variance	MSE	RE
49.0500	-0.0254	4.5584	4.5591	2.8470	48.9572	-0.1182	4.5412	4.5552	2.6525
46.9000	-0.0280	4.1676	4.1683	1.6611	46.8113	-0.1167	4.1518	4.1654	1.8470
46.3500	-0.0343	4.0704	4.0716	2.8143	46.2623	-0.1219	4.0550	4.0699	2.9981
47.0500	-0.0421	4.1943	4.1960	1.3466	46.9610	-0.1311	4.1784	4.1956	1.5331
48.5500	-0.0137	4.4660	4.4661	1.7986	48.4582	-0.1055	4.4491	4.4602	1.6061
48.1000	-0.0314	4.3836	4.3845	0.8551	48.0090	-0.1223	4.3670	4.3820	0.6643
47.2500	-0.0293	4.2300	4.2309	0.9272	47.1606	-0.1186	4.2140	4.2281	1.1146
49.6000	-0.0045	4.6612	4.6612	4.0002	49.5062	-0.0983	4.6436	4.6533	3.8036
46.4000	-0.0029	4.0792	4.0792	2.7095	46.3123	-0.0907	4.0638	4.0720	2.8934
48.4000	-0.0368	4.4384	4.4398	1.4841	48.3085	-0.1283	4.4216	4.4381	1.2922
47.7500	-0.0259	4.3200	4.3207	0.1212	47.6597	-0.1162	4.3037	4.3172	0.0681
45.9500	-0.0377	4.0004	4.0019	3.6530	45.8631	-0.1246	3.9853	4.0009	3.8352
47.1000	-0.0023	4.2032	4.2032	1.2417	47.0109	-0.0914	4.1873	4.1957	1.4285
47.2500	-0.0379	4.2300	4.2314	0.9272	47.1606	-0.1273	4.2140	4.2302	1.1146
48.9500	-0.0256	4.5399	4.5405	2.6373	48.8574	-0.1182	4.5227	4.5367	2.4432
46.9500	-0.0200	4.1765	4.1769	1.5562	46.8612	-0.1088	4.1607	4.1725	1.7424
48.6500	-0.0357	4.4844	4.4856	2.0083	48.5580	-0.1277	4.4674	4.4837	1.8154
47.0000	-0.0163	4.1854	4.1856	1.4514	46.9111	-0.1052	4.1695	4.1806	1.6378
51.6500	-0.0346	5.0545	5.0557	8.2986	51.5523	-0.1323	5.0354	5.0529	8.0938
50.0000	-0.0228	4.7367	4.7372	4.8389	49.9054	-0.1173	4.7188	4.7326	4.6407
46.6500	-0.0292	4.1232	4.1241	2.1853	46.5618	-0.1174	4.1077	4.1215	2.3702
50.8000	-0.0375	4.8895	4.8909	6.5164	50.7039	-0.1336	4.8710	4.8889	6.3149
48.7000	-0.0200	4.4936	4.4940	2.1131	48.6079	-0.1121	4.4766	4.4892	1.9200
46.9000	-0.0074	4.1676	4.1676	1.6611	46.8113	-0.0961	4.1518	4.1610	1.8470
50.1500	-0.0139	4.7652	4.7654	5.1535	50.0552	-0.1087	4.7472	4.7590	4.9546
51.7000	-0.0371	5.0643	5.0657	8.4035	51.6022	-0.1348	5.0451	5.0633	8.1985
46.4500	-0.0392	4.0880	4.0895	2.6046	46.3622	-0.1270	4.0725	4.0887	2.7888
51.7500	-0.0379	5.0741	5.0755	8.5083	51.6521	-0.1358	5.0549	5.0733	8.3031
45.6000	-0.0276	3.9397	3.9405	4.3869	45.5138	-0.1138	3.9248	3.9378	4.5677
50.7000	-0.0303	4.8703	4.8712	6.3067	50.6041	-0.1262	4.8519	4.8678	6.1057
48.2767	-0.0262	4.4218	4.4227	3.1672	48.1854	-0.1175	4.4051	4.4191	3.1532

ตารางที่ ข.4 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
 เหลือ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ
 $\bar{y}_{1s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง
 เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 10$

$\hat{C}_{\bar{Y}}$	$\hat{C}_M$	แบบเดิม					แบบขิลัส				
		$\bar{y}_1$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{1s}$	Bias	Variance	MSE	RE
0.2190	0.0851	49.0500	-0.0313	5.7679	5.7689	2.8470	48.9327	-0.1486	5.7404	5.7625	2.6010
0.2046	0.0865	46.9000	-0.0328	4.6022	4.6033	1.6611	46.8021	-0.1307	4.5830	4.6001	1.8664
0.2041	0.0844	46.3500	-0.0391	4.4751	4.4767	2.8143	46.2536	-0.1354	4.4566	4.4749	3.0163
0.2271	0.0891	47.0500	-0.0563	5.7096	5.7128	1.3466	46.9290	-0.1774	5.6802	5.7117	1.6003
0.2046	0.0810	48.5500	-0.0150	4.9346	4.9348	1.7986	48.4486	-0.1165	4.9140	4.9276	1.5859
0.2143	0.0810	48.1000	-0.0360	5.3133	5.3146	0.8551	47.9898	-0.1462	5.2890	5.3104	0.6240
0.2287	0.0870	47.2500	-0.0385	5.8396	5.8411	0.9272	47.1267	-0.1618	5.8092	5.8353	1.1857
0.2373	0.0828	49.6000	-0.0059	6.9272	6.9273	4.0002	49.4607	-0.1451	6.8884	6.9094	3.7082
0.1983	0.0936	46.4000	-0.0036	4.2328	4.2328	2.7095	46.3090	-0.0946	4.2162	4.2251	2.9004
0.2004	0.0936	48.4000	-0.0456	4.7050	4.7071	1.4841	48.3030	-0.1426	4.6862	4.7065	1.2807
0.2270	0.0828	47.7500	-0.0323	5.8757	5.8767	0.1212	47.6273	-0.1550	5.8455	5.8695	0.1362
0.2011	0.0812	45.9500	-0.0408	4.2707	4.2724	3.6530	45.8572	-0.1335	4.2535	4.2713	3.8475
0.2302	0.0828	47.1000	-0.0029	5.8800	5.8800	1.2417	46.9755	-0.1274	5.8490	5.8652	1.5028
0.1962	0.0847	47.2500	-0.0417	4.2951	4.2969	0.9272	47.1593	-0.1324	4.2787	4.2962	1.1174
0.2091	0.0828	48.9500	-0.0293	5.2401	5.2410	2.6373	48.8432	-0.1361	5.2173	5.2358	2.4134
0.2123	0.0812	46.9500	-0.0228	4.9679	4.9684	1.5562	46.8444	-0.1284	4.9456	4.9621	1.7776
0.1952	0.0828	48.6500	-0.0381	4.5113	4.5127	2.0083	48.5574	-0.1307	4.4941	4.5112	1.8142
0.2152	0.0891	47.0000	-0.0206	5.1139	5.1143	1.4514	46.8914	-0.1292	5.0903	5.1070	1.6790
0.2072	0.0842	51.6500	-0.0399	5.7279	5.7295	8.2986	51.5393	-0.1506	5.7034	5.7261	8.0666
0.2165	0.0910	50.0000	-0.0297	5.8611	5.8620	4.8389	49.8831	-0.1466	5.8337	5.8552	4.5937
0.2174	0.0844	46.6500	-0.0355	5.1446	5.1458	2.1853	46.5400	-0.1455	5.1203	5.1415	2.4160
0.2009	0.0842	50.8000	-0.0420	5.2089	5.2107	6.5164	50.6977	-0.1443	5.1879	5.2088	6.3018
0.2147	0.0828	48.7000	-0.0235	5.4644	5.4650	2.1131	48.5881	-0.1354	5.4394	5.4577	1.8784
0.2096	0.0810	46.9000	-0.0083	4.8300	4.8301	1.6611	46.7972	-0.1110	4.8089	4.8212	1.8765
0.2148	0.0842	50.1500	-0.0166	5.8001	5.8004	5.1535	50.0346	-0.1320	5.7735	5.7909	4.9115
0.2063	0.0842	51.7000	-0.0426	5.6867	5.6885	8.4035	51.5902	-0.1523	5.6625	5.6858	8.1733
0.2003	0.0844	46.4500	-0.0438	4.3290	4.3309	2.6046	46.3570	-0.1368	4.3117	4.3304	2.7996
0.1977	0.0828	51.7500	-0.0410	5.2313	5.2329	8.5083	51.6491	-0.1419	5.2109	5.2310	8.2968
0.2187	0.0812	45.6000	-0.0324	4.9744	4.9755	4.3869	45.4912	-0.1412	4.9507	4.9707	4.6151
0.2080	0.0910	50.7000	-0.0380	5.5617	5.5631	6.3067	50.5905	-0.1474	5.5377	5.5594	6.0772
0.2112	0.0849	48.2767	-0.0309	5.2161	5.2172	3.1672	48.1690	-0.1386	5.1926	5.2120	3.1555

ตารางที่ ข.5 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
 เหลือ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ
 $\bar{y}_{1s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม
 จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 15$

$\bar{y}_1$	แบบเดิม				$\bar{y}_{1s}$	แบบจำลอง			
	Bias	Variance	MSE	RE		Bias	Variance	MSE	RE
47.8333	-0.0103	1.4450	1.4451	0.2959	47.8031	-0.0405	1.4432	1.4448	0.2326
47.5667	0.0101	1.4290	1.4291	0.2632	47.5366	-0.0199	1.4272	1.4276	0.3262
47.6667	-0.0100	1.4350	1.4351	0.0535	47.6366	-0.0401	1.4332	1.4348	0.1166
47.3000	0.0018	1.4130	1.4130	0.8224	47.2701	-0.0281	1.4112	1.4120	0.8850
48.6333	-0.0095	1.4938	1.4939	1.9733	48.6026	-0.0402	1.4919	1.4935	1.9090
48.1000	0.0018	1.4612	1.4612	0.8551	48.0696	-0.0285	1.4593	1.4602	0.7914
47.5333	0.0235	1.4270	1.4275	0.3331	47.5033	-0.0065	1.4252	1.4252	0.3960
47.6333	-0.0049	1.4330	1.4330	0.1234	47.6033	-0.0350	1.4312	1.4324	0.1865
47.7667	0.0018	1.4410	1.4410	0.1561	47.7365	-0.0283	1.4392	1.4400	0.0929
48.5667	0.0019	1.4897	1.4897	1.8336	48.5360	-0.0288	1.4878	1.4886	1.7693
47.9667	0.0018	1.4531	1.4531	0.5755	47.9364	-0.0284	1.4513	1.4521	0.5120
48.7000	-0.0128	1.4979	1.4980	2.1131	48.6693	-0.0436	1.4960	1.4979	2.0487
48.8000	-0.0069	1.5040	1.5041	2.3228	48.7692	-0.0377	1.5021	1.5035	2.2582
47.5333	0.0235	1.4270	1.4275	0.3331	47.5033	-0.0065	1.4252	1.4252	0.3960
48.3333	-0.0143	1.4754	1.4756	1.3443	48.3028	-0.0448	1.4735	1.4755	1.2803
48.0667	-0.0091	1.4592	1.4592	0.7852	48.0363	-0.0394	1.4573	1.4589	0.7216
47.8333	-0.0025	1.4450	1.4450	0.2959	47.8031	-0.0327	1.4432	1.4443	0.2326
48.8333	-0.0064	1.5061	1.5061	2.3927	48.8025	-0.0373	1.5042	1.5056	2.3281
48.5000	-0.0140	1.4856	1.4858	1.6938	48.4694	-0.0446	1.4837	1.4857	1.6296
47.6667	-0.0098	1.4350	1.4351	0.0535	47.6366	-0.0398	1.4332	1.4348	0.1166
48.0667	-0.0102	1.4592	1.4593	0.7852	48.0363	-0.0406	1.4573	1.4590	0.7216
47.8667	-0.0108	1.4470	1.4472	0.3658	47.8365	-0.0410	1.4452	1.4469	0.3025
48.1667	-0.0096	1.4652	1.4653	0.9949	48.1363	-0.0400	1.4634	1.4650	0.9311
48.3333	-0.0076	1.4754	1.4755	1.3443	48.3028	-0.0381	1.4735	1.4750	1.2803
46.9667	-0.0099	1.3931	1.3932	1.5213	46.9370	-0.0395	1.3914	1.3929	1.5834
48.1667	-0.0096	1.4652	1.4653	0.9949	48.1363	-0.0400	1.4634	1.4650	0.9311
47.8333	-0.0106	1.4450	1.4451	0.2959	47.8031	-0.0408	1.4432	1.4449	0.2326
47.5667	0.0101	1.4290	1.4291	0.2632	47.5366	-0.0199	1.4272	1.4276	0.3262
48.1000	0.0108	1.4612	1.4613	0.8551	48.0696	-0.0195	1.4593	1.4597	0.7914
47.4333	-0.0025	1.4210	1.4210	0.5428	47.4034	-0.0324	1.4192	1.4202	0.6056
47.9778	-0.0031	1.4539	1.4540	0.8861	47.9475	-0.0334	1.4521	1.4533	0.8645

ตารางที่ ข.6 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
เฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ
 $\bar{y}_{1s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง
เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 15$

$\hat{C}_{\bar{Y}}$	$\hat{C}_M$	แบบเดิม					แบบขีลัส				
		$\bar{y}_1$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{1s}$	Bias	Variance	MSE	RE
0.2106	0.0744	47.8333	-0.0107	1.6921	1.6922	0.2959	47.7980	-0.0461	1.6896	1.6917	0.2218
0.2128	0.0677	47.5667	0.0096	1.7083	1.7083	0.2632	47.5308	-0.0262	1.7057	1.7064	0.3385
0.2051	0.0744	47.6667	-0.0101	1.5927	1.5928	0.0535	47.6333	-0.0435	1.5904	1.5923	0.1235
0.2119	0.0757	47.3000	0.0019	1.6743	1.6743	0.8224	47.2646	-0.0335	1.6718	1.6729	0.8965
0.2083	0.0701	48.6333	-0.0092	1.7104	1.7105	1.9733	48.5982	-0.0443	1.7079	1.7099	1.8997
0.2062	0.0757	48.1000	0.0019	1.6400	1.6400	0.8551	48.0659	-0.0322	1.6377	1.6387	0.7836
0.2081	0.0757	47.5333	0.0245	1.6312	1.6318	0.3331	47.4990	-0.0098	1.6289	1.6290	0.4050
0.2078	0.0687	47.6333	-0.0046	1.6330	1.6330	0.1234	47.5991	-0.0389	1.6307	1.6322	0.1953
0.2087	0.0757	47.7667	0.0019	1.6571	1.6571	0.1561	47.7320	-0.0328	1.6547	1.6557	0.0835
0.2023	0.0757	48.5667	0.0019	1.6094	1.6094	1.8336	48.5336	-0.0312	1.6073	1.6082	1.7641
0.2050	0.0757	47.9667	0.0019	1.6116	1.6116	0.5755	47.9331	-0.0317	1.6093	1.6103	0.5051
0.2048	0.0776	48.7000	-0.0135	1.6576	1.6578	2.1131	48.6660	-0.0475	1.6553	1.6576	2.0418
0.2085	0.0701	48.8000	-0.0067	1.7255	1.7255	2.3228	48.7647	-0.0420	1.7230	1.7247	2.2487
0.2081	0.0757	47.5333	0.0245	1.6312	1.6318	0.3331	47.4990	-0.0098	1.6289	1.6290	0.4050
0.2066	0.0744	48.3333	-0.0145	1.6611	1.6613	1.3443	48.2990	-0.0488	1.6588	1.6611	1.2723
0.2051	0.0695	48.0667	-0.0086	1.6196	1.6196	0.7852	48.0330	-0.0422	1.6173	1.6191	0.7146
0.2106	0.0729	47.8333	-0.0025	1.6921	1.6921	0.2959	47.7980	-0.0379	1.6896	1.6910	0.2218
0.2077	0.0701	48.8333	-0.0062	1.7153	1.7153	2.3927	48.7982	-0.0413	1.7128	1.7145	2.3191
0.2087	0.0776	48.5000	-0.0150	1.7083	1.7086	1.6938	48.4648	-0.0502	1.7059	1.7084	1.6200
0.2101	0.0744	47.6667	-0.0101	1.6712	1.6713	0.0535	47.6316	-0.0451	1.6688	1.6708	0.1270
0.2119	0.0768	48.0667	-0.0110	1.7285	1.7286	0.7852	48.0307	-0.0470	1.7259	1.7281	0.7098
0.2156	0.0768	47.8667	-0.0118	1.7747	1.7748	0.3658	47.8296	-0.0488	1.7719	1.7743	0.2881
0.2123	0.0695	48.1667	-0.0093	1.7421	1.7422	0.9949	48.1305	-0.0455	1.7395	1.7415	0.9191
0.2126	0.0695	48.3333	-0.0075	1.7599	1.7600	1.3443	48.2969	-0.0438	1.7573	1.7592	1.2680
0.2143	0.0687	46.9667	-0.0096	1.6878	1.6879	1.5213	46.9308	-0.0455	1.6852	1.6873	1.5966
0.2123	0.0695	48.1667	-0.0093	1.7421	1.7422	0.9949	48.1305	-0.0455	1.7395	1.7415	0.9191
0.2057	0.0744	47.8333	-0.0107	1.6135	1.6136	0.2959	47.7996	-0.0444	1.6112	1.6132	0.2252
0.2128	0.0677	47.5667	0.0096	1.7083	1.7083	0.2632	47.5308	-0.0262	1.7057	1.7064	0.3385
0.2059	0.0744	48.1000	0.0110	1.6352	1.6354	0.8551	48.0660	-0.0230	1.6329	1.6335	0.7838
0.2118	0.0687	47.4333	-0.0024	1.6821	1.6821	0.5428	47.3979	-0.0378	1.6796	1.6810	0.6171
0.2091	0.0729	47.9778	-0.0032	1.6772	1.6773	0.8861	47.9428	-0.0381	1.6748	1.6763	0.8617

ตารางที่ ข.7 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
เฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ
 $\bar{y}_{2_s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม
จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 5$

แบบเดิม					แบบจำลอง				
$\bar{y}_2$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{2_s}$	Bias	Variance	MSE	RE
50.2337	-0.0042	16.5945	16.5945	5.3290	49.8483	-0.3896	16.3408	16.4927	4.5208
49.7151	-0.0136	15.3471	15.3473	4.2415	49.3336	-0.3950	15.1125	15.2685	3.4417
51.4389	-0.0165	16.1153	16.1156	7.8560	51.0442	-0.4110	15.8690	16.0379	7.0285
49.1404	-0.0166	14.5025	14.5027	3.0367	48.7634	-0.3935	14.2808	14.4356	2.2461
49.9722	-0.0138	15.3590	15.3591	4.7807	49.5888	-0.3971	15.1242	15.2819	3.9768
50.7247	-0.0214	15.1004	15.1009	6.3585	50.3355	-0.4104	14.8696	15.0380	5.5425
51.3202	-0.0233	15.3009	15.3014	7.6072	50.9265	-0.4169	15.0670	15.2408	6.7816
48.8111	-0.0047	15.4593	15.4593	2.3461	48.4366	-0.3792	15.2230	15.3668	1.5609
52.2011	-0.0211	15.9562	15.9566	9.4543	51.8006	-0.4215	15.7123	15.8899	8.6145
48.1000	-0.0118	14.3044	14.3045	0.8551	47.7310	-0.3807	14.0857	14.2307	0.0813
48.9674	-0.0071	15.4682	15.4683	2.6738	48.5917	-0.3828	15.2318	15.3783	1.8860
50.1044	-0.0110	15.7898	15.7899	5.0578	49.7200	-0.3954	15.5485	15.7048	4.2518
49.6420	-0.0059	16.0911	16.0912	4.0884	49.2612	-0.3867	15.8452	15.9947	3.2898
50.3333	-0.0044	16.7010	16.7010	5.5379	49.9472	-0.3906	16.4457	16.5982	4.7281
53.5000	-0.0070	18.6532	18.6533	12.1777	53.0895	-0.4175	18.3681	18.5424	11.3170
51.3500	-0.0175	15.9569	15.9572	7.6696	50.9560	-0.4113	15.7130	15.8822	6.8435
48.5054	-0.0089	15.0082	15.0083	1.7050	48.1332	-0.3810	14.7788	14.9239	0.9247
48.8977	-0.0124	14.9339	14.9340	2.5277	48.5226	-0.3875	14.7056	14.8557	1.7411
52.2011	-0.0211	15.9562	15.9566	9.4543	51.8006	-0.4215	15.7123	15.8899	8.6145
52.6828	-0.0152	17.2212	17.2214	10.4642	52.2786	-0.4193	16.9579	17.1337	9.6166
49.2011	-0.0136	15.0080	15.0082	3.1638	48.8236	-0.3910	14.7786	14.9315	2.3723
50.1044	-0.0110	15.7898	15.7899	5.0578	49.7200	-0.3954	15.5485	15.7048	4.2518
47.1413	-0.0005	14.8982	14.8982	1.1551	46.7796	-0.3622	14.6705	14.8017	1.9135
51.0598	-0.0124	16.3446	16.3448	7.0611	50.6680	-0.4041	16.0948	16.2581	6.2397
49.7120	-0.0133	15.3281	15.3283	4.2350	49.3305	-0.3946	15.0938	15.2495	3.4352
47.3656	-0.0038	14.7566	14.7566	0.6848	47.0022	-0.3672	14.5310	14.6658	1.4468
46.8412	-0.0148	13.4545	13.4547	1.7844	46.4818	-0.3740	13.2488	13.3887	2.5380
51.4659	-0.0127	16.6533	16.6535	7.9126	51.0710	-0.4075	16.3988	16.5648	7.0847
51.8820	-0.0168	16.3014	16.3017	8.7851	51.4840	-0.4147	16.0522	16.2242	7.9505
48.9674	-0.0071	15.4682	15.4683	2.6738	48.5917	-0.3828	15.2318	15.3783	1.8860
50.0527	-0.0121	15.6607	15.6609	5.1912	49.6687	-0.3961	15.4213	15.5785	4.5375

ตารางที่ ข.8 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
เฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ
 $\bar{y}_{2_s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จาก
ตัวอย่าง เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 5$

$\hat{C}_Y$	$\hat{C}_M$	แบบเดิม					แบบจำลอง				
		$\bar{y}_2$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{2_s}$	Bias	Variance	MSE	RE
0.2779	0.0824	50.2337	-0.0134	25.1020	25.1022	5.3290	49.6586	-0.5883	24.5306	24.8767	4.1232
0.2812	0.0815	49.7151	-0.0267	24.0302	24.0309	4.2415	49.1323	-0.6091	23.4701	23.8412	3.0196
0.2627	0.1039	51.4389	-0.0143	21.3849	21.3851	7.8560	50.9118	-0.5412	20.9489	21.2418	6.7509
0.3179	0.1005	49.1404	-0.0361	29.0436	29.0449	3.0367	48.4066	-0.7694	28.1826	28.7746	1.4980
0.2924	0.1039	49.9722	-0.0208	25.6008	25.6012	4.7807	49.3393	-0.6535	24.9564	25.3834	3.4536
0.2858	0.1005	50.7247	-0.0328	23.9976	23.9987	6.3585	50.1110	-0.6462	23.4204	23.8379	5.0716
0.2742	0.1005	51.3202	-0.0313	22.2100	22.2110	7.6072	50.7481	-0.6030	21.7176	22.0812	6.4075
0.3111	0.1039	48.8111	-0.0106	29.3437	29.3438	2.3461	48.1128	-0.7088	28.5100	29.0124	0.8819
0.2875	0.1120	52.2011	-0.0266	25.4330	25.4337	9.4543	51.5619	-0.6655	24.8140	25.2569	8.1140
0.3205	0.1039	48.1000	-0.0266	28.9901	28.9908	0.8551	47.3701	-0.7561	28.1169	28.6886	0.6755
0.2944	0.0824	48.9674	-0.0209	26.4897	26.4901	2.6738	48.3388	-0.6492	25.8139	26.2354	1.3557
0.2969	0.0815	50.1044	-0.0275	27.7028	27.7036	5.0578	49.4505	-0.6810	26.9844	27.4482	3.6867
0.2687	0.0862	49.6420	-0.0114	22.6665	22.6667	4.0884	49.1101	-0.5432	22.1834	22.4785	2.9730
0.2732	0.0815	50.3333	-0.0129	24.3791	24.3793	5.5379	49.7762	-0.5699	23.8424	24.1672	4.3697
0.2959	0.0815	53.5000	-0.0225	32.1999	32.2004	12.1777	52.8063	-0.7159	31.3703	31.8829	10.7232
0.2640	0.1039	51.3500	-0.0163	21.3763	21.3766	7.6696	50.8186	-0.5475	20.9362	21.2359	6.5554
0.3030	0.0815	48.5054	-0.0256	27.3817	27.3823	1.7050	47.8465	-0.6842	26.6428	27.1109	0.3234
0.2742	0.0862	48.8977	-0.0215	22.0230	22.0235	2.5277	48.3525	-0.5664	21.5347	21.8555	1.3846
0.2875	0.1120	52.2011	-0.0266	25.4330	25.4337	9.4543	51.5619	-0.6655	24.8140	25.2569	8.1140
0.2497	0.0815	52.6828	-0.0201	20.9447	20.9451	10.4642	52.1948	-0.5079	20.5585	20.8164	9.4410
0.2840	0.0824	49.2011	-0.0271	23.9886	23.9894	3.1638	48.6128	-0.6150	23.4184	23.7967	1.9303
0.2969	0.0815	50.1044	-0.0275	27.7028	27.7036	5.0578	49.4505	-0.6810	26.9844	27.4482	3.6867
0.3251	0.0824	47.1413	-0.0176	31.0946	31.0949	1.1551	46.4054	-0.7532	30.1314	30.6986	2.6981
0.2539	0.0824	51.0598	-0.0176	20.5747	20.5750	7.0611	50.5708	-0.5064	20.1825	20.4390	6.0358
0.2840	0.0824	49.7120	-0.0267	24.5037	24.5044	4.2350	49.1177	-0.6206	23.9214	24.3065	2.9890
0.3096	0.0815	47.3656	-0.0195	27.9673	27.9676	0.6848	46.6942	-0.6906	27.1801	27.6570	2.0925
0.2492	0.1100	46.8412	-0.0038	15.9528	15.9528	1.7844	46.4090	-0.4360	15.6597	15.8498	2.6906
0.2540	0.0862	51.4659	-0.0162	20.8816	20.8819	7.9126	50.9728	-0.5092	20.4834	20.7427	6.8787
0.2785	0.1005	51.8820	-0.0226	24.5582	24.5587	8.7851	51.2855	-0.6189	23.9967	24.3797	7.5343
0.2944	0.0824	48.9674	-0.0209	26.4897	26.4901	2.6738	48.3388	-0.6492	25.8139	26.2354	1.3557
0.2849	0.0914	50.0527	-0.0215	24.9816	24.9821	5.1912	49.4489	-0.6251	24.3707	24.7679	4.2271

ตารางที่ ข.9 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
 เหล็ก ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ
 $\bar{y}_{2s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม
 จากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 10$

แบบเดิม					แบบซิลส์				
$\bar{y}_2$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{2s}$	Bias	Variance	MSE	RE
49.0797	-0.0021	5.2824	5.2824	2.9092	48.9535	-0.1283	5.2553	5.2717	2.6447
46.9310	-0.0026	4.7706	4.7706	1.5960	46.8104	-0.1233	4.7461	4.7613	1.8490
46.3870	-0.0024	4.6742	4.6742	2.7367	46.2678	-0.1217	4.6502	4.6650	2.9867
47.1034	-0.0024	4.8252	4.8252	1.2347	46.9823	-0.1235	4.8005	4.8157	1.4886
48.5642	-0.0026	5.1223	5.1223	1.8285	48.4394	-0.1274	5.0960	5.1123	1.5667
48.1341	-0.0031	4.9836	4.9837	0.9265	48.0103	-0.1268	4.9581	4.9741	0.6671
47.2865	-0.0013	4.9716	4.9716	0.8506	47.1650	-0.1229	4.9461	4.9612	1.1055
49.6056	-0.0002	5.5911	5.5911	4.0119	49.4780	-0.1277	5.5624	5.5787	3.7445
46.4034	-0.0027	4.6565	4.6565	2.7023	46.2841	-0.1220	4.6326	4.6475	2.9524
48.4432	-0.0042	4.9388	4.9388	1.5746	48.3187	-0.1287	4.9134	4.9300	1.3135
47.7806	-0.0021	5.0045	5.0045	0.1853	47.6577	-0.1249	4.9788	4.9944	0.0723
45.9886	-0.0024	4.5940	4.5940	3.5720	45.8704	-0.1206	4.5704	4.5849	3.8199
47.1028	-0.0008	4.9784	4.9784	1.2359	46.9817	-0.1219	4.9529	4.9677	1.4898
47.2895	-0.0036	4.7538	4.7538	0.8444	47.1679	-0.1251	4.7294	4.7450	1.0993
48.9778	-0.0028	5.1909	5.1909	2.6956	48.8519	-0.1287	5.1643	5.1808	2.4316
46.9716	-0.0009	4.9416	4.9416	1.5110	46.8508	-0.1216	4.9162	4.9310	1.7641
48.6861	-0.0037	5.0352	5.0352	2.0840	48.5610	-0.1289	5.0093	5.0259	1.8216
47.0196	-0.0018	4.8684	4.8684	1.4104	46.8987	-0.1227	4.8434	4.8585	1.6638
51.6878	-0.0030	5.7709	5.7709	8.3780	51.5550	-0.1359	5.7412	5.7597	8.0994
50.0281	-0.0029	5.4118	5.4118	4.8978	49.8995	-0.1315	5.3840	5.4013	4.6282
46.6836	-0.0017	4.8025	4.8025	2.1148	46.5636	-0.1217	4.7778	4.7926	2.3664
50.8398	-0.0035	5.5272	5.5272	6.5998	50.7091	-0.1342	5.4989	5.5169	6.3257
48.7222	-0.0026	5.1590	5.1590	2.1597	48.5970	-0.1278	5.1325	5.1489	1.8971
46.9078	-0.0018	4.8465	4.8465	1.6447	46.7872	-0.1223	4.8217	4.8366	1.8975
50.1657	-0.0016	5.5703	5.5704	5.1865	50.0368	-0.1306	5.5417	5.5588	4.9161
51.7403	-0.0032	5.7656	5.7656	8.4880	51.6073	-0.1362	5.7360	5.7545	8.2092
46.4915	-0.0026	4.6845	4.6845	2.5176	46.3720	-0.1221	4.6605	4.6754	2.7681
51.7889	-0.0036	5.7405	5.7405	8.5898	51.6558	-0.1367	5.7110	5.7297	8.3107
45.6307	-0.0011	4.6457	4.6457	4.3225	45.5134	-0.1184	4.6219	4.6359	4.5685
50.7360	-0.0036	5.4993	5.4993	6.3821	50.6055	-0.1340	5.4711	5.4890	6.1086
48.3059	-0.0024	5.0869	5.0869	3.1730	48.1817	-0.1266	5.0608	5.0768	3.1526

ตารางที่ ข.10 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2_s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 10$

$\hat{C}_Y$	$\hat{C}_M$	แบบเดิม					แบบขีลัส				
		$\bar{y}_2$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{2_s}$	Bias	Variance	MSE	RE
0.2516	0.0851	49.0797	-0.0027	6.4878	6.4879	2.9092	48.9248	-0.1576	6.4470	6.4718	2.5846
0.2327	0.0865	46.9310	-0.0016	4.9939	4.9939	1.5960	46.8043	-0.1283	4.9670	4.9834	1.8617
0.2310	0.0844	46.3870	-0.0017	4.8261	4.8261	2.7367	46.2636	-0.1251	4.8004	4.8161	2.9955
0.2537	0.0891	47.1034	-0.0027	6.0151	6.0151	1.2347	46.9523	-0.1537	5.9766	6.0002	1.5514
0.2371	0.0810	48.5642	-0.0028	5.5865	5.5865	1.8285	48.4281	-0.1389	5.5552	5.5745	1.5431
0.2470	0.0810	48.1341	-0.0042	5.9133	5.9133	0.9265	47.9877	-0.1505	5.8774	5.9000	0.6196
0.2538	0.0870	47.2865	-0.0016	6.2106	6.2106	0.8506	47.1347	-0.1534	6.1708	6.1943	1.1689
0.2667	0.0828	49.6056	-0.0019	7.7212	7.7212	4.0119	49.4298	-0.1777	7.6665	7.6981	3.6434
0.2275	0.0936	46.4034	0.0002	4.6509	4.6509	2.7023	46.2837	-0.1196	4.6269	4.6412	2.9534
0.2316	0.0936	48.4432	-0.0019	5.0847	5.0847	1.5746	48.3137	-0.1314	5.0576	5.0748	1.3030
0.2591	0.0828	47.7806	-0.0037	6.5373	6.5373	0.1853	47.6207	-0.1635	6.4936	6.5204	0.1499
0.2280	0.0812	45.9886	-0.0019	4.6241	4.6241	3.5720	45.8694	-0.1211	4.6002	4.6149	3.8219
0.2603	0.0828	47.1028	-0.0022	6.5552	6.5552	1.2359	46.9437	-0.1613	6.5110	6.5370	1.5694
0.2274	0.0847	47.2895	-0.0025	4.7438	4.7438	0.8444	47.1675	-0.1245	4.7193	4.7348	1.1001
0.2411	0.0828	48.9778	-0.0031	5.8498	5.8498	2.6956	48.8359	-0.1450	5.8159	5.8370	2.3981
0.2356	0.0812	46.9716	-0.0009	5.3199	5.3199	1.5110	46.8416	-0.1308	5.2905	5.3076	1.7835
0.2313	0.0828	48.6861	-0.0033	5.2122	5.2122	2.0840	48.5562	-0.1333	5.1844	5.2021	1.8116
0.2396	0.0891	47.0196	-0.0007	5.4129	5.4129	1.4104	46.8849	-0.1353	5.3820	5.4003	1.6927
0.2404	0.0842	51.6878	-0.0031	6.4625	6.4625	8.3780	51.5389	-0.1520	6.4253	6.4484	8.0657
0.2548	0.0910	50.0281	-0.0030	6.7990	6.7990	4.8978	49.8662	-0.1648	6.7551	6.7823	4.5585
0.2420	0.0844	46.6836	-0.0017	5.4516	5.4516	2.1148	46.5473	-0.1380	5.4198	5.4388	2.4005
0.2345	0.0842	50.8398	-0.0031	5.8805	5.8805	6.5998	50.7004	-0.1425	5.8482	5.8686	6.3074
0.2459	0.0828	48.7222	-0.0032	6.0552	6.0552	2.1597	48.5754	-0.1501	6.0187	6.0413	1.8518
0.2418	0.0810	46.9078	-0.0023	5.5011	5.5011	1.6447	46.7711	-0.1390	5.4691	5.4884	1.9314
0.2460	0.0842	50.1657	-0.0019	6.5405	6.5405	5.1865	50.0144	-0.1533	6.5010	6.5245	4.8691
0.2397	0.0842	51.7403	-0.0032	6.4165	6.4165	8.4880	51.5921	-0.1514	6.3797	6.4027	8.1773
0.2282	0.0844	46.4915	-0.0016	4.7193	4.7193	2.5176	46.3707	-0.1223	4.6948	4.7098	2.7708
0.2320	0.0828	51.7889	-0.0031	5.9789	5.9789	8.5898	51.6499	-0.1421	5.9468	5.9670	8.2984
0.2439	0.0812	45.6307	-0.0016	5.3636	5.3636	4.3225	45.4954	-0.1369	5.3319	5.3506	4.6063
0.2471	0.0910	50.7360	-0.0031	6.4856	6.4856	6.3821	50.5815	-0.1575	6.4462	6.4710	6.0583
0.2417	0.0849	48.3059	-0.0023	5.7800	5.7800	3.1730	48.1649	-0.1434	5.7460	5.7667	3.1482

ตารางที่ ข.11 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2s}$ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่มจากประชากร เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 15$

แบบเดิม					แบบจำลอง				
$\bar{y}_2$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{2s}$	Bias	Variance	MSE	RE
47.8439	-0.0003	1.7185	1.7185	0.3180	47.8028	-0.0413	1.7155	1.7172	0.2319
47.5572	0.0004	1.7603	1.7603	0.2831	47.5164	-0.0404	1.7572	1.7589	0.3687
47.6766	-0.0004	1.6944	1.6944	0.0328	47.6357	-0.0413	1.6915	1.6932	0.1186
47.2981	-0.0002	1.6901	1.6901	0.8262	47.2576	-0.0408	1.6872	1.6889	0.9114
48.6423	-0.0001	1.7927	1.7927	1.9922	48.6006	-0.0418	1.7896	1.7914	1.9047
48.0981	-0.0002	1.7434	1.7434	0.8512	48.0569	-0.0415	1.7404	1.7421	0.7646
47.5093	0.0002	1.7357	1.7357	0.3836	47.4685	-0.0406	1.7327	1.7344	0.4691
47.6379	0.0001	1.7348	1.7348	0.1139	47.5970	-0.0408	1.7319	1.7335	0.1997
47.7648	-0.0002	1.7214	1.7214	0.1523	47.7238	-0.0412	1.7185	1.7202	0.0663
48.5648	-0.0002	1.7735	1.7735	1.8297	48.5231	-0.0419	1.7705	1.7722	1.7423
47.9648	-0.0002	1.7305	1.7305	0.5716	47.9236	-0.0414	1.7275	1.7292	0.4853
48.7132	-0.0005	1.7555	1.7555	2.1409	48.6714	-0.0423	1.7525	1.7543	2.0532
48.8066	0.0000	1.8105	1.8105	2.3366	48.7647	-0.0419	1.8074	1.8092	2.2487
47.5093	0.0002	1.7357	1.7357	0.3836	47.4685	-0.0406	1.7327	1.7344	0.4691
48.3476	-0.0004	1.7449	1.7449	1.3742	48.3061	-0.0419	1.7419	1.7436	1.2872
48.0751	-0.0001	1.7527	1.7527	0.8028	48.0338	-0.0413	1.7497	1.7514	0.7163
47.8358	-0.0001	1.7393	1.7393	0.3011	47.7948	-0.0411	1.7363	1.7380	0.2150
48.8394	0.0000	1.8127	1.8127	2.4055	48.7975	-0.0419	1.8095	1.8113	2.3176
48.5147	-0.0005	1.7453	1.7453	1.7246	48.4731	-0.0421	1.7423	1.7440	1.6373
47.6766	-0.0003	1.7051	1.7051	0.0328	47.6357	-0.0412	1.7022	1.7039	0.1186
48.0775	-0.0003	1.7278	1.7278	0.8079	48.0362	-0.0416	1.7249	1.7266	0.7213
47.8782	-0.0003	1.7177	1.7177	0.3901	47.8371	-0.0414	1.7147	1.7164	0.3039
48.1758	0.0000	1.7664	1.7664	1.0141	48.1345	-0.0414	1.7633	1.7650	0.9273
48.3407	0.0000	1.7833	1.7833	1.3597	48.2992	-0.0414	1.7803	1.7820	1.2727
46.9761	0.0000	1.6850	1.6850	1.5015	46.9358	-0.0403	1.6821	1.6838	1.5860
48.1758	0.0000	1.7664	1.7664	1.0141	48.1345	-0.0414	1.7633	1.7650	0.9273
47.8439	-0.0004	1.7078	1.7078	0.3180	47.8028	-0.0414	1.7049	1.7066	0.2319
47.5572	0.0004	1.7603	1.7603	0.2831	47.5164	-0.0404	1.7572	1.7589	0.3687
48.0892	0.0000	1.7649	1.7649	0.8325	48.0479	-0.0413	1.7619	1.7636	0.7459
47.4357	0.0001	1.7217	1.7217	0.5379	47.3949	-0.0406	1.7187	1.7204	0.6233
47.9809	-0.0001	1.7433	1.7433	0.8972	47.9397	-0.0413	1.7403	1.7420	0.8678

ตารางที่ ข.12 ค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ค่าเอนเอียง ความแปรปรวน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า จำแนกตามตัวประมาณ $\bar{y}_2$ และ $\bar{y}_{2s}$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ค่ายอดรวมของกลุ่ม และขนาดของกลุ่ม จากตัวอย่าง เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 15$

$\hat{C}_Y$	$\hat{C}_M$	แบบเดิม					แบบจิตส์				
		$\bar{y}_2$	Bias	Variance	MSE	RE	$\bar{y}_{2s}$	Bias	Variance	MSE	RE
0.2376	0.0744	47.8439	-0.0007	1.8853	1.8853	0.3180	47.7989	-0.0456	1.8817	1.8838	0.2237
0.2343	0.0677	47.5572	-0.0003	1.8740	1.8740	0.2831	47.5137	-0.0438	1.8706	1.8725	0.3742
0.2322	0.0744	47.6766	-0.0007	1.7760	1.7760	0.0328	47.6338	-0.0435	1.7728	1.7747	0.1225
0.2378	0.0757	47.2981	-0.0005	1.8552	1.8552	0.8262	47.2536	-0.0450	1.8517	1.8537	0.9196
0.2302	0.0701	48.6423	-0.0006	1.8469	1.8469	1.9922	48.5994	-0.0435	1.8437	1.8456	1.9022
0.2319	0.0757	48.0981	-0.0004	1.8201	1.8201	0.8512	48.0551	-0.0435	1.8168	1.8187	0.7609
0.2321	0.0757	47.5093	-0.0001	1.8127	1.8127	0.3836	47.4667	-0.0427	1.8095	1.8113	0.4729
0.2305	0.0687	47.6379	-0.0005	1.7907	1.7907	0.1139	47.5957	-0.0426	1.7875	1.7894	0.2023
0.2345	0.0757	47.7648	-0.0005	1.8375	1.8375	0.1523	47.7211	-0.0442	1.8341	1.8360	0.0606
0.2280	0.0757	48.5648	-0.0004	1.7891	1.7891	1.8297	48.5228	-0.0424	1.7860	1.7878	1.7415
0.2309	0.0757	47.9648	-0.0004	1.7918	1.7918	0.5716	47.9222	-0.0430	1.7886	1.7904	0.4823
0.2313	0.0776	48.7132	-0.0006	1.8231	1.8231	2.1409	48.6698	-0.0440	1.8199	1.8218	2.0499
0.2300	0.0701	48.8066	-0.0005	1.8613	1.8613	2.3366	48.7636	-0.0435	1.8581	1.8599	2.2464
0.2321	0.0757	47.5093	-0.0001	1.8127	1.8127	0.3836	47.4667	-0.0427	1.8095	1.8113	0.4729
0.2337	0.0744	48.3476	-0.0007	1.8525	1.8525	1.3742	48.3036	-0.0447	1.8491	1.8511	1.2820
0.2276	0.0695	48.0751	-0.0005	1.7640	1.7640	0.8028	48.0336	-0.0420	1.7610	1.7627	0.7159
0.2371	0.0729	47.8358	-0.0005	1.8992	1.8992	0.3011	47.7910	-0.0453	1.8957	1.8977	0.2073
0.2293	0.0701	48.8394	-0.0005	1.8514	1.8514	2.4055	48.7967	-0.0432	1.8482	1.8500	2.3158
0.2351	0.0776	48.5147	-0.0007	1.8735	1.8735	1.7246	48.4700	-0.0453	1.8700	1.8721	1.6310
0.2372	0.0744	47.6766	-0.0007	1.8646	1.8646	0.0328	47.6319	-0.0453	1.8611	1.8631	0.1264
0.2385	0.0768	48.0775	-0.0007	1.9083	1.9083	0.8079	48.0320	-0.0462	1.9047	1.9068	0.7124
0.2420	0.0768	47.8782	-0.0007	1.9545	1.9545	0.3901	47.8315	-0.0474	1.9507	1.9530	0.2922
0.2347	0.0695	48.1758	-0.0006	1.8924	1.8924	1.0141	48.1316	-0.0448	1.8889	1.8909	0.9214
0.2347	0.0695	48.3407	-0.0006	1.9096	1.9096	1.3597	48.2963	-0.0449	1.9061	1.9081	1.2667
0.2373	0.0687	46.9761	-0.0006	1.8457	1.8457	1.5015	46.9320	-0.0447	1.8422	1.8442	1.5939
0.2347	0.0695	48.1758	-0.0006	1.8924	1.8924	1.0141	48.1316	-0.0448	1.8889	1.8909	0.9214
0.2327	0.0744	47.8439	-0.0007	1.7967	1.7967	0.3180	47.8007	-0.0438	1.7934	1.7953	0.2276
0.2343	0.0677	47.5572	-0.0003	1.8740	1.8740	0.2831	47.5137	-0.0438	1.8706	1.8725	0.3742
0.2311	0.0744	48.0892	-0.0003	1.8294	1.8294	0.8325	48.0464	-0.0430	1.8261	1.8280	0.7428
0.2341	0.0687	47.4357	-0.0005	1.8345	1.8345	0.5379	47.3924	-0.0438	1.8311	1.8330	0.6287
0.2336	0.0729	47.9809	-0.0005	1.8473	1.8473	0.8972	47.9373	-0.0441	1.8439	1.8459	0.8664

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ ชื่อสกุล

นายชัชวาลย์ กองน้ำ

ประวัติการศึกษา

สถิติศาสตรบัณฑิต
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีที่สำเร็จการศึกษา พ.ศ. 2556

รางวัลหรือทุนการศึกษา

รางวัลเรียนดีหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติประยุกต์ คณะสถิติประยุกต์
สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
ประจำปีการศึกษา 2559