P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 30 ฉบับที่ 4 (กรกฎาคม-สิงหาคม 2565) หน้า [1-14]

การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยพหุคูณ เมื่อตัวแปรอิสระมีและไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ

A Comparison of Parameter Estimations of Multiple Regression Model with and without Multicollinearity

อัชฌา อระวีพร*, ณัฐพล ใจผ่อง, อาทิมา อินพรม

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

Autcha Araveeporn*, Natthapol Jaiphong, Arthima Inprom

Department of Statistics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

Received 5 September 2020; Received in revised 27 December 2020; Accepted 26 May 2022

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาคอฟ ในกรณีนี้ทำการศึกษาตัวแบบการถดถอยพหุคูณที่มีตัวแปรตามและตัวแปรอิสระสองตัวโดยพิจารณากรณีที่ตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุและไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ เกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณาวิธีที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด คือ ค่าต่ำที่สุดของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ในงานวิจัยนี้ใช้ข้อมูลจากการจำลองด้วยโปรแกรมอาร์ โดยตัวแปรอิสระที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุสุ่มมาจากการแจกแจงปรกติหลายตัวแปรที่ระดับความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ เท่ากับ 0.3, 0.6 และ 0.9 ส่วนตัวแปรอิสระที่ไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุสุ่มมาจากการแจกแจงปรกติ ส่วนตัวแปรตามได้มาจากการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณนำไปคูณกับตัวแปรอิสระและรวมกับค่าความคลาดเคลื่อนจากการแจกแจงปรกติที่สุ่มมาจากตัวแบบการถดถอยพหุคูณ ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 30 และ 50 ผลการวิจัยพบว่าวิธีของเบส์ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น พบว่าวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด เมื่อตัวแปรอิสระมีและไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ

คำสำคัญ: วิธีของเบส์; วิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ; วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก; วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาคอฟ

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** autcha.ar@kmitl.ac.th **doi:**

Abstract

This research aims to compare the parameter estimation methods, including the ordinary least squares method, weight least squares method, Bayes' method, and Markov Chain Monte Carlo method. In this case, the multiple regression model consists of an independent variable and two independent variables, considered with and without multicollinearity. The criterion of the best efficiency is investigated by a minimum of the average mean square errors. In this research, data are generated from the R program when the independent variables with multicollinearity are simulated from the multivariate normal distribution at the level correlation 0.3, 0.6, and 0.9. At the same time, the independent variables without multicollinearity are simulated from the normal distribution. The dependent variable is approximated by the coefficient of the multiple regression model multiplied by the independent variable and plus the error that is randomized from the normal distribution following the multiple regression model. The sample sizes are 5, 30, and 50. The results found that Bayes' method presents the minimum of average mean square errors at the sample sizes 5. However, when the sample size value is increased, the best efficiency method is the weight least squares method when the independent variables are presented with and without multicollinearity.

Keywords: Bayes' method; Ordinary least squares method; Weight least squares method; Markov Chain Monte Carlo method

1. บทนำ

การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) เป็นวิธีการทางสถิติอย่างหนึ่งที่ใช้ในอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปร ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ (Independent Variable) แทนด้วย X และตัวแปรตาม (Dependent Variable) แทนด้วย y นอกจากนี้ยังใช้ในการทำนายตัวแปรตามเมื่อกำหนดค่าตัวแปรอิสระ ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระหนึ่งตัวกับตัวแปรตามหนึ่งตัว เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย (Simple Regression Analysis) แต่ถ้าตัวแปรอิสระมีมากกว่าหนึ่งตัวกับตัวแปรตามหนึ่งตัว เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ (Multiple Regression Analysis)

การวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลจากตัวแปรอิสระและตัวแปรตามที่มีความสัมพันธ์กันเพื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับสร้างสมการถดถอยพหุคูณเพื่อนำไปใช้ในการพยากรณ์ตัวแปรตามเมื่อทราบค่าของตัวแปรอิสระ โดยจะมีข้อตกลงเบื้องต้นคือ ตัวแปรอิสระและตัวแปรตามต้องเป็นตัวแปรเชิงปริมาณและมีความสัมพันธ์ในรูปแบบเชิงเส้นตรง และความคลาดเคลื่อน (Error : $\underset{\sim}{\varepsilon}$) เป็นอิสระจากกัน (Independence) มีภาวะความแปรปรวนเท่ากัน (Homoscedasticity) มีการแจกแจงปรกติ (Normality) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ทั้งนี้เพื่อให้การวิเคราะห์และอนุมานข้อมูลได้อย่างถูกต้อง (Valid) [1] นอกจากนี้ในกรณีที่เป็นการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณตัวแปรอิสระมีมากกว่าหนึ่งตัวแปรไม่ควรมีความสัมพันธ์ ถ้าตัวแปรอิสระเกิดความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุเองซึ่งเรียกว่า

การเกิดปัญหาพหุสัมพันธ์เชิงเส้น (Multicollinearity) ซึ่งอาจจะส่งทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์มีความผันแปรสูงส่งผลให้การพยากรณ์เกิดความผิดพลาดขึ้น

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอยมีด้วยกันหลายวิธี ซึ่งวิธีที่นักวิจัยใช้กันมากที่สุดก็คือ วิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ (Ordinary Least Squares Method) หรืออาจเรียกสั้นๆ วิธีกำลังสองน้อยสุดเป็นวิธีที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Error Sum Square) มีค่าต่ำที่สุด และเป็นวิธีที่ทำให้ได้ค่าตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) แต่หากตัวแบบการถดถอยเกิดปัญหาพหุสัมพันธ์เชิงเส้น การประมาณค่าการถดถอยด้วยวิธีนี้อาจไม่เหมาะสม เนื่องจากวิธีนี้มีแนวโน้มความผันแปรสูง ต่อมาจึงมีการศึกษาต่อโดยการกำหนดค่าตัวถ่วงน้ำหนักในตัวแบบการถดถอย ซึ่งเรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Squares Method) วิธีนี้ใช้แนวความคิดในการประมาณเดียวกับวิธีกำลังสองน้อยสุดคือ การให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุดแต่พิจารณาจากตัวแบบที่มีการถ่วงน้ำหนักแล้ว

วิธีของเบส์ (Bayes' Method) [2] เป็นอีกวิธีที่หนึ่งในการประมาณค่าพารามิเตอร์จากตัวแบบการถดถอยโดยอาศัยแนวความคิดจากทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' Theorem) โดยพิจารณาจากความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขซึ่งประกอบด้วยการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (Prior Probability Distribution) ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) และการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior Probability Distribution) และประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการประมวลผลจากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลังซึ่งเป็นผลคูณของการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนและฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น วิธีของเบส์สามารถแก้ปัญหาในกรณีที่ข้อมูลที่มีอยู่มีความบกพร่องไม่สมบูรณ์ เนื่องจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของเบส์จะต้องมีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนทำให้สามารถที่จะแก้ไขปัญหาดังกล่าวได้

วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo : MCMC) [3] เป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีของเบส์โดยใช้รูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง และเมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนของตัวแปรสุ่ม โดยทำการสุ่มตัวแปรจากพารามิเตอร์ที่สนใจ จากการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน และทำการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs Sampling) [4] จากนั้นทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ จากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถดถอยดังงานของ ธิฏิรัตน์[5] ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณกรณีที่มีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระโดยจะเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนสุ่มในตัวแปรตามและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระมีค่าน้อย วิธีกำลังสองน้อยสุดจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนสุ่มในตัวแปรตาม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระมีค่าปานกลางถึงมาก วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด กรณีที่ขนาดตัวอย่างมากกว่า 15 วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก จะเป็นวิธีที่ดีที่สุด ฑิฆัมพร [6] ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่จากการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอลและแกมมา วิธีประมาณค่าที่ใช้ในการเปรียบเทียบ 3 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีการแปลงของ Box และ Cox และวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิของความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุระหว่างตัวแปรอิสระ ผลสรุปว่า เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบแกมมา เมื่อ

พารามิเตอร์ที่ใช้ค่าสัมประสิทธิของความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุระหว่างตัวแปรอิสระอยู่ในระดับต่ำ เท่ากับ 0.1 วิธีการประมาณค่า วิธีกำลังสองน้อยสุดจะดีที่สุด แต่เมื่อระดับสูงขึ้นเป็น 0.3 กับ 0.5 วิธีการประมาณ วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก จะเป็นวิธีที่ดีที่สุด ภูวษาและคณะ [7] ได้ทำการศึกษาการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์ วิธีกำลังสองน้อยสุด และวิธีบูตสแทร็ปแบบใช้พารามิเตอร์ สำหรับตัวแบบถดถอยเชิงอย่างง่าย เป็นการพิจารณาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง พบว่าวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพดีที่สุดส่วนวิธีกำลังสองน้อยสุดจะมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีบูตสแทร็ปแบบใช้พารามิเตอร์เพียงเล็กน้อย Diana และ Tanty [8] ได้ทำการศึกษาการเปรียบเทียบแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นโดยใช้วิธีของเบส์และวิธีกำลังสองน้อยสุดสำหรับการประเมินประสิทธิภาพทางพลังงานของอาคารที่อยู่อาศัย วิธีของเบส์ทำให้ทราบการแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์ว่ามีการแจกแจงปรกติ จึงใช้วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยการพิจารณาค่า 3 ค่า เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ พบว่า วิธีของเบส์ มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีกำลังสองน้อยสุดในการสร้างสมการถดถอย

จากวิจัยดังกล่าวผู้วิจัยสนใจทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยพหุคูณทั้ง 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยสุดซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้โดยทั่วไปเมื่อตัวแปรอิสระไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักที่นิยมใช้กับขนาดตัวอย่างไม่มากและตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ วิธีของเบส์ใช้ได้ดีสำหรับตัวแบบการถดถอยอย่างง่าย และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาคอฟซึ่งพัฒนามาจากวิธีของเบส์ ซึ่งวิธีดังกล่าวจะทำให้ได้ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจทำการหาวิธีในประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบการถดถอยพหุคูณ เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงปรกติ ตัวแปรอิสระไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุและมีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ

2. ตัวสถิติที่ใช้ในงานวิจัย

ในงานวิจัยได้ทำการศึกษาตัวแบบการถดถอยพหุคูณที่มีตัวแปรตาม $(\underset{\sim}{y})$ เป็นตัวแปรเชิงปริมาณ 1 ตัว และตัวแปรอิสระ (X) 2 ตัว เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{1}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{y}$ แทน เวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $\boldsymbol{n} \times 1$

X แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $\boldsymbol{n} \times 3$

$\underset{\sim}{\beta}$ แทน เวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์การถดถอยอย่างง่ายขนาด 3×1

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ แทน เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน ขนาด $\boldsymbol{n} \times 1$

$\boldsymbol{n}$ แทน ขนาดของตัวอย่าง

โดยในการวิจัยครั้งนี้สนใจทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย 4 วิธี ประกอบด้วย

2.1 วิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ (Ordinary Least Squares Method)

เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยอย่างง่ายและพหุคูณและเป็นวิธีที่นิยมให้กันอย่างแพร่หลายเนื่องจากตัวประมาณที่ได้เป็นตัวแประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด

วิธีกำลังสองน้อยที่สุดสามัญเป็นวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการทำให้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด (Mean Square Error: MSE) ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเขียนได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon} = (\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\hat{y}})'(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\hat{y}})$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\hat{y}} = X\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

จะได้ว่า $\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon} = (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

ทำการหาอนุพันธ์ของ $\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon}$ เทียบกับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ และกำหนดให้เท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = 0$$

$$-2X'\underset{\sim}{y} + 2(X'X)\underset{\sim}{\hat{\beta}} = 0$$

$$(X'X)\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

ดังนั้น ค่าประมาณพารามิเตอร์ คือ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{OLS} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0_{OLS}} \\ \hat{\beta}_{1_{OLS}} \\ \hat{\beta}_{2_{OLS}} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}(X'\underset{\sim}{y})$

2.2 วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Squares Method) [9]

เป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีกำลังสองน้อยสุดโดยการกำหนดค่าถ่วงน้ำหนัก ($W^{-\frac{1}{2}}$) ให้กับสมการถดถอยพหุคูณในสมการที่ (1) ดังนี้

$$W^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{y} = W^{-\frac{1}{2}}X\underset{\sim}{\beta} + W^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{\varepsilon} \quad (2)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\underset{\sim}{y}_W = X_W\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}_W \quad (3)$$

จาก (3) จะได้ตัวแบบการถดถอยพหุคูณแบบถ่วงน้ำหนักและจึงทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักโดยพิจารณาผลบวกของน้ำหนักคูณกับกำลังสองของความคลาดเคลื่อน มีค่าต่ำสุด โดยแสดงในรูปแบบเดียวกับวิธีกำลังสองน้อยสุดดังนี้

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_W'\underset{\sim}{\varepsilon}_W = (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'\underset{\sim}{W}^{-1}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{W}^{-1}X\underset{\sim}{\hat{\beta}}$$

แล้วจึงทำการหาอนุพันธ์ของ $\underset{\sim}{\varepsilon}_W'\underset{\sim}{\varepsilon}_W$ เทียบกับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ และกำหนดให้เท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}\underset{\sim}{\varepsilon}_W'\underset{\sim}{\varepsilon}_W = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'\underset{\sim}{W}^{-1}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = 0$$

$$-2X'\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{y} + 2(X'\underset{\sim}{W}^{-1}X)\underset{\sim}{\hat{\beta}} = 0$$

$$(X'\underset{\sim}{W}^{-1}X)\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{y}$$

ดังนั้น ค่าประมาณพารามิเตอร์ คือ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{WLS} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0_{WLS}} \\ \hat{\beta}_{1_{WLS}} \\ \hat{\beta}_{2_{WLS}} \end{bmatrix} = (X'\underset{\sim}{W}^{-1}X)^{-1}X'\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{y}$

โดยที่ $W^{-1} = Var(\underset{\sim}{y})$ โดยพิจารณาจาก (1) จะได้ว่า

$$Var(\underset{\sim}{y}) = Var(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{\beta}^2 Var(X) + Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma_{\varepsilon}^2$$

ดังนั้น $W^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{bmatrix}$

2.3 วิธีของเบส์ (Bayes' Method) [2]

เป็นวิธีในการประมาณค่าจากทฤษฎีบทของเบส์เป็นพื้นฐานโดยวิธีของเบส์นี้ใช้การประมาณค่าพารามิเตอร์จากความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขในรูปของการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลังที่แปรผันกับผลคูณระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนและฟังก์ชันภาวะความน่าจะเป็น สมการของเบส์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2 \big| \underset{\sim}{y}) = \frac{P(\underset{\sim}{y} \big| \underset{\sim}{\beta},\sigma^2)P(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)}{P(\underset{\sim}{y})} \propto P(\underset{\sim}{y} \big| \underset{\sim}{\beta},\sigma^2)P(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$$

โดยที่ $P(\underset{\sim}{y})$ เรียกว่า การแจกแจงของข้อมูล

$P(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$ เรียกว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$

$P(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2 \big| \underset{\sim}{y})$ เรียกว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$

$P(\underset{\sim}{y} \big| \underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$ เรียกว่า ฟังก์ชันภาวะความน่าจะเป็น เมื่อทราบข้อมูล $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ และ σ^2

ซึ่งวิธีของเบส์ มีขั้นตอนดังนี้

(1) เลือกการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (Prior Probability Distribution) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$ ในงานวิจัยนี้เลือกใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นคู่สังยุคก่อน (Conjugate Prior Probability Distribution) สำหรับ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ และกำหนดให้ทราบ σ^2 มีรูปแบบสมการดังนี้

$$P(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\beta} - \overline{\underset{\sim}{\beta}})'\bar{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}(\underset{\sim}{\beta} - \overline{\underset{\sim}{\beta}})\right\}$$

$\overline{\underset{\sim}{\beta}}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยก่อน (Prior Mean) ของ $\underset{\sim}{\beta}$

$\bar{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมก่อน (Prior Covariance) ของ $\overline{\underset{\sim}{\beta}}$

(2) คำนวณฟังก์ชันภาวะความน่าจะเป็นเมื่อทราบข้อมูล $\bar{\underset{\sim}{\beta}}$ และ σ^2 จากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ มีรูปแบบการแจกแจงดังนี้

$$P(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\right\}$$

(3) คำนวณการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior Probability Distribution) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2)$ จากสมการของเบส์มีรูปแบบสมการดังนี้

$$P(\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta} - \bar{\bar{\underset{\sim}{\beta}}}\right)' \bar{\bar{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}\left(\underset{\sim}{\beta} - \bar{\bar{\underset{\sim}{\beta}}}\right)\right\}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{\beta} \sim N\left(\bar{\bar{\underset{\sim}{\beta}}}, \bar{\bar{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}\right)$ และ $\bar{\bar{\underset{\sim}{\beta}}}$ คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยภายหลัง (Posterior Mean) ของ $\underset{\sim}{\beta}$

$\bar{\bar{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมภายหลัง (Posterior Covariance) ของ $\underset{\sim}{\beta}$

ดังนั้น ค่าประมาณพารามิเตอร์ คือ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{Bayes} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0_{Bayes}} \\ \hat{\beta}_{1_{Bayes}} \\ \hat{\beta}_{2_{Bayes}} \end{bmatrix} = \left(\bar{\bar{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}\right)^{-1}\left(\bar{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}\bar{\underset{\sim}{\beta}} + \frac{X'X}{\sigma^2}\underset{\sim}{\mathrm{b}}\right)$

โดยที่ $\bar{\bar{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} = \bar{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} + \frac{X'X}{\sigma^2}$

2.4 วิธีมอร์ติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method) [3]

เป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีของเบส์โดยพิจารณารูปแบบของการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลังซึ่งต้องมีการกำหนดค่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน แต่วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟเป็นวิธีที่นิยมใช้เมื่อไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนของตัวแปร โดยจะทำการสุ่มตัวอย่างตัวแปรจากวิธีโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) จากการแจกแจงก่อนของค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ และวิธีการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ [4]ได้ถูกนำมาใช้ในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์จากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง ขั้นตอนการสร้างสุ่มตัวอย่างจากวิธีโซ่มาร์คอฟ ประกอบไปด้วย

(1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\theta^{(0)}$ จากการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน

(2) สร้างค่าจากข้อ (1) มา T ค่าจนกระทั่งครบตามที่กำหนดไว้

(3) ตรวจสอบการแจกแจงในข้อ (2) ถ้าไม่เป็นไปตามลักษณะที่ต้องการให้สร้างค่ามากขึ้น

(4) เมื่อค่าที่ได้เป็นไปตามที่ต้องการเลือกค่าที่สังเกตที่ค่า B เป็นต้นไป

(5) พิจารณาค่า $\left\{\theta^{(\mathrm{B}+1)}, \theta^{(\mathrm{B}+2)}, \ldots, \theta^{(\mathrm{T})}\right\}$ ในรูปของตัวอย่างสำหรับวิเคราะห์จากการแจกแจงความน่า-จะเป็นภายหลัง

(6) สร้างกราฟเพื่อดูลักษณะการแจกแจงของการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง

(7) คำนวณค่าเฉลี่ย ค่ากลาง ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง

เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ที่สร้างจากวิธีของ โซ่มาร์คอฟ แล้วจึงทำการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ในสถิติของเบส์ โดยใช้วิธีการประมาณค่าด้วยมอนติคาร์โลเพื่อประมาณค่าจากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง

จาก $E(\mathrm{g}(\theta)|\mathrm{x}_1,\ldots\mathrm{x}_n) = \int f(\theta|\mathrm{x}_1,\ldots\mathrm{x}_n)\mathrm{g}(\theta)d\theta$

ซึ่งสามารถประมาณค่า ได้โดย θ ได้โดย $\bar{\theta} = \frac{1}{T}\sum_{1}^{T}\theta^{(\mathrm{T})}$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอย ใช้ตัวแบบเชิงลำดับชั้นของเบส์ (Bayes' Hierarchical Model) ดังนี้

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x_2 + \varepsilon_i$$

$$y_i|\mu_i,\tau \sim N(\mu_i,\frac{1}{\tau})$$

เมื่อ $\mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ โดยที่

$$\tau|a,b \sim Gamma(a,b)$$

$\beta_0|m_1,t_1 \sim \mathrm{N}(m_1,\frac{1}{t_1})$ $\beta_1|m_2,t_2 \sim \mathrm{N}(m_2,\frac{1}{t_2})$ และ $\beta_2|m_3,t_3 \sim \mathrm{N}(m_3,\frac{1}{t_3})$

จะได้ $\hat{\beta}_{0_{MCMC}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\beta}_0^{(\mathrm{t})}$

$$\hat{\beta}_{1_{MCMC}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\beta}_1^{(\mathrm{t})}$$

$$\hat{\beta}_{2_{MCMC}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\beta}_2^{(\mathrm{t})}$$

โดยที่ T คือ จำนวนการสร้างค่าประมาณพารามิเตอร์

3. วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้มีขั้นตอนดังนี้ คือ

3.1 ใช้โปรแกรมอาร์ ในการจำลองและวิเคราะห์ข้อมูล

3.2 สุ่มค่าความคลาดเคลื่อน (Error: $\underset{\sim}{\varepsilon}$) ของตัวแบบการถดถอยพหุคูณจากข้อมูลที่มีการแจกแจงปรกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \mu$ และค่าความแปรปรวน $Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma^2$ ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 และ 6 หรือเขียนได้ว่า และ $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(0,1)$ และ $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(0,6)$

3.3 ตัวอย่างของตัวแปรอิสระ (X) จำนวนสองตัวที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุสุ่มแบบการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ค่าระดับความสัมพันธ์ (ρ) เท่ากับ 0.3 0.6 และ 0.9 และไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 และความแปรปรวนเท่ากับ 3

3.4 กำหนดค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_0,\beta_1,\beta_2)'$ เท่ากับ 3, 5 และ 7 ตามลำดับ

3.5 นำข้อมูลจากข้อ 3.2, 3.3 และ 3.4 มาประมาณค่าตัวแปรตาม $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$

3.6 นำตัวแปรตาม (y) และตัวแปรอิสระ (X) ที่ได้มาประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก วิธีเบส์เซียน และวิธีมอนติคาร์โล โซ่มาคอฟ ซึ่งจะได้ค่า $\hat{\beta}_0$ $\hat{\beta}_1$ และ $\hat{\beta}_2$

3.7 จากข้อ 3.2-3.5 ทำการสุ่มซ้ำ 1,000 รอบและนำค่า $\hat{\beta}_{0i}$, $\hat{\beta}_{1i}$ และ $\hat{\beta}_{2i}$ ที่ได้จากแต่ละรอบมาหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: MSE)

$$MSE_{b_0} = \frac{\sum_{i=1}^{1000}\left(\beta_0 - \hat{\beta}_{0i}\right)^2}{1000}, MSE_{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^{1000}\left(\beta_1 - \hat{\beta}_{1i}\right)^2}{1000} \text{ และ } MSE_{b_2} = \frac{\sum_{i=1}^{1000}\left(\beta_2 - \hat{\beta}_{2i}\right)^2}{1000}$$

เมื่อ $\hat{\beta}_{0i}$ $\hat{\beta}_{1i}$ และ $\hat{\beta}_{2i}$ คือตัวประมาณค่าพารามิเตอร์จากการประมาณรอบที่ i โดยที่ i = 1,2,...,1000

3.8 หาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Average Mean Square Error: AMSE)

$$AMSE = \frac{MSE_{b_0} + MSE_{b_1} + MSE_{b_2}}{3}$$

3.9 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา (n) มีค่าเท่ากับ 5, 30 และ 50

4. ผลการวิจัย

จากผลการวิจัยแสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) และค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) จากการสุ่มค่าความคลาดเคลื่อนที่การแจกแจงปรกติ ที่ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 1 และ 6 ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 5, 30 และ 50 กรณีตัวแปรอิสระมีอิสระกันสุ่มแบบการแจกแจงปรกติปลอมปน แสดงดังตารางที่ 1-3 ส่วนกรณีที่ตัวแปรอิสระไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุสุ่มมาจากการแจกแจงแบบปรกติ แสดงดังตารางที่ 4 โดยมีสัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

- OLS แทน วิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ
- WLS แทน วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก
- Bayes’ แทน วิธีของเบส์
- MCMC แทน วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

Table 1 Mean Square Error (MSE) and Average Mean Square Error (AMSE) in case of independent variable with multicollinearity at the level correlation 0.3.

Sample Sizes			$n=5$		$n=30$		$n=50$	
Methods			$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$
OLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.33930	2.03580	0.05668	0.34004	0.02522	0.15137
		$\hat{\beta}_1$	0.24599	1.47596	0.01209	0.07256	0.00852	0.05117
		$\hat{\beta}_2$	0.11060	0.66362	0.01156	0.06740	0.00807	0.08366
	AMSE		0.23196	1.39179	0.02678	0.16069	0.01374	0.08366
WLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.20056	1.20338	0.00411	0.02468	0.00128	0.00772
		$\hat{\beta}_1$	0.17265	1.03594	0.00108	0.00653	0.00041	0.00249
		$\hat{\beta}_2$	0.07222	0.43335	0.00107	0.00642	0.00056	0.00337
	AMSE		0.14848	0.89089	**0.00209**	**0.01254**	**0.00075**	**0.00453**
Bayes’	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.06737	0.40425	0.04176	0.25056	0.02154	0.12926
		$\hat{\beta}_1$	0.07221	0.43331	0.01113	0.06681	0.00797	0.04787
		$\hat{\beta}_2$	0.05273	0.31639	0.00997	0.05987	0.00757	0.04545
	AMSE		**0.06410**	**0.38465**	0.02095	0.12574	0.01236	0.07420
MCMC	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.38154	2.28500	0.05497	0.32963	0.02541	0.15247
		$\hat{\beta}_1$	0.24667	1.47745	0.01157	0.06943	0.00796	0.04780
		$\hat{\beta}_2$	0.11209	0.67376	0.01227	0.07336	0.00826	0.04762
	AMSE		0.24676	1.47873	0.02627	0.15748	0.01388	0.08330

Note: Bold text meaning the lowest AMSE from 4 methods in each case

Table 2 Mean Square Error (MSE) and Average Mean Square Error (AMSE) in case of independent variable with multicollinearity at the level correlation 0.6.

Sample Sizes			$n=5$		$n=30$		$n=50$	
Methods			$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$
OLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.30142	1.80853	0.05354	0.32127	0.02364	0.14188
		$\hat{\beta}_1$	0.33048	1.98289	0.01696	0.10180	0.01201	0.07210
		$\hat{\beta}_2$	0.16903	1.01423	0.01633	0.09803	0.01147	0.06886
	AMSE		0.26698	1.60188	0.02895	0.17370	0.01571	0.07428
WLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.17312	1.03874	0.00386	0.02321	0.00117	0.00705
		$\hat{\beta}_1$	0.22911	1.37969	0.00153	0.00919	0.00057	0.00344
		$\hat{\beta}_2$	0.10935	0.65614	0.00150	0.00905	0.00074	0.00449
	AMSE		0.17053	1.02319	**0.00230**	**0.01381**	**0.00083**	**0.00500**
Bayes’	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.06895	0.41375	0.04003	0.24023	0.02041	0.12251
		$\hat{\beta}_1$	0.06963	0.41780	0.01482	0.08896	0.01087	0.06233
		$\hat{\beta}_2$	0.05534	0.33205	0.01360	0.08161	0.01039	0.06237
	AMSE		**0.06464**	**0.38786**	0.02282	0.13674	0.01389	0.08337
MCMC	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.33805	0.38786	0.05198	0.31085	0.02401	0.14426
		$\hat{\beta}_1$	0.33018	2.02900	0.01653	0.09914	0.01152	0.06943
		$\hat{\beta}_2$	0.16885	1.01092	0.01730	0.10399	0.01152	0.07167
	AMSE		0.27903	1.01092	0.02861	0.17133	0.01582	0.09512

Note: Bold text meaning the lowest AMSE from 4 methods in each case

Table 3 Mean Square Error (MSE) and Average Mean Square Error (AMSE) in case of independent variable with multicollinearity at the level correlation 0.9.

Sample Sizes			$n=5$		$n=30$		$n=50$	
Methods			$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$
OLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.27632	1.65793	0.05140	0.30843	0.02260	0.13565
		$\hat{\beta}_1$	0.97279	5.86074	0.05610	0.33660	0.03787	0.23923
		$\hat{\beta}_2$	0.68049	4.08294	0.05494	0.32969	0.03888	0.23329
	AMSE		0.64453	3.86720	0.05415	0.32491	0.03378	0.20272
WLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.15493	0.92963	0.00370	0.02223	0.00110	0.00661
		$\hat{\beta}_1$	0.66358	3.98150	0.00509	0.03054	0.00195	0.01175
		$\hat{\beta}_2$	0.44378	2.66273	0.00504	0.03028	0.00227	0.01367
	AMSE		0.42077	2.52462	**0.00461**	**0.02768**	**0.00178**	**0.01068**
Bayes'	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.07003	0.42019	0.03820	0.22925	0.01966	0.11798
		$\hat{\beta}_1$	0.04387	0.26981	0.03282	0.19692	0.02676	0.16177
		$\hat{\beta}_2$	0.04387	0.26324	0.03145	0.20495	0.02427	0.14567
	AMSE		**0.05295**	**0.31775**	0.03415	0.20495	0.02427	0.14567
MCMC	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.30954	1.85451	0.04998	0.29928	0.02316	0.13876
		$\hat{\beta}_1$	0.95984	5.75900	0.05618	0.33751	0.03989	0.23908
		$\hat{\beta}_2$	0.66799	4.00314	0.05772	0.34670	0.04049	0.24307
	AMSE		0.64579	3.87222	0.05463	0.32783	0.03451	0.20697

Note: Bold text meaning the lowest AMSE from 4 methods in each case

จากตารางที่ 1-3 พบว่าวิธีของเบส์ (Bayes') ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) น้อยที่สุด เมื่อตัวอย่างมีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 5 ความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 1 และ 6 ทุกระดับความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น วิธีกำลังสองถ่วงน้ำหนัก (WLS) ให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (AMSE) น้อยที่สุดทุกระดับความแปรปรวน เมื่อพิจารณค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อระดับของตัวแปรอิสระและค่าความแปรปรวนของความแปรปรวนเพิ่มขึ้น

Table 4 Mean Square Error (MSE) and Average Mean Square Error (AMSE) in case of independent variable without multicollinearity.

ขนาดตัวอย่าง			$n=5$		$n=30$		$n=50$	
สถานการณ์			$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=6$
OLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.37933	2.27598	0.07432	0.44595	0.02983	0.17901
		$\hat{\beta}_1$	0.17267	1.03604	0.01123	0.06741	0.00771	0.04628
		$\hat{\beta}_2$	0.15664	0.93983	0.01051	0.06308	0.00746	0.04481
	AMSE		0.23621	1.41729	0.03202	0.19215	0.01500	0.09003
WLS	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.16630	0.99781	0.00599	0.03594	0.00159	0.00957
		$\hat{\beta}_1$	0.12490	0.74941	0.00102	0.00615	0.00053	0.00321
		$\hat{\beta}_2$	0.10416	0.62498	0.00095	0.00575	0.00039	0.00237
	AMSE		0.13178	0.79073	**0.00265**	**0.01595**	**0.00084**	**0.00505**
Bayes’	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.06945	0.41673	0.04964	0.29789	0.02482	0.14895
		$\hat{\beta}_1$	0.06828	0.40969	0.01012	0.06074	0.00726	0.04360
		$\hat{\beta}_2$	0.05362	0.32175	0.00866	0.05201	0.00687	0.04124
	AMSE		**0.06378**	**0.38272**	0.02281	0.13688	0.01298	0.07793
MCMC	MSE	$\hat{\beta}_0$	0.40183	2.40485	0.07483	0.33589	0.02816	0.16905
		$\hat{\beta}_1$	0.18202	1.09131	0.01084	0.13729	0.00684	0.04114
		$\hat{\beta}_2$	0.15323	0.91961	0.01083	0.05254	0.00764	0.04598
	AMSE		0.24569	1.47192	0.03217	0.17524	0.01422	0.08539

Note: Bold text meaning the lowest AMSE from 4 methods in each case

จากตารางที่ 4 ให้ผลการวิจัยเช่นเดียวกับตารางที่ 1-3 โดยวิธีของเบส์ (Bayes’) เป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุดที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (WLS) เป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ที่ระดับความแปรปรวนเดียวกันค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

5. สรุปผลการวิจัย

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยพหุคูณ วิธีของเบส์เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ดีที่สุดที่ขนาดตัวอย่างเล็กมากๆ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักเป็นวิธีที่ดีที่สุด ซึ่งให้ผลเช่นเดียวกันทั้งกรณีที่ตัวแปรอิสระมีหรือไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุดังนั้นแสดงว่าความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระไม่

ว่าจะน้อยหรือมากไม่มีผลต่อการประมาณค่าพารามิเตอร์ในงานวิจัยนี้แต่สิ่งที่ส่งผลต่อการประมาณค่าคือขนาดตัวอย่างเพราะถ้าขนาดตัวอย่างเล็กมากการประมาณค่าด้วยทฤษฎีบทของเบส์ซึ่งต้องมีการใช้สารสนเทศของพารามิเตอร์ส่งผลให้การประมาณค่ามีประสิทธิภาพดีที่สุดแต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทำให้มีการกระจายของข้อมูลมากขึ้นวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักมีการประมาณค่าที่ดีที่สุดเนื่องจากวิธีการนี้เป็นการนำเอาวิธีกำลังสองน้อยสุดมารวมกับการเพิ่มค่าถ่วงน้ำหนักจากค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยการใช้ค่าถ่วงน้ำหนักที่มีความเกี่ยวข้องกับทุกค่าของข้อมูลช่วยทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์มีค่าเหมาะสมมากที่สุด

6. References

[1] Sereewattananukul, P., 2012, Comparison of the Estimation Methods for the Multiple Linear Regression Model with Heteroscedasticity Error, Master Thesis, Chulalongkorn University, Bangkok, 13 p. (in Thai)

[2] Koop, G., 2003, Bayesian Econometrics, John Wiley, England, 137 p.

[3] Gilks, W., Richarden, S. and Speigelhalter, D., 1996, Markov Chain Monte Carlo in Practice, Interdisciplinary, Chapman & Hall, Suffolk.

[4] Gelfand, A., Hills, S., Racine-Poon, A. and Smith, A., 1990, Illustration of Bayesian Inference in Normal Data Models using Gibbs Sampling, J. Am. Stat. Assoc. 85: 972-985.

[5] Mekbunditkul, T., 2003, Parameters-Estimation of Polynomial Regression Models with Errors in Independent Variables, Master Thesis, Chulalongkorn University, Bangkok, 40 p. (in Thai)

[6] Bunyamas, T., 2014, Comparison of the Estimation Methods for the Multiple Linear Regression with Nonconstant Variance Error From Lognormal and Gamma Distribution Master Thesis, Chulalongkorn University, Bangkok, 24 p. (in Thai)

[7] Sae-ui, P., Supapakorn, T. and Payakkapong, P., 2016. A Comparison of Parameter Estimations of Bayesian, Ordinary Least Square and Parametric Bootstrap Methods for Simple Linear Regression Model, Thai Sci. Technol. 24(3): 363-369. (in Thai)

[8] Diana, S. and Tanty, P. H., 2018. Linear Regression Model Using Bayesian Approach for Energy Performance of Residential Building. Pro. Com. Sc. 135: 671–677.

[9] Willett, J.D. and Singer, J. D. 1988, Another Cautionary Note About R^2: Its Use in Weighted Least-Squares Regression Analysis, J. Am. Stat. 42(3): 236-238.