วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 707 พฤษภาคม – สิงหาคม 2565
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$

On The Diophantine Equation $2^x + p^y = z^2$ where $x \neq 1$ and $p \equiv 3 \pmod 4$

DOI: 10.14456/mj-math.2022.xx

สุธน ตาดี
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี 15000

Suton Tadee
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000

Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

วันที่รับบทความ : 6 กุมภาพันธ์ 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 19 สิงหาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 24 สิงหาคม 2565

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ คือ

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{(2+\log_2(p+1), p, 2, p+2) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ข้อความคาดการณ์กาตาลัน

ABSTRACT

In this paper, we show that all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$, where $x \neq 1,\ p$ is prime and $p \equiv 3 \pmod 4$, are

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{\left(2+\log_2(p+1), p, 2, p+2\right) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

Keywords: Diophantine equation, Catalan's conjecture

1. บทนำ

ในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $2^x + p^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p เป็นจำนวนเฉพาะนั้น ได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง เช่น ในปี ค.ศ.2007 Acu [1] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x,y,z) \in \{(3,0,3),(2,1,3)\}$ ต่อมาในปี ค.ศ.2011 Suvarnamani, Singta และ Chotchaisthit [13] พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 7^y = z^2$ และ $2^x + 11^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ x เป็นจำนวนคู่

ต่อมาในปี ค.ศ.2012 Chotchaisthit [3] ได้ค้นพบผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ x เป็นจำนวนคู่ หลังจากนั้นในปี ค.ศ.2013 Sroysang [11] ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x,y,z) \in \{(0,1,2),(3,0,3),(4,2,5)\}$ ต่อมา Chotchaisthit [4] พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 11^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$

ในปี ค.ศ.2013 Roboga [9] ได้แสดงว่า $(x,y,z) = \{(3,0,3),(3,1,5),(6,1,9),(9,1,23)\}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ ต่อมาในปี ค.ศ.2014 Sroysang [12] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 13^y = z^2$ และ $2^x + 59^y = z^2$ เมื่อ $x \equiv 0 \pmod 3$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$ และ Tanakan [14] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 19^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$

ในปี ค.ศ.2015 Qi และ Li [8] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \equiv 0 \pmod 3$ และ $p \neq 2$ และในปี ค.ศ.2016 Rabago [10] ได้แสดงว่า

สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงห้าผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(3,1,5),(5,1,7),(6,1,9),(7,3,71),(9,1,23)\}$ และ Puangjumpa [7] ได้พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 47^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3,0,3),(1,1,7)\}$ ในปี ค.ศ.2018 Burshtein [2] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $y = 1$ และ $p = 7, 13, 29, 37$ และ 257 มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้ กรณีที่ $p = 7$ จะได้ว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1,1,3)$ กรณีที่ $p = 13, 29, 37$ จะได้ว่าสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย และกรณีที่ $p = 257$ จะได้ว่าสมการดังกล่าวมีเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(14,1,129),(5,1,17)\}$

ในงานวิจัยนี้จะหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$

2. ผลลัพธ์หลัก

ทฤษฎีบท 2.1 [6] (ข้อความคาดการณ์กาตาลัน)
ให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ จะได้ว่า
สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3,2,2,3)$

ทฤษฎีบท 2.2 [14] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, z) = (3,3)$

ทฤษฎีบท 2.3 [5] ถ้า $p \neq 2$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + p^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, y, z) = (3,1,2)$

ทฤษฎีบท 2.4 [3] ถ้า x เป็นจำนวนคู่ และ $p \neq 2$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x, p, y, z) \in \{(4,3,2,5),(2r, 2^{r+1}+1, 1, 2^r+1)\}$$

เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 2.5 [11] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3,0,3),(0,1,2),(4,2,5)\}$

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x + p^y = z^2 \tag{1}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$(x, p, y, z) \in \{(3, p, 0, 3)\} \cup \{(0, 3, 1, 2)\} \cup \{(2 + \log_2(p+1), p, 2, p+2) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$

บทพิสูจน์ ให้ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$ ดังนั้น $p \neq 2$

ถ้า $p = 3$ จากทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า $(x, p, y, z) \in \{(3, 3, 0, 3), (0, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 5)\}$

เพราะฉะนั้นเหลือเพียงพิสูจน์กรณีที่ $p \neq 3$ ซึ่งจากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $x \neq 0$

<u>กรณี 1</u> x เป็นจำนวนคู่

จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $x = 2n$

จากทฤษฎีบท 2.4 และ $p \notin \{2, 3\}$ จะได้ว่า $p = 2^{n+1} + 1$ ดังนั้น $p \equiv 1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$

<u>กรณี 2</u> x เป็นจำนวนคี่

กรณีย่อย 2.1 $y = 0$

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $(x, p, y, z) = (3, p, 0, 3)$

กรณีย่อย 2.2 $y \geq 1$ เป็นจำนวนคู่

จะมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งทำให้ $y = 2k$

จาก (1) จะได้ว่า

$$2^x = z^2 - p^{2k} = (z - p^k)(z + p^k)$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$z - p^k = 2^v \tag{2}$$

และ

$$z + p^k = 2^{x-v} \tag{3}$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$$2 \cdot p^k = 2^v(2^{x-2v} - 1) \tag{4}$$

และเนื่องจาก $p \neq 2$ และจาก (4) จะได้ว่า $v = 1$ และ

$$2^{x-2} - p^k = 1 \tag{5}$$

สมมติว่า $x = 3$ จาก (5) จะได้ว่า $k = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $y \neq 0$ ดังนั้น $x > 3$

พิจารณา $k > 1$ จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า (5) ไม่มีผลเฉลย

ดังนั้น $k = 1$ ทำให้ได้ว่า $y = 2$

จาก (2) จะได้ว่า $z = p + 2$ และจาก (5) จะได้ว่า $x = 2 + \log_2(p + 1)$ เมื่อ $\log_2(p + 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(x, p, y, z) = (2 + \log_2(p + 1), p, 2, p + 2)$ เป็นผลเฉลยของ (1) เมื่อ $\log_2(p + 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีย่อย 2.3 $y \geq 1$ เป็นจำนวนคี่

จาก $x \neq 0$ และ $p \neq 2$ โดย (1) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod 4$

จาก $p \equiv 3 \pmod 4$ จะได้ว่า $p^y \equiv -1 \pmod 4$

จาก $x \neq 1$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $x \geq 3$ ทำให้ $2^x \equiv 0 \pmod 4$

เพราะฉะนั้น $2^x + p^y \equiv -1 \pmod 4$

จาก (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv -1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ □

3. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ กรณีที่ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์นี้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x, p, y, z) \in \{(3, p, 0, 3)\} \cup \{(0, 3, 1, 2)\} \cup \{(2 + \log_2(p + 1), p, 2, p + 2) : \log_2(p + 1) \in \mathbb{Z}\}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Acu, D. (2007). On A Diophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics*, 15 (4), p. 145 – 148.

[2] Burshtein, N. (2018). All The Solutions to An Open Problem of S. Chotchaisthit on The Diophantine Equation $2^x + p^y = z^2$ when p are Particular Primes and $y = 1$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16 (1), p. 31 – 35.

[3] Chotchaisthit, S. (2012). On The Diophantine Equation $4^x + p^y = z^2$ where p isA Prime Number. *American Journal of Mathematics and Sciences*, 1 (1), p. 191 – 193.

[4] Chotchaisthit, S. (2013). On The Diophantine Equation $2^x + 11^y = z^2$. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 7 (2), p. 291 – 293.

[5] Khan, M., Rashid, A. and Uddin, M .S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations $2^x + 9^y = z^2$ and $5^x + 9^y = z^2$. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4, p. 762 – 765.

[6] Mihailescu, P. (2004). Primary Cyclotomic Units and A Proof of Catalan's Conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572, p. 167 – 195.

[7] Puangjumpa, P. (2016). Possible Solution of the Diophantine Equation $2^x + 47^y = z^2$. *Academic Journal URU*, 11 (3) (special), p. 36 – 42.

[8] Qi, L. and Li, X. (2015). The Diophantine Equation $8^x + p^y = z^2$. *The Scientific World Journal*, 2015, Article ID 306590, 3 pages.

[9] Robogo, J. F. T. (2013). On An Open Problem by B. Sroysang. *Konuralp Journal of Mathematics*, 1 (2), p. 30 – 32.

[10] Rabago, J. F. T. (2016). On The Diophantine Equation $2^x + 17^y = z^2$. *Journal of The Indonesian Mathematical Society*, 22 (2), p. 85 – 88.

[11] Sroysang, B. (2013). More on The Diophantine Equation $2^x + 3^y = z^2$. *Internationa lJournal of Pure and Applied Mathematics*, 84 (2), p. 133 – 137.

[12] Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation $8^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 90 (1), p. 69 – 72.

[13] Suvarnamani, A., Singta, A. and Chotchaisthit, S. (2011). On Two Diophantine Equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. *Science and Technology RMUTT Journal*, 1 (1), p. 25 – 28.

[14] Tanakan, S. (2014). On The Diophantine Equation $19^x + 2^y = z^2$. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 9 (4), p. 159 – 162.