บทความวิจัย

บางระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในจำนวนเต็มเกาส์เซียน

สุธน ตาดี*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี จังหวัดลพบุรี
*Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

รับบทความ: 29 พฤษภาคม 2565 แก้ไขบทความ: 1 กรกฎาคม 2565 ยอมรับตีพิมพ์: 13 กรกฎาคม 2565

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาบางระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในจำนวนเต็มเกาส์เซียน โดยที่ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ มอดุโล γ เมื่อ $\gamma \neq 0$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์เซียน ในที่นี้ จะเขียนย่อด้วย $\mathrm{CRS}(\gamma)$ ผลการวิจัยพบว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n

1) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \le x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \le y < \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = n)$
2) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \le \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \le \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = -n)$
3) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \le \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \le y < \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = ni)$
4) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \le x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \le \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = -ni)$
5) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < x < n, |x| - n \le y < -|x| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = n+ni)$
6) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < x < n, |x| - n < y \le -|x| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = -n-ni)$
7) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n < x \le -|y| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = -n+ni)$
8) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n \le x < -|y| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = n-ni)$

คำสำคัญ: ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ จำนวนเต็มเกาส์เซียน

Research Article

Some Complete Residue Systems in the Gaussian Integers

Suton Tadee*

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi

**Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th*

Received <29 May 2022>; Revised <1 July 2022>; Accepted <13 July 2022>

Abstract

In this paper, we study some complete residue systems in the Gaussian integers. By a complete residue system modulo γ where $\gamma \neq 0$ is a Gaussian integer, abbreviated by $\mathrm{CRS}(\gamma)$. The research results showed that for a positive integer n,

1) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \leq x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \leq y < \frac{n}{2}\right\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = n)$,
2) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \leq \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \leq \frac{n}{2}\right\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = -n)$,
3) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \leq \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \leq y < \frac{n}{2}\right\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = ni)$,
4) $\left\{x+yi \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \leq x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \leq \frac{n}{2}\right\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = -ni)$,
5) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < x < n, |x| - n \leq y < -|x| + n\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = n+ni)$,
6) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < x < n, |x| - n < y \leq -|x| + n\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = -n-ni)$,
7) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n < x \leq -|y| + n\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = -n+ni)$,
8) $\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n \leq x < -|y| + n\}$ is a $\mathrm{CRS}(\gamma = n-ni)$.

Keywords: Complete Residue Systems, Gaussian Integers

บทนำ

จำนวนเต็มเกาส์เซียน (Gaussian Integer) คือ จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $i=\sqrt{-1}$ ซึ่งสามารถนิยามการหารลงตัว (Divisibility) และ คอนกรูเอนซ์ (Congruence) ได้เช่นเดียวกับจำนวนเต็ม กล่าวคือ ให้ α, β และ γ เป็นจำนวนเต็มเกาส์เซียน จะกล่าวว่า α หาร β ลงตัว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\alpha|\beta$ ถ้ามีจำนวนเต็มเกาส์เซียน δ ซึ่งทำให้ $\beta=\alpha\delta$ และกล่าวว่า α คอนกรูเอนซ์กับ β มอดุโล γ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\alpha \equiv \beta(\operatorname{mod} \gamma)$ ถ้า $\gamma|(\alpha-\beta)$ ดังนั้นจึงสามารถหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ (Complete Residue System) ของจำนวนเต็มเกาส์เซียนได้

บทนิยาม 1 (Pollard and Diamond, 1975) ให้ $\gamma \neq 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์เซียน จะกล่าวว่า $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ มอดุโล γ เมื่อ 2 เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับทุกจำนวนเต็มเกาส์เซียน β จะมี $\alpha_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ซึ่งทำให้ $\beta \equiv \alpha_i(\operatorname{mod} \gamma)$
2. สำหรับทุก $\alpha_i, \alpha_j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ถ้า $\alpha_i \equiv \alpha_j(\operatorname{mod} \gamma)$ แล้ว $\alpha_i=\alpha_j$

ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของจำนวนเต็มเกาส์เซียนเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาความรู้ต่างๆ อาทิ ระบบจำนวน (Number System) ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยระบบจำนวนในที่นี้ถูกนิยามดังนี้

บทนิยาม 2 (Katai and Szabo, 1975) ให้ $\gamma \neq 0$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์เซียน และ U เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ มอดุโล γ จะเรียก (γ, U) ว่าระบบจำนวน เมื่อทุกจำนวนเต็มเกาส์เซียน α สามารถเขียนอยู่ในรูป $\alpha=u_0+u_1\gamma+u_2\gamma^2+\cdots+u_k\gamma^k$ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น โดยที่ $u_0, u_1, \ldots, u_k \in U$

ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้สนใจศึกษาสมบัติและลักษณะของสมาชิกที่อยู่ในระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของจำนวนเต็มเกาส์เซียน เช่น Jordan and Potratz (1965) ได้ค้นพบ 4 ตัวแทน (Representation) ของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของจำนวนเต็มเกาส์เซียน ต่อมา Hardman and Jordan (1967) ได้ค้นพบระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของจำนวนเต็มเกาส์เซียนที่มีขนาดเล็กที่สุด และ Tadee *et al.* (2017) ได้ศึกษาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในฟิลด์กำลังสอง (Quadratic Field) ซึ่งครอบคลุมจำนวนเต็มเกาส์เซียนด้วย (โดยในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในจำนวนเต็มเกาส์เซียน) และได้ค้นพบ 3 ตัวแทนของระบบดังกล่าวซึ่งแตกต่างจากที่ Jordan and Potratz (1965) ค้นพบ ดังนี้

กำหนดสัญลักษณ์

$\mathrm{CRS}(\gamma)$ แทน ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ (Complete Residue System) มอดุโล γ

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Z}[i]=\{x+yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์เซียน

(x, y) จะเรียกว่า จุดแลตทิซ (Lattice Point) เมื่อ $x+yi \in \mathbb{Z}[i]$

ทฤษฎีบท 1 (Tadee *et al.* , 2017) ให้ $\gamma=a+bi \in \mathbb{Z}[i]-\{0\}$ จะได้ว่า
ถ้า $d=\operatorname{gcd}(a, b)$ ซึ่งทำให้ $\gamma=d(a_1+b_1 i)$ เมื่อ $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ และ $\operatorname{gcd}(a_1, b_1)=1$
แล้ว $\{x+yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq d(a_1^2+b_1^2)-1, 0 \leq y \leq d-1\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

ทฤษฎีบท 2 (Tadee *et al.* , 2017) ให้ $\gamma \in \mathbb{Z}[i]-\{0\}$ และ V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A=\frac{\gamma}{2}(1+i), \quad B=\frac{\gamma}{2}(1-i), \quad C=\frac{\gamma}{2}(-1-i), \quad D=\frac{\gamma}{2}(-1+i)$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V=V_1 \cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

ทฤษฎีบท 3 (Tadee *et al.* , 2017) ให้ $\gamma \in \mathbb{Z}[i]-\{0\}$ และ W_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $EFGH$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$E=\frac{\gamma}{2}, \quad F=\gamma\left(\frac{1}{2}+i\right), \quad G=-\frac{\gamma}{2}, \quad H=\gamma\left(-\frac{1}{2}-i\right)$$

และให้ W_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง GH และ EH ที่ไม่ใช่จุดยอด E และ G แต่อาจจะมีจุด H ถ้า $H \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $W = W_1 \cup W_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

จะเห็นได้ว่าในทฤษฎีบท 1 เราสามารถหาสมาชิกของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ได้ไม่ยากนัก แต่ในทฤษฎีบท 2 และ 3 มีความยากในการหาสมาชิกของระบบดังกล่าว ดังนั้น Tadee (2021) ได้ศึกษาและหารูปแบบสมาชิกของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในทฤษฎีบท 3 พบว่า

ทฤษฎีบท 4 (Tadee, 2021) ให้ $\gamma = a + bi \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า
1.1 ถ้า $a = 2n$ และ $b = 0$ แล้ว $\{(n-k) + (l-k-1)i \mid k, l \in \{1,2,3, \dots, 2n\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.2 ถ้า $a = -2n$ และ $b = 0$ แล้ว $\{(n-k+1) + (l-k+1)i \mid k, l \in \{1,2,3, \dots, 2n\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.3 ถ้า $a = 2n - 1$ และ $b = 0$ แล้ว $\{(n-k) + (l-k)i \mid k, l \in \{1,2,3, \dots, 2n-1\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.4 ถ้า $a = -2n + 1$ และ $b = 0$ แล้ว $\{(n-k) + (l-k)i \mid k, l \in \{1,2,3, \dots, 2n-1\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.5 ถ้า $a = 2n$ และ $b = 2n$ แล้ว
$\{(n-k+1) + (l+k-3n-2)i \mid k \in \{1,2,3, \dots, 2n\}, l \in \{1,2,3, \dots, 4n\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.6 ถ้า $a = -2n$ และ $b = -2n$ แล้ว
$\{(n-k) + (l+k-3n)i \mid k \in \{1,2,3, \dots, 2n\}, l \in \{1,2,3, \dots, 4n\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.7 ถ้า $a = 2n - 1$ และ $b = 2n - 1$ แล้ว
$\{(n-k) + (l+k-3n)i \mid k \in \{1,2,3, \dots, 2n-1\}, l \in \{1,2,3, \dots, 4n-2\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.8 ถ้า $a = -2n + 1$ และ $b = -2n + 1$ แล้ว
$\{(n-k) + (l+k-3n+1)i \mid k \in \{1,2,3, \dots, 2n-1\}, l \in \{1,2,3, \dots, 4n-2\}\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาสมาชิกในระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของจำนวนเต็มเกาส์เซียนในทฤษฎีบท 2

วิธีดำเนินการวิจัย

การหาสมาชิกของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในทฤษฎีบท 2 ซึ่งหมายถึงการหาสมาชิกของเซต V ในทฤษฎีบท 2 นั้นเอง โดยหาได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5 ให้ $\gamma = a + bi \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า
1.1 ถ้า $a = n$ และ $b = 0$ แล้ว $\left\{x + yi \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \le x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \le y < \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.2 ถ้า $a = -n$ และ $b = 0$ แล้ว $\left\{x + yi \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \le \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \le \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.3 ถ้า $a = 0$ และ $b = n$ แล้ว $\left\{x + yi \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \le \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \le y < \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.4 ถ้า $a = 0$ และ $b = -n$ แล้ว $\left\{x + yi \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \le x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \le \frac{n}{2}\right\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.5 ถ้า $a = n$ และ $b = n$ แล้ว $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -n < x < n, |x| - n \le y < -|x| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.6 ถ้า $a = -n$ และ $b = -n$ แล้ว $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -n < x < n, |x| - n < y \le -|x| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.7 ถ้า $a = -n$ และ $b = n$ แล้ว $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n < x \le -|y| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
1.8 ถ้า $a = n$ และ $b = -n$ แล้ว $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n \le x < -|y| + n\}$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
พิสูจน์ ให้ $\gamma = a + bi \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ และจากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า

$$A = \frac{\gamma}{2}(1+i) = \left(\frac{a-b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)i, \qquad B = \frac{\gamma}{2}(1-i) = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{-a+b}{2}\right)i,$$

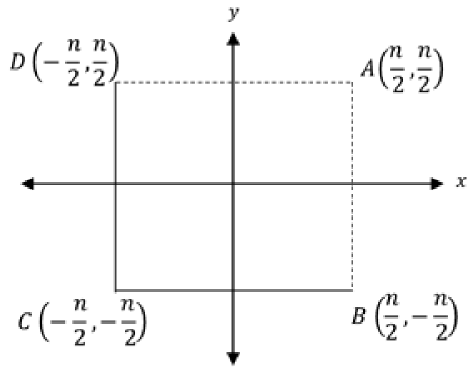
$$C = \frac{\gamma}{2}(-1-i) = \left(\frac{-a+b}{2}\right) + \left(\frac{-a-b}{2}\right)i, \quad D = \frac{\gamma}{2}(-1+i) = \left(\frac{-a-b}{2}\right) + \left(\frac{a-b}{2}\right)i$$

1.1 ให้ $a = n$ และ $b = 0$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}i,\qquad B=\frac{n}{2}-\frac{n}{2}i,\qquad C=-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}i,\qquad D=-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}i$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C\in\mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V=V_1\cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



ภาพที่ 1 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a=n$ และ $b=0$)

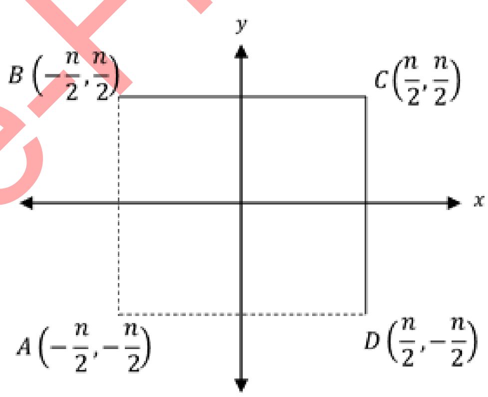
เพราะฉะนั้น $V=\left\{x+yi\,\middle|\,x,y\in\mathbb{Z},-\frac{n}{2}\le x<\frac{n}{2},-\frac{n}{2}\le y<\frac{n}{2}\right\}$

1.2 ให้ $a=-n$ และ $b=0$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A=-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}i,\qquad B=-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}i,\qquad C=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}i,\qquad D=\frac{n}{2}-\frac{n}{2}i$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C\in\mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V=V_1\cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



ภาพที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a=-n$ และ $b=0$)

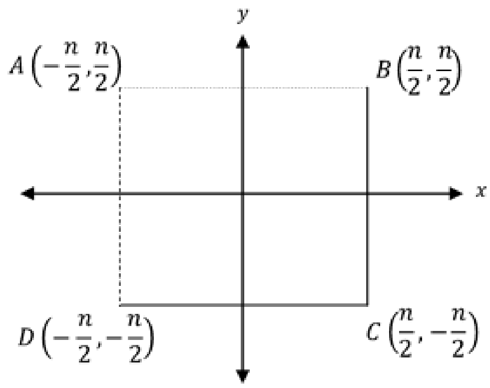
เพราะฉะนั้น $V=\left\{x+yi\,\middle|\,x,y\in\mathbb{Z},-\frac{n}{2}<x\le\frac{n}{2},-\frac{n}{2}<y\le\frac{n}{2}\right\}$

1.3 ให้ $a=0$ และ $b=n$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A=-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}i,\qquad B=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}i,\qquad C=\frac{n}{2}-\frac{n}{2}i,\qquad D=-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}i$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C\in\mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V=V_1\cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



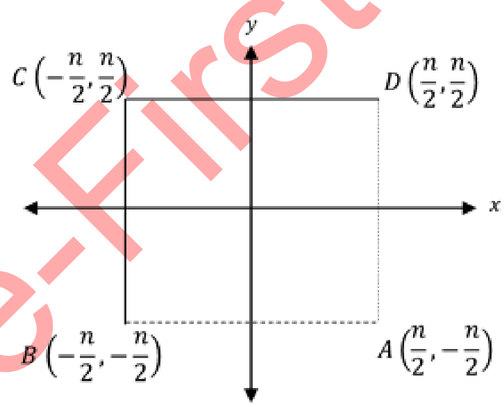
ภาพที่ 3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a = 0$ และ $b = n$)

เพราะฉะนั้น $V = \left\{x + yi \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} < x \leq \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \leq y < \frac{n}{2}\right\}$

1.4 ให้ $a = 0$ และ $b = -n$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}i, \qquad B = -\frac{n}{2} - \frac{n}{2}i, \qquad C = -\frac{n}{2} + \frac{n}{2}i, \qquad D = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}i$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V = V_1 \cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



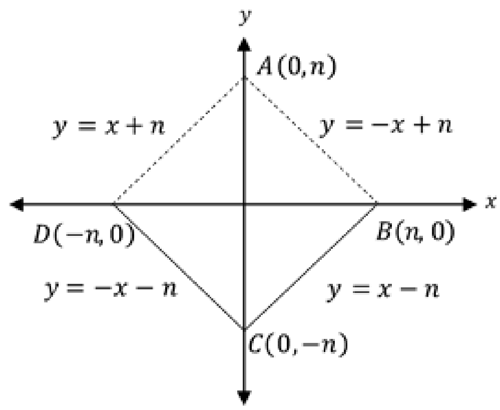
ภาพที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a = 0$ และ $b = -n$)

เพราะฉะนั้น $V = \left\{x + yi \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n}{2} \leq x < \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} < y \leq \frac{n}{2}\right\}$

1.5 ให้ $a = n$ และ $b = n$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A = ni, \qquad B = n, \qquad C = -ni, \qquad D = -n$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V = V_1 \cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



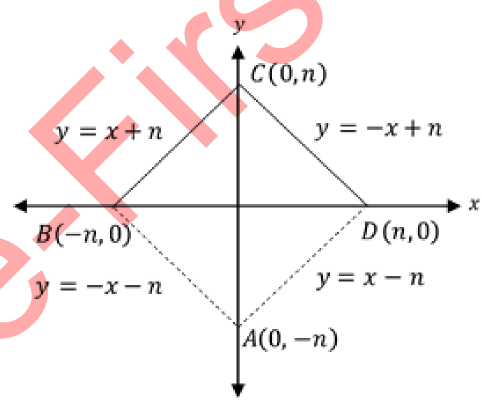
ภาพที่ 5 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a=n$ และ $b=n$)

จะได้ว่า ถ้า $0 \le x < n$ แล้ว $x-n \le y < -x+n$ และ ถ้า $-n < x < 0$ แล้ว $-x-n \le y < x+n$
เพราะฉะนั้น $V=\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n<x<n, |x|-n \le y < -|x|+n\}$

1.6 ให้ $a=-n$ และ $b=-n$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A=-ni, \quad B=-n, \quad C=ni, \quad D=n$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V=V_1 \cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



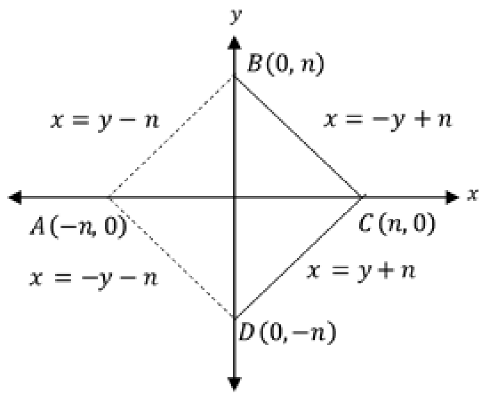
ภาพที่ 6 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a=-n$ และ $b=-n$)

จะได้ว่า ถ้า $0 \le x < n$ แล้ว $x-n < y \le -x+n$ และ ถ้า $-n < x < 0$ แล้ว $-x-n < y \le x+n$
เพราะฉะนั้น $V=\{x+yi \mid x,y \in \mathbb{Z}, -n<x<n, |x|-n < y \le -|x|+n\}$

1.7 ให้ $a=-n$ และ $b=n$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A=-n, \quad B=ni, \quad C=n, \quad D=-ni$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V=V_1 \cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



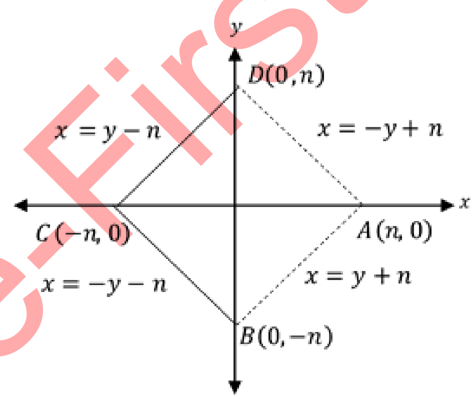
ภาพที่ 7 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a = -n$ และ $b = n$)

จะได้ว่า ถ้า $0 \leq y < n$ แล้ว $y - n < x \leq -y + n$ และ ถ้า $-n < y < 0$ แล้ว $-y - n < x \leq y + n$
เพราะฉะนั้น $V = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n < x \leq -|y| + n\}$

1.8 ให้ $a = n$ และ $b = -n$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า V_1 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยมีจุดยอดดังนี้

$$A = n, \quad B = -ni, \quad C = -n, \quad D = ni$$

และให้ V_2 เป็นเซตของจุดแลตทิซที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC และ CD ที่ไม่ใช่จุดยอด B และ D แต่อาจจะมีจุด C ถ้า $C \in \mathbb{Z}[i]$ จะได้ว่า $V = V_1 \cup V_2$ เป็น $\mathrm{CRS}(\gamma)$
พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$



ภาพที่ 8 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ (กรณีที่ $a = n$ และ $b = -n$)

จะได้ว่า ถ้า $0 \leq y < n$ แล้ว $y - n \leq x < -y + n$ และ ถ้า $-n < y < 0$ แล้ว $-y - n \leq x < y + n$
เพราะฉะนั้น $V = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -n < y < n, |y| - n \leq x < -|y| + n\}$

ตัวอย่าง 1 ให้ $a = 4$ และ $b = 0$ จากทฤษฎีบท 5 (1.1) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 2, -2 \leq y < 2\}$ ซึ่งเป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = 4)$ ได้ตามตารางนี้

x	y			
	-2	-1	0	1
-2	$-2-2i$	$-2-i$	-2	$-2+i$
-1	$-1-2i$	$-1-i$	-1	$-1+i$
0	$-2i$	$-i$	0	i
1	$1-2i$	$1-i$	1	$1+i$

ตัวอย่าง 2 ให้ $a = -4$ และ $b = 0$ จากทฤษฎีบท 5 (1.2) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 < x \le 2, -2 < y \le 2\}$ ซึ่งเป็น CRS($\gamma = -4$) ได้ตามตารางนี้

x	y			
	-1	0	1	2
-1	$-1-i$	-1	$-1+i$	$-1+2i$
0	$-i$	0	i	$2i$
1	$1-i$	1	$1+i$	$1+2i$
2	$2-i$	2	$2+i$	$2+2i$

ตัวอย่าง 3 ให้ $a = 0$ และ $b = 4$ จากทฤษฎีบท 5 (1.3) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 < x \le 2, -2 \le y < 2\}$ ซึ่งเป็น CRS($\gamma = 4i$) ได้ตามตารางนี้

x	y			
	-2	-1	0	1
-1	$-1-2i$	$-1-i$	-1	$-1+i$
0	$-2i$	$-i$	0	i
1	$1-2i$	$1-i$	1	$1+i$
2	$2-2i$	$2-i$	2	$2+i$

ตัวอย่าง 4 ให้ $a = 0$ และ $b = -4$ จากทฤษฎีบท 5 (1.4) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 \le x < 2, -2 < y \le 2\}$ ซึ่งเป็น CRS($\gamma = -4i$) ได้ตามตารางนี้

x	y			
	-1	0	1	2
-2	$-2-i$	-2	$-2+i$	$-2+2i$
-1	$-1-i$	-1	$-1+i$	$-1+2i$
0	$-i$	0	i	$2i$
1	$1-i$	1	$1+i$	$1+2i$

ตัวอย่าง 5 ให้ $a = 2$ และ $b = 2$ จากทฤษฎีบท 5 (1.5) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2, |x| - 2 \le y < -|x| + 2\}$ ซึ่งเป็น CRS($\gamma = 2 + 2i$) ได้ตามตารางนี้

x	y			
	-2	-1	0	1
-1		$-1-i$	-1	
0	$-2i$	$-i$	0	i
1		$1-i$	1	

ตัวอย่าง 6 ให้ $a = -2$ และ $b = -2$ จากทฤษฎีบท 5 (1.6) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2, |x| - 2 < y \le -|x| + 2\}$ ซึ่งเป็น CRS($\gamma = -2 - 2i$) ได้ตามตารางนี้

x	y			
	-1	0	1	2
-1		-1	$-1+i$	
0	$-i$	0	i	$2i$
1		1	$1+i$	

ตัวอย่าง 7 ให้ $a = -2$ และ $b = 2$ จากทฤษฎีบท 5 (1.7) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 < y < 2, |y| - 2 < x \leq -|y| + 2\}$ ซึ่งเป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = -2 + 2i)$ ได้ตามตารางนี้

x	y		
	-1	0	1
-1		-1	
0	$-i$	0	i
1	$1 - i$	1	$1 + i$
2		2	

ตัวอย่าง 8 ให้ $a = 2$ และ $b = -2$ จากทฤษฎีบท 5 (1.8) สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}, -2 < y < 2, |y| - 2 \leq x < -|y| + 2\}$ ซึ่งเป็น $\mathrm{CRS}(\gamma = 2 - 2i)$ ได้ตามตารางนี้

x	y		
	-1	0	1
-2		-2	
-1	$-1 - i$	-1	$-1 + i$
0	$-i$	0	i
1		1	

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของจำนวนเต็มเกาส์เซียนในทฤษฎีบท 2 ดังปรากฏในทฤษฎีบท 5 แต่อย่างไรก็ตามระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ที่พบยังไม่ใช่ระบบทั้งหมดในทฤษฎีบท 2 เพราะยังขาดบางกรณี เช่น กรณีที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $|a| \neq |b|$ เป็นต้น ดังนั้นจึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Hardman, N.R. and Jordan, J.H. (1967). A minimum problem connected with complete residue systems in Gaussian integers. **The American Mathematical Monthly**, 74(5), 559-561.

Jordan, J.H. and Potratz, C.J. (1965). Complete residue systems in the Gaussian integers. **Mathematics Magazine**, 38(1), 1-12.

Katai, I. and Szabo, J. (1975). Canonical number systems for complex integers. **Acta Scientiarum Mathematicarum**, 37, 255-260.

Pollard, H. and Diamond, H.G. (1975). **The theory of algebraic numbers**. New York: The Mathematical Association of America.

Tadee, S. (2021). Complete residue systems in the Gaussian integers (in Thai). **Proceedings of 11st National Conference of Sri-Ayutthaya Rajabhat University Group** (pp. 138-148). July 15, 2021. Chachoengsao: Rajabhat Rajanagarindra University.

Tadee, S., Laohakosol, V. and Damkaew, S. (2017). Explicit complete residue systems in a general quadratic field. **Divulgaciones Matematicas**, 18(2), 1-17.