

บทความวิจัย

ผลเฉลยของสองสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$

จันทนา วรรณพันธุ์ และสุรน ตาดี*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี

*Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

รับบทความ: 4 มิถุนายน 2565 แก้ไขบทความ: 1 กรกฎาคม 2565 ยอมรับตีพิมพ์: 13 กรกฎาคม 2565

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ แสดงว่า ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ อยู่ในรูป

$$(n, x, y, z) \in \{(1, a, 3, 3) \mid a \in \mathbb{Z}, a \geq 0\} \cup \{(b, 0, 3, 3) \mid b \in \mathbb{Z}, b > 1\} \cup \{(2^{c-2} - 1, 1, c, 2^{c-2} + 1) \mid c \in \mathbb{Z}, c > 3\}$$

และผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ อยู่ในรูป

$$(n, x, y, z) \in \{(1, d, 0, 0) \mid d \in \mathbb{Z}, d \geq 0\} \cup \{(e, 0, 0, 0) \mid e \in \mathbb{Z}, e > 1\} \cup \{(2^{f-2} + 1, 1, f, 2^{f-2} - 1) \mid f \in \mathbb{Z}, f > 3\} \cup \{(3, 1, 3, 1), (3, 2, 5, 7)\}$$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

On the Solutions of Two Diophantine Equations

$$n^{2x} + 2^y = z^2 \text{ and } n^{2x} - 2^y = z^2$$

Chantana Wannaphan and Suton Tadee*

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi

*Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

Received <4 June 2022>; Revised <1 July 2022>; Accepted <13 July 2022>

Abstract

In this paper, we show that all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $n^{2x} + 2^y = z^2$ where n is an odd positive integer, are of the following form

$$(n, x, y, z) \in \{(1, a, 3, 3) | a \in \mathbb{Z}, a \geq 0\} \cup \{(b, 0, 3, 3) | b \in \mathbb{Z}, b > 1\} \cup \{(2^{c-2} - 1, 1, c, 2^{c-2} + 1) | c \in \mathbb{Z}, c > 3\}.$$

All non-negative integer solutions of the Diophantine equation $n^{2x} - 2^y = z^2$ where n is an odd positive integer, are of the following form

$$(n, x, y, z) \in \{(1, d, 0, 0) | d \in \mathbb{Z}, d \geq 0\} \cup \{(e, 0, 0, 0) | e \in \mathbb{Z}, e > 1\} \cup \{(2^{f-2} + 1, 1, f, 2^{f-2} - 1) | f \in \mathbb{Z}, f > 3\} \cup \{(3, 1, 3, 1), (3, 2, 5, 7)\}.$$

Keywords: Diophantine equation, non-negative integer solution

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation) เป็นอีกสมการหนึ่งที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่างๆ ได้ (Dhurga, 2021; Anbuselvi and Sivasankari, 2019; Kaur and Sambhor, 2017) โดยสมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการพหุนาม (Polynomial Equation) ประเภทหนึ่งที่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น และสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบหนึ่งที่มีความสนใจ คือ

$$a^x + b^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2007 Acu (2007) ได้พบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (2, 1, 3)\}$ และในปี ค.ศ. 2011 Suvarnamani *et al.* (2011) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + 7^y = z^2$ และ $4^x + 11^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมา Chotchaisthit (2012) ได้แสดงว่าผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ อยู่ในรูป $(x, p, y, z) \in \{(2, 3, 2, 5)\} \cup \{(r, 2^{r+1} + 1, 1, 2^r + 1) | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(r, 2, 2r + 3, 3 \cdot 2^r) | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ และในปีถัดมา Chotchaisthit (2013) ได้แสดงว่า $(x, y, z) = (3, 0, 3)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 11^y = z^2$ และ Sroysang (2013) ได้พิสูจน์ว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีเพียงสามผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(0, 1, 2), (3, 0, 3), (4, 2, 5)\}$ หลังจากนั้น Tanakan (2014) ได้พบว่า $(x, y, z) = (0, 3, 3)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x + 2^y = z^2$ และ Qi and Li (2015) ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และในปี ค.ศ. 2016 Khan *et al.* (2016) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 9^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (4, 1, 5)\}$ และ Rabago (2016) ได้พบว่า $(x, y, z) \in \{(3, 1, 5), (5, 1, 7), (6, 1, 9), (7, 3, 71), (9, 1, 23)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ นอกจากนี้ Puangjumba (2016) ได้พบว่า $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (1, 1, 7)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 47^y = z^2$ และเมื่อไม่นานมานี้ Burshtein (2018a) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $2^{2x+1} + 7^{2n} = z^2$ เมื่อ x, n เป็นจำนวนเต็มบวก และ z เป็นจำนวนเต็มบวกก็พบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, n, z) = (2, 1, 9)$ และ Burshtein (2018b) ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลงานวิจัยที่ได้ยกตัวอย่างมาข้างต้น สังเกตได้ว่าจะกำหนดให้ a และ b ในสมการ (1) อยู่ในรูป p^k เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น ในงานวิจัยนี้จะขยายผลให้กว้างขึ้น โดยที่ a ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปดังกล่าว นอกจากนี้จะศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบต่างด้วย

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ

วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะเริ่มจากการนำเสนอ 2 ทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของงานวิจัย หลังจากนั้นจะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 1 (Mihalescu, 2004) สมการไดโอแฟนไทน์

$$a^x - b^y = 1 \quad (2)$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ เมื่อ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$

ทฤษฎีบท 2 (Tanakan, 2014) สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 + 2^y = z^2 \quad (3)$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(y, z) = (3, 3)$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$n^{2x} + 2^y = z^2 \quad (4)$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, y, z) \in A \cup B \cup C$

เมื่อ $A = \{(1, a, 3, 3) | a \in \mathbb{Z}, a \geq 0\}$, $B = \{(b, 0, 3, 3) | b \in \mathbb{Z}, b > 1\}$

และ $C = \{(2^{c-2} - 1, 1, c, 2^{c-2} + 1) | c \in \mathbb{Z}, c > 3\}$

พิสูจน์ สมมติว่า x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของ (4) ถ้า $n = 1$ จาก (4) และทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(n, x, y, z) \in A$ และถ้า $x = 0$ จาก (4) และทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(n, x, y, z) \in B$ ดังนั้นเหลือพิจารณากรณีที่ $n > 1$ และ $x > 0$ จาก (4) จะได้ว่า

$$2^y = z^2 - n^{2x} = (z - n^x)(z + n^x) \quad (5)$$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ที่ทำให้

$$z - n^x = 2^u \quad (6)$$

และ

$$z + n^x = 2^{y-u} \quad (7)$$

จาก (6) และ (7) จะได้ว่า $y > 2u$ และ

$$2n^x = 2^u(2^{y-2u} - 1) \quad (8)$$

จาก (8) และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังนั้น $u = 1$ ทำให้

$$2^{y-2} - n^x = 1 \quad (9)$$

จาก (9) จะได้ว่า $y > 2$ และถ้า $y = 3$ จาก (9) จะได้ว่า $n^x = 1$ และจาก $n > 1$ ดังนั้น $x = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $x > 0$ เพราะฉะนั้น $y > 3$ และจาก $n > 1$ ดังนั้น ถ้า $x > 1$ แล้ว $\min\{2, n, y - 2, x\} > 1$ และจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า (9) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $x \leq 1$ และจาก $x > 0$ จะได้ว่า $x = 1$ และจาก (9) ทำให้ $n = 2^{y-2} - 1$ และจาก (6) จะได้ว่า $z = 2^{y-2} + 1$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) \in C$ ■

ทฤษฎีบท 4 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$n^{2x} - 2^y = z^2 \quad (10)$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, y, z) \in D \cup E \cup F \cup G$

เมื่อ $D = \{(1, d, 0, 0) | d \in \mathbb{Z}, d \geq 0\}$, $E = \{(e, 0, 0, 0) | e \in \mathbb{Z}, e > 1\}$

$F = \{(2^{f-2} + 1, 1, f, 2^{f-2} - 1) | f \in \mathbb{Z}, f > 3\}$ และ $G = \{(3, 1, 3, 1), (3, 2, 5, 7)\}$

พิสูจน์ สมมติว่า x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของ (10) ถ้า $n = 1$ จาก (10) จะได้ว่า $y = z = 0$ ดังนั้น $(n, x, y, z) \in D$ และถ้า $x = 0$ จาก (10) จะได้ว่า $y = z = 0$ ดังนั้น $(n, x, y, z) \in E$ เพราะฉะนั้นเหลือพิจารณากรณีที่ $n > 1$ และ $x > 0$ จาก (10) จะได้ว่า

$$2^y = n^{2x} - z^2 = (n^x - z)(n^x + z) \quad (11)$$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ที่ทำให้

$$n^x - z = 2^v \quad (12)$$

และ

$$n^x + z = 2^{y-v} \quad (13)$$

จาก (12) และ (13) จะได้ว่า $y > 2v$ และ

$$2n^x = 2^v(2^{y-2v} + 1) \quad (14)$$

จาก (14) และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังนั้น $v = 1$ ทำให้

$$n^x - 2^{y-2} = 1 \quad (15)$$

จาก (15) จะได้ว่า $y > 2$ และถ้า $y = 3$ จาก (15) จะได้ว่า $n^x = 3$ ดังนั้น $n = 3$ และ $x = 1$ และจาก (12) จะได้ว่า $z = 1$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) \in G$ ต่อไปจะพิจารณากรณีที่ $y > 3$ ถ้า $x = 1$ จาก (15) จะได้ว่า $n = 2^{y-2} + 1$ และจาก (12) จะได้ว่า $z = 2^{y-2} - 1$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) \in F$ และถ้า $x > 1$ จาก $y > 3$, $n > 1$ และ (15) ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $n = 3$, $x = 2$, $y = 5$ และจาก (12) จะได้ว่า $z = 7$ ดังนั้น $(n, x, y, z) \in G$ ■

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังปรากฏในทฤษฎีบท 3 และ 4 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่า n ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูป p^k เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจึงเป็นการขยายผลงานวิจัยก่อนหน้านี้ให้กว้างขึ้น และสิ่งที่น่าสนใจต่อไปคือการหาผลเฉลยของสองสมการดังกล่าวในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และที่น่าสนใจยิ่งไปกว่านั้น คือ การหาแสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x + 2^y = z^2$ และ $n^x - 2^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- Acu, D. (2007). On a Diophantine equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics*, 15(4), 145-148.
- Anbuselvi, R. and Sivasankari, J. (2019). Applications of Diophantine equations in chemical equations. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, 6(6), 371-373.
- Burshtein, N. (2018a). On the Diophantine equation $2^{2x+1} + 7^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16(1), 177-179. doi: 10.22457/apam.v16n1a19
- Burshtein, N. (2018b). Solutions of the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$ when p is prime. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16(2), 471-477. doi: 10.22457/apam.v16n2a25
- Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. *American Jr. of Mathematics and Sciences*, 1(1), 191-193.
- Chotchaisthit, S. (2013). On the Diophantine equation $2^x + 11^y = z^2$. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 7(2), 291-293.
- Dhurga, C.K. (2021). A linear Diophantine equation and its real life applications. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 20(8), 1389-1394.
- Kaur, D. and Sambhor, M. (2017). Diophantine equations and its applications in real life. *International Journal of Mathematics and its applications*, 5(2), 217-222.
- Khan, M.A.A., Rashid, A. and Uddin, M.S. (2016). Non-negative integer solutions of two Diophantine equations $2^x + 9^y = z^2$ and $5^x + 9^y = z^2$. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4, 762-765. doi: 10.4236/jamp.2016.44086
- Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewante Mathematik*, 27, 167-195.
- Puangjumpa, P. (2016). Possible solution of the Diophantine equation $2^x + 47^y = z^2$. *Academic Journal URU*, 11(35), 36-42.
- Qi, L. and Li, X. (2015). The Diophantine equation $8^x + p^y = z^2$. *The Scientific World Journal*, Article ID 306590, 3 pages. doi: 10.1155/2015/306590
- Rabago, J.F.T. (2016). On the Diophantine equation $2^x + 17^y = z^2$. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 22(2), 177-181.
- Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine equation $2^x + 3^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84(2), 133-137. doi: 10.12732/ijpam.v84i2.11
- Suvarnamani, A., Singta, A. and Chotchaisthit, S. (2011). On two Diophantine equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. *Science and Technology RMUTT Journal*, 1(1), 25-28.
- Tanakan, S. (2014). On the Diophantine equation $19^x + 2^y = z^2$. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 9(4), 159-162. doi: 10.12988/ijcms.2014.418