P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 30 ฉบับที่ 3 (พฤษภาคม-มิถุนายน 2565) หน้า [21-32]

การวางนัยทั่วไปของพหุนามฟีโบนักชีและพหุนามลูคัส

New Generalizations of Fibonacci and Lucas Polynomials

ปุณชญา พัฒนางกูร*, ชลธิชา ชินสะอาด, วิศินี งามศรีวิเศษ, ทอฝัน แววกระโทก

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Chonticha Chinsaard, Wisinee Ngamsriwiset, Thofun Waewkrathok

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 7 February 2022; Received in revised 6 May 2022; Accepted 17 May 2022

บทคัดย่อ

พหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ ซึ่งนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $f_n(x)=2axf_{n-1}(x)+(b-a^2)f_{n-2}(x)$ สำหรับ $n\geq 2$ และ $l_n(x)=2axl_{n-1}(x)+(b-a^2)l_{n-2}(x)$ สำหรับ $n\geq 2$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $f_0(x)=0, f_1(x)=1$ และ $l_0(x)=2,\ l_1(x)=2ax$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ เป็นพหุนามที่เป็นการวางนัยทั่วไปของพหุนามฟีโบนักชีและพหุนามลูคัส ซึ่งจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรของบิเน็ท และเอกลักษณ์บางแบบสำหรับสองพหุนามดังกล่าว

คำสำคัญ: พหุนามฟีโบนักชี; พหุนามลูคัส; ฟังก์ชันก่อกำเนิด; สูตรของบิเน็ท

Abstract

We consider the polynomials $f_n(x)$ and $l_n(x)$ which are generated by the recurrence relations $f_n(x)=2axf_{n-1}(x)+(b-a^2)f_{n-2}(x)$ for $n\geq 2$ and $l_n(x)=2axl_{n-1}(x)+(b-a^2)l_{n-2}(x)$ for $n\geq 2$ with the initial conditions $f_0(x)=0, f_1(x)=1$ and $l_0(x)=2,\ l_1(x)=2ax$ where a and b are any non-zero real numbers. We obtain the new generalizations of Fibonacci and Lucas polynomials. Moreover, we acquire generating functions, Binet's formulas, and some identities involving $f_n(x)$ and $l_n(x)$.

Keywords: Fibonacci polynomial; Lucas polynomial; Generating function; Binet's formula

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th **doi:**

1. บทนำ

พหุนามต่างๆ ที่เป็นที่รู้จักกันดี เช่น พหุนามฟีโบนักชี พหุนามลูคัส พหุนามเพลล์ พหุนามเพลล์ - ลูคัส พหุนามจาคอบส์ทอล และพหุนามจาคอบส์ทอล – ลูคัส เป็นต้น เป็นพหุนามที่ถูกนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดทั้งสิ้น ซึ่งมีผู้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามดังกล่าวและเกิดผลงานวิจัยอย่างต่อเนื่อง โดยเมื่อปี ค.ศ.1833 E. C. Catalan นักคณิตศาสตร์ชาวเบลเยี่ยมได้ให้บทนิยามและศึกษาสมบัติของพหุนามฟีโบนักชี $F_n(x)$ และในปี ค.ศ. 1957 E. Jacobsthal [5] นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันได้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามจาคอบส์ทอล $J_n(x)$ และพหุนามจาคอบส์ทอล – ลูคัส $K_n(x)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 1970 M. Bicknell [1] ได้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามลูคัส $L_n(x)$ และเมื่อปี ค.ศ. 1983 A. F. Horadam และ Bro. J. M. Mahon [4] ได้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเพลล์ $P_n(x)$ และพหุนามเพลล์ – ลูคัส $Q_n(x)$ โดยความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับและพหุนามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ชื่อ	ลำดับ	พหุนาม
ฟีโบนักชี (Fibonacci)	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$	$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $F_0(x) = 0$ และ $F_1(x) = 1$
ลูคัส (Lucas)	$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$	$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $L_0(x) = 2$ และ $L_1(x) = x$
เพลล์ (Pell)	$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $P_0 = 0$ และ $P_1 = 1$	$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $P_0(x) = 0$ และ $P_1(x) = 1$
เพลล์ – ลูคัส (Pell-Lucas)	$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $Q_0 = 2$ และ $Q_1 = 2$	$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $Q_0(x) = 2$ และ $Q_1(x) = 2x$
จาคอบส์ทอล (Jacobsthal)	$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $J_0 = 0$ และ $J_1 = 1$	$J_n(x) = xJ_{n-1}(x) + 2J_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $J_0(x) = 0$ และ $J_1(x) = 1$
จาคอบส์ทอล – ลูคัส (Jacobsthal–Lucas)	$K_n = K_{n-1} + 2K_{n-2}$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $K_0 = 2$ และ $K_1 = 1$	$K_n(x) = xK_{n-1}(x) + 2K_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \ge 2$ โดยที่ $K_0(x) = 2$ และ $K_1(x) = x$

ต่อมาเมื่อปี ค.ศ. 2014 G. Bilgici [2] ได้ตีพิมพ์ผลงานวิจัยเรื่องการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส (New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequence) ซึ่งในผลงานวิจัยดังกล่าวได้ให้บทนิยามของลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ ดังต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 1.1</u> กำหนดให้ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$f_n = 2a\,f_{n-1} + \left(b - a^2\right) f_{n-2} \quad \text{สำหรับทุก} \quad n \ge 2 \quad \text{โดยที่} \quad f_0 = 0,\ f_1 = 1$$

และ

$$l_n = 2a\,l_{n-1} + \left(b - a^2\right) l_{n-2} \quad \text{สำหรับทุก} \quad n \ge 2 \quad \text{โดยที่} \quad l_0 = 2,\ l_1 = 2a$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

จากการศึกษาผลงานวิจัยของ G. Bilgici ดังกล่าว ทำให้ทราบว่าลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ ดังบทนิยาม 1.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับต่างๆ เช่น เมื่อ $a=\frac{1}{2}$ และ $b=\frac{5}{4}$ แล้วจะได้ลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส เมื่อ $a=\frac{1}{2}$ และ $b=\frac{9}{4}$ แล้วจะได้ลำดับจาคอบส์ทอลและลำดับจาคอบส์ทอล – ลูคัส และเมื่อ $a=1$ และ $b=2$ จะได้ลำดับเพลล์และลำดับเพลล์ – ลูคัส เป็นต้น ดังนั้นงานวิจัยฉบับนี้จึงจะทำการศึกษาการวางนัยทั่วไปของพหุนามต่างๆ ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น โดยได้ให้บทนิยามของพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ ดังต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 1.2</u> กำหนดให้ $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ เป็นพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$f_n(x)=2ax\,f_{n-1}(x)+(b-a^2)f_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n\ge 2$ โดยที่ $f_0(x)=0,\ f_1(x)=1$

และ $l_n(x)=2ax\,l_{n-1}(x)+(b-a^2)\,l_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n\ge 2$ โดยที่ $l_0(x)=2,\ l_1(x)=2ax$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

จะเห็นว่าถ้ากำหนดให้ $x=1$ ลงในบทนิยาม 1.2 แล้วจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดดังบทนิยาม 1.1 ข้างต้น

2. ฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating Function)

จะเห็นว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดของพหุนามฟีโบนักชี $F_n(x)$ และพหุนามลูคัส $L_n(x)$ คือ

$$G(F_n(x))(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)t^n=\frac{t}{1-t(x+t)}=\frac{t}{1-(t^1x^1+t^2x^0)}=\frac{t}{1-xt-t^2}$$

และ
$$G(L_n(x))(t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n=\frac{t}{1-t(x+t)}=\frac{2-xt}{1-(t^1x^1+t^2x^0)}=\frac{2-xt}{1-xt-t^2}$$
ตามลำดับ

ในหัวข้อนี้จึงจะศึกษาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $L_n(x)$

<u>ทฤษฎีบท 2.1</u> ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n=\frac{t}{1-2axt-(b-a^2)t^2} \tag{1}$$

และ
$$\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^n=\frac{2-2axt}{1-2axt-(b-a^2)t^2} \tag{2}$$

ตามลำดับ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(x,t)$ และ $l(x,t)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ ตามลำดับ

จะได้ว่า $f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n$ และ $l(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^n$

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ เนื่องจาก

$$\left(1-2axt-\left(b-a^2\right)t^2\right)f(x,t)$$
$$=\left(1-2axt-\left(b-a^2\right)t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n-2ax\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^{n+1}-\left(b-a^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^{n+2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n-2ax\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}(x)t^n-\left(b-a^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}f_{n-2}(x)t^n$$
$$=\left(f_0(x)t^0+f_1(x)t^1+\sum_{n=2}^{\infty}f_n(x)t^n\right)-\left(2axf_0(x)t^1+2ax\sum_{n=2}^{\infty}f_{n-1}(x)t^n\right)-\left(b-a^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}f_{n-2}(x)t^n$$
$$=t+\sum_{n=2}^{\infty}\left(f_n(x)-2axf_{n-1}(x)-\left(b-a^2\right)f_{n-2}(x)\right)t^n$$
$$=t+\sum_{n=2}^{\infty}\left(f_n(x)-\left(2axf_{n-1}(x)+\left(b-a^2\right)f_{n-2}(x)\right)\right)t^n=t+\sum_{n=2}^{\infty}\left(f_n(x)-f_n(x)\right)t^n=t$$

ดังนั้น $$f(x,t)=\frac{t}{1-2axt-\left(b-a^2\right)t^2}$$

และเนื่องจาก

$$\left(1-2axt-\left(b-a^2\right)t^2\right)l(x,t)$$
$$=\left(1-2axt-\left(b-a^2\right)t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^n-2ax\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^{n+1}-\left(b-a^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^{n+2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}l_n(x)t^n-2ax\sum_{n=1}^{\infty}l_{n-1}(x)t^n-\left(b-a^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}l_{n-2}(x)t^n$$
$$=\left(l_0(x)t^0+l_1(x)t^1+\sum_{n=2}^{\infty}l_n(x)t^n\right)-\left(2axl_0(x)t^1+2ax\sum_{n=2}^{\infty}l_{n-1}(x)t^n\right)-\left(b-a^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}l_{n-2}(x)t^n$$
$$=2-2axt+\sum_{n=2}^{\infty}\left(l_n(x)-\left(2axl_{n-1}(x)+\left(b-a^2\right)l_{n-2}(x)\right)\right)t^n$$
$$=2-2axt+\sum_{n=2}^{\infty}\left(l_n(x)-l_n(x)\right)t^n=2-2axt$$

ดังนั้น $$l(x,t)=\frac{2-2axt}{1-2axt-\left(b-a^2\right)t^2}$$

3. สูตรของบิเน็ท (Binet's Formulas)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้คือสูตรของบิเน็ทสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้ในการหาพจน์ที่ n ของพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ นั่นเอง

<u>ทฤษฎีบท 3.1</u> สูตรของบิเน็ทสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ คือ

$$f_n(x)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{3}$$

และ

$$l_n(x)=\alpha^n+\beta^n \tag{4}$$

ตามลำดับ เมื่อ $\alpha=ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ และ $\beta=ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ เป็นรากของสมการ $r^2-2axr-\left(b-a^2\right)=0$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ จากบทนิยามของ $f_n(x)$ จะได้ว่า $f_n(x)-2axf_{n-1}(x)-\left(b-a^2\right)f_{n-2}(x)=0$ และจะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2-2axr-\left(b-a^2\right)=0$

ดังนั้น
$$r=\frac{2\,ax\pm\sqrt{4a^2x^2+4b-4a^2}}{2}=ax\pm\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$$

กำหนดให้ $\alpha=ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ และ $\beta=ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ ซึ่งเป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะข้างต้น

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} f_n(x)&=p_1\alpha^n+p_2\beta^n\\ &=p_1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n+p_2\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n \quad \text{สำหรับ } n\geq 0\end{aligned}$$

จาก $f_0(x)=0$ จะได้ $0=p_1+p_2$

จาก $f_1(x)=1$ จะได้
$$1=p_1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)+p_2\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right) \tag{5}$$

เมื่อคูณสมการ $p_1+p_2=0$ ด้วย $ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ จะได้สมการ

$$p_1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)+p_2\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)=0 \tag{6}$$

นำสมการ (5) ลบสมการ (6) จะได้ $\left(-2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)p_2=1$ นั่นคือ $p_2=-\dfrac{1}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}$

จาก $p_1+p_2=0$ จึงได้ว่า $p_1=-p_2=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f_n(x)&=\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}\right)\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}\right)\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n\\ &=\frac{\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n-\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}\end{aligned}$$

นั่นคือ $f_n(x)=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$

ในทำนองเดียวกันจะเห็นว่า $l_n(x)-2axl_{n-1}(x)-(b-a^2)l_{n-2}(x)=0$ และจะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2-2axr-(b-a^2)=0$ ดังนั้น $r=ax\pm\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ จะได้ว่า

กำหนดให้ $\alpha=ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ และ $\beta=ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$

$$l_n(x)=p_1\alpha^n+p_2\beta^n=p_1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n+p_2\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n \quad \text{สำหรับ } n\geq 0$$

จาก $l_0(x)=2$ จะได้ $2=p_1+p_2$

จาก $l_1(x)=2ax$ จะได้ $2ax=p_1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)+p_2\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)$ (7)

เมื่อคูณสมการ $p_1+p_2=2$ ด้วย $ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ จะได้สมการ

$$p_1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)+p_2\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)=2\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right) \quad (8)$$

นำสมการ (8) ลบสมการ (7) จะได้ $p_2\left(2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)=2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$ นั่นคือ $p_2=1$

จาก $p_1+p_2=2$ จึงได้ $p_1=2-p_2=2-1=1$

ดังนั้น $l_n(x)=1\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n+1\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^n$ นั่นคือ $l_n(x)=\alpha^n+\beta^n$

4. เอกลักษณ์บางแบบเกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$

(Some Identities involving $f_n(x)$ and $l_n(x)$)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเอกลักษณ์เกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ บางเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 4.1</u> กำหนดให้ n,m และ r เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่าเอกลักษณ์เกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ มีดังนี้

(i) $f_{-n}(x)=-\dfrac{1}{(a^2-b)^n}f_n(x)$ และ $l_{-n}(x)=\dfrac{1}{(a^2-b)^n}l_n(x)$

(ii) $f_{n+r}(x)f_{n-r}(x)-f_n^2(x)=-(a^2-b)^{n-r}f_r^2(x)$

และ $l_{n+r}(x)l_{n-r}(x)-l_n^2(x)=4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^{n-r}f_r^2(x)$

(iii) $f_m(x)f_{n+1}(x)-f_n(x)f_{m+1}(x)=(a^2-b)^n f_{m-n}(x)$

และ $l_m(x)l_{n+1}(x)-l_n(x)l_{m+1}(x)=-4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^n f_{m-n}(x)$

(iv) $f_n(x)l_m(x)=f_{n+m}(x)+(a^2-b)^m f_{n-m}(x)$

(v) $l_{n+1}(x)-(2a^2x^2+b-a^2)l_{n-1}(x)=4ax(2a^2x^2+b-a^2)f_{n-1}(x)$

และ $l_n(x)-axl_{n-1}(x)=2(2a^2x^2+b-a^2)f_{n-1}(x)$

(vi) $f_{n+1}(x)-(2a^2x^2+b-a^2)f_{n-1}(x)=axl_{n-1}(x)$ และ $f_n(x)-axf_{n-1}(x)=\dfrac{l_{n-1}(x)}{2}$

(vii) $l_n^2(x)=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^2(x)+4(a^2-b)^n$

(viii) $f_n(x)f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{4\left(a^2x^2+b-a^2\right)}\left(l_{2n+1}(x)-2ax(a^2-b)^n\right)$

และ $l_n(x)l_{n+1}(x)=l_{2n+1}(x)+2ax(a^2-b)^n$

(ix) $l_{2n}(x)=\dfrac{1}{2}\left(l_n^{\,2}(x)+4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^{\,2}(x)\right)$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

พิสูจน์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ การพิสูจน์จะอาศัยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) ดังนี้

(i) จากสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$f_{-n}(x)=\frac{\alpha^{(-n)}-\beta^{(-n)}}{\alpha-\beta}=\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)=\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\beta^n-\alpha^n}{\alpha^n\beta^n}\right)=\left(\frac{1}{(\alpha\beta)^n}\right)\left(\frac{-\left(\alpha^n-\beta^n\right)}{\alpha-\beta}\right)$$

เนื่องจาก $\alpha\beta=\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)=a^2x^2-\left(a^2x^2+b-a^2\right)=a^2-b$

จึงได้ว่า $f_{-n}(x)=-\dfrac{1}{\left(a^2-b\right)^n}\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)$ ดังนั้น $f_{-n}(x)=-\dfrac{1}{\left(a^2-b\right)^n}f_n(x)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$l_{-n}(x)=\alpha^{-n}+\beta^{-n}=\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}=\frac{\beta^n+\alpha^n}{\alpha^n\beta^n}$$

ดังนั้น $l_{-n}(x)=\dfrac{1}{\left(a^2-b\right)^n}\left(\alpha^n+\beta^n\right)$ นั่นคือ $l_{-n}(x)=\dfrac{1}{\left(a^2-b\right)^n}l_n(x)$

(ii) อาศัยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f_{n+r}(x)f_{n-r}(x)-f_n^2(x)&=\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2\\&=\frac{-(\alpha\beta)^{n-r}\left(\alpha^{2r}-2\alpha^r\beta^r+\beta^{2r}\right)}{(\alpha-\beta)^2}=-(\alpha\beta)^{n-r}\frac{\left(\alpha^r-\beta^r\right)^2}{(\alpha-\beta)^2}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\alpha\beta=a^2-b$ ดังนั้น $f_{n+r}(x)f_{n-r}(x)-f_n^2(x)=-\left(a^2-b\right)^{n-r}f_r^2(x)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}l_{n+r}(x)l_{n-r}(x)-l_n^2(x)&=\left(\alpha^{n+r}+\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^{n-r}+\beta^{n-r}\right)-\left(\alpha^n+\beta^n\right)^2\\&=(\alpha\beta)^{n-r}\left(\alpha^r-\beta^r\right)^2\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2=(\alpha\beta)^{n-r}(\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\alpha\beta=a^2-b$ และ $\alpha-\beta=2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}$

ดังนั้น $l_{n+r}(x)l_{n-r}(x)-l_n^2(x)=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\left(a^2-b\right)^{n-r}f_r^2(x)$

(iii) อาศัยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$f_m(x)f_{n+1}(x)-f_n(x)f_{m+1}(x)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\left(\alpha^m-\beta^m\right)\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n-\beta^n\right)\left(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}\right)\right)$$

$$=\frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{m-n+1}-\alpha^{m-n}\beta+\beta^{m-n+1}-\alpha\beta^{m-n}\right)$$

$$=\frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left((\alpha-\beta)\alpha^{m-n}-(\alpha-\beta)\beta^{m-n}\right)=\frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)}\left(\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}\right)$$

$$=(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\right)=\left(a^2-b\right)^n f_{m-n}(x)$$

และ $l_m(x)l_{n+1}(x)-l_n(x)l_{m+1}(x)$

$$=\left(\alpha^m+\beta^m\right)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n+\beta^n\right)\left(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}\right)$$

$$=-\alpha^m\beta^n(\alpha-\beta)+\alpha^n\beta^m(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)\left(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n\right)$$

$$=-(\alpha-\beta)^2(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\right)=-4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\left(a^2-b\right)^n f_{m-n}(x)$$

(iv) โดยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$f_n(x)l_m(x)=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^m+\beta^m\right)=\frac{\alpha^{n+m}+\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n-\beta^{n+m}}{\alpha-\beta}$$

$$=\left(\frac{\alpha^{n+m}-\beta^{n+m}}{\alpha-\beta}\right)+(\alpha\beta)^m\left(\frac{\alpha^{n-m}-\beta^{n-m}}{\alpha-\beta}\right)=f_{n+m}(x)+\left(a^2-b\right)^m f_{n-m}(x)$$

(v) โดยสูตรของบิเน็ท (4) จะได้ว่า

$$l_{n-1}(x)+l_{n+1}(x)$$

$$=\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)+\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)=\left(\alpha^{n-1}+\alpha^{n+1}\right)+\left(\beta^{n-1}+\beta^{n+1}\right)=\alpha^{n-1}\left(1+\alpha^2\right)+\beta^{n-1}\left(1+\beta^2\right)$$

$$=\alpha^{n-1}\left(1+\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^2\right)+\beta^{n-1}\left(1+\left(ax-\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)^2\right)$$

$$=\left(1+2a^2x^2+b-a^2\right)\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)+\left(2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)\left(2ax\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\left(2a^2x^2+b-a^2+1\right)l_{n-1}(x)+4ax\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_{n-1}(x)$$

ดังนั้น $l_{n+1}(x)-\left(2a^2x^2+b-a^2\right)l_{n-1}(x)=4ax\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_{n-1}(x)$

เนื่องจาก $l_n(x)=2axl_{n-1}(x)+\left(b-a^2\right)l_{n-2}(x)$ จะได้

$$l_{n+1}(x)-\left(2a^2x^2+b-a^2\right)l_{n-1}(x)=\left(2axl_n(x)+\left(b-a^2\right)l_{n-1}(x)\right)-\left(2a^2x^2+b-a^2\right)l_{n-1}(x)$$

$$4ax\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_{n-1}(x)=2ax\left(l_n(x)-axl_{n-1}(x)\right)$$

$$2\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_{n-1}(x)=l_n(x)-axl_{n-1}(x)$$

(vi) โดยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&f_{n-1}(x)+f_{n+1}(x)\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n-1}(1+\alpha^2)-\beta^{n-1}(1+\beta^2)\right)\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\left(2a^2x^2+b-a^2+1\right)\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)\\ +2ax\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)\end{pmatrix}\\
&=\frac{\left(2a^2x^2+b-a^2+1\right)\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)}{\alpha-\beta}+\frac{2ax\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)}{\alpha-\beta}\\
&=\left(2a^2x^2+b-a^2+1\right)f_{n-1}(x)+\frac{2ax\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{n+1}(x)-\left(2a^2x^2+b-a^2\right)f_{n-1}(x)=ax\,l_{n-1}(x)$

และเนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
f_{n-1}(x)+f_n(x)&=\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}+\alpha^n-\beta^n\right)\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\left((\alpha^{n-1}+\alpha^n)-(\beta^{n-1}+\beta^n)\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n-1}(1+\alpha)-\beta^{n-1}(1+\beta)\right)\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\left((1+ax)(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\,(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\right)\\
&=\frac{(1+ax)(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}+\frac{\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\,(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}\\
&=\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)+ax\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)+\frac{\sqrt{a^2x^2+b-a^2}\,(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})}{2\sqrt{a^2x^2+b-a^2}}
\end{aligned}
$$

จึงได้ว่า $f_{n-1}(x)+f_n(x)=f_{n-1}(x)+ax\,f_{n-1}(x)+\dfrac{l_{n-1}(x)}{2}$ ดังนั้น $f_n(x)-ax\,f_{n-1}(x)=\dfrac{l_{n-1}(x)}{2}$

(vii) โดยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^2(x)+4(a^2-b)^n\\
&=\frac{4\left(a^2x^2+b-a^2\right)}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^n-\beta^n)^2+4(\alpha\beta)^n\\
&=\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}+4\alpha^n\beta^n=\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}=(\alpha^n+\beta^n)^2=l_n^2(x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $l_n^2(x)=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^2(x)+4(a^2-b)^n$

(viii) โดยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$
f_n(x)f_{n+1}(x)=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left((\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1})-(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta)\right)
$$

$$=\frac{1}{4\left(a^2x^2+b-a^2\right)}\left(l_{2n+1}\left(x\right)-2ax(a^2-b)^n\right)$$

และ $$l_n\left(x\right)l_{n+1}\left(x\right)=\left(\alpha^n+\beta^n\right)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)=\alpha^{2n+1}+(\alpha^n\beta^n)(\alpha+\beta)+\beta^{2n+1}$$
$$=(\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1})+(\alpha+\beta)(\alpha\beta)^n=l_{2n+1}\left(x\right)+2ax(a^2-b)^n$$

(ix) โดยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\left(l_n^{\,2}\left(x\right)+4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^{\,2}\left(x\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^{\,2}\left(x\right)+4\left(a^2-b\right)^n+4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^{\,2}\left(x\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(8\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n^{\,2}\left(x\right)+4\left(a^2-b\right)^n\right)=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2+2\left(\alpha\beta\right)^n$$
$$=\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}+2\left(\alpha\beta\right)^n=\alpha^{2n}+\beta^{2n}=l_{2n}\left(x\right)$$

จากทฤษฎีบท 4.1 ทำให้ได้สมบัติของพหุนาม $f_n\left(x\right)$ และ $l_n\left(x\right)$ เพิ่มเติมดังบทแทรกต่อไปนี้

<u>**บทแทรก 4.2**</u> กำหนดให้ n, m และ r เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่า

(i) $f_{n+1}\left(x\right)f_{n-1}\left(x\right)-f_n^2\left(x\right)=-\left(a^2-b\right)^{n-1}$

และ $l_{n+1}\left(x\right)l_{n-1}\left(x\right)-l_n^2\left(x\right)=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\left(a^2-b\right)^{n-1}$

(ii) $f_{n-2}\left(x\right)f_{n-1}\left(x\right)f_{n+1}\left(x\right)f_{n+2}\left(x\right)-f_n^4\left(x\right)$
$$=f_n^2\left(x\right)(a^2-b)^{n-2}\left(-a^2\left(4x^2+1\right)+b\right)+(4a^2x^2)(a^2-b)^{2n-3}$$

และ $l_{n-2}\left(x\right)l_{n-1}\left(x\right)l_{n+1}\left(x\right)l_{n+2}\left(x\right)-l_n^4\left(x\right)$
$$=l_n^2\left(x\right)(a^2-b)^{n-2}\left(\left(16a^4x^4+16a^2x^2b-16a^4x^2\right)+\left(4a^2x^2+4b-4a^2\right)(a^2-b)\right)$$
$$+64\left(a^2x^2\right)\left(a^2x^2+b-a^2\right)^2(a^2-b)^{2n-3}$$

(iii) $f_{m+n}\left(x\right)=f_{m+1}\left(x\right)f_n\left(x\right)-\left(a^2-b\right)f_m\left(x\right)f_{n-1}\left(x\right)$

และ $-4(a^2x^2+b-a^2)f_{m+n}\left(x\right)=l_{m+1}\left(x\right)l_n\left(x\right)-\left(a^2-b\right)l_m\left(x\right)l_{n-1}\left(x\right)$

(iv) $f_n\left(x\right)l_n\left(x\right)=f_{2n}\left(x\right)$

(v) $4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n\left(x\right)f_{n+1}\left(x\right)+l_n\left(x\right)l_{n+1}\left(x\right)=2l_{2n+1}\left(x\right)$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

<u>พิสูจน์</u>

(i) เนื่องจาก $f_1\left(x\right)=1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.1 (ii) จึงได้ว่า ถ้า $r=1$ แล้ว

$f_{n+1}\left(x\right)f_{n-1}\left(x\right)-f_n^2\left(x\right)=-\left(a^2-b\right)^{n-1}$ และ $l_{n+1}\left(x\right)l_{n-1}\left(x\right)-l_n^2\left(x\right)=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\left(a^2-b\right)^{n-1}$

(ii) สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ r อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (ii) ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
& f_{n-2}(x) f_{n-1}(x) f_{n+1}(x) f_{n+2}(x)-f_n^4(x) \\
&\quad =\left(f_{n+2}(x) f_{n-2}(x)-f_n^2(x)\right)\left(f_{n+1}(x) f_{n-1}(x)-f_n^2(x)\right) \\
&\qquad + f_{n+2}(x) f_{n-2}(x) f_n^2(x)+f_{n+1}(x) f_{n-1}(x) f_n^2(x)-2 f_n^4(x) \\
&\quad =\left(-(a^2-b)^{n-2} f_2^2(x)\right)\left(-(a^2-b)^{n-1} f_1^2(x)\right) \\
&\qquad + f_n^2(x)\left(f_{n+2}(x) f_{n-2}(x)-f_n^2(x)\right)+f_n^2(x)\left(f_{n+1}(x) f_{n-1}(x)-f_n^2(x)\right) \\
&\quad =(a^2-b)^{2n-3}(4a^2x^2)+f_n^2(x)\left(-4a^2x^2(a^2-b)^{n-2}-(a^2-b)^{n-1}\right) \\
&\quad =(4a^2x^2)(a^2-b)^{2n-3}+f_n^2(x)(a^2-b)^{n-2}\left(-4a^2x^2-(a^2-b)\right) \\
&\quad = f_n^2(x)(a^2-b)^{n-2}\left(-a^2\left(4x^2+1\right)+b\right)+(4a^2x^2)(a^2-b)^{2n-3}
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
& l_{n-2}(x) l_{n-1}(x) l_{n+1}(x) l_{n+2}(x)-l_n^4(x) \\
&\quad =\left(l_{n+2}(x) l_{n-2}(x)-l_n^2(x)\right)\left(l_{n+1}(x) l_{n-1}(x)-l_n^2(x)\right) \\
&\qquad + l_{n+2}(x) l_{n-2}(x) l_n^2(x)+l_{n+1}(x) l_{n-1}(x) l_n^2(x)-2 l_n^4(x) \\
&\quad =\left(4\left(a^2x^2+b-a^2\right)(a^2-b)^{n-2} f_2^2(x)\right)\left(4\left(a^2x^2+b-a^2\right)(a^2-b)^{n-1} f_1^2(x)\right) \\
&\qquad + l_n^2(x)\left(l_{n+2}(x) l_{n-2}(x)-l_n^2(x)\right)+l_n^2(x)\left(l_{n+1}(x) l_{n-1}(x)-l_n^2(x)\right) \\
&\quad =16\left(a^2x^2+b-a^2\right)^2 (a^2-b)^{2n-3}\left(2ax\right)^2\left(1\right)^2+l_n^2(x)\left(4\left(a^2x^2+b-a^2\right)(a^2-b)^{n-2}\left(2ax\right)^2\right) \\
&\qquad + l_n^2(x)\left(4\left(a^2x^2+b-a^2\right)(a^2-b)^{n-1}\left(1\right)^2\right) \\
&\quad = l_n^2(x)(a^2-b)^{n-2}\left(\left(16a^4x^4+16a^2x^2b-16a^4x^2\right)+\left(4a^2x^2+4b-4a^2\right)(a^2-b)\right) \\
&\qquad + 64\left(a^2x^2+b-a^2\right)^2 (a^2-b)^{2n-3}\left(a^2x^2\right)
\end{aligned}
$$

(iii) จากทฤษฎีบท 4.1 (iii) เมื่อแทน n ด้วย $-n$ จะได้ว่า

$$
f_m(x) f_{-n+1}(x)-f_{-n}(x) f_{m+1}(x)=\left(a^2-b\right)^{-n} f_{m+n}(x)=\frac{1}{\left(a^2-b\right)^n} f_{m+n}(x)
$$

อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (i) จึงได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f_{m+n}(x) &= \left(a^2-b\right)^n\left(f_m(x) f_{-(n-1)}(x)-f_{-n}(x) f_{m+1}(x)\right) \\
&= \left(a^2-b\right)^n\left(\left(f_m(x)\frac{-f_{n-1}(x)}{\left(a^2-b\right)^{n-1}}\right)-\left(\frac{-f_n(x)}{\left(a^2-b\right)^n} f_{m+1}(x)\right)\right) \\
&= f_{m+1}(x) f_n(x)-\left(a^2-b\right) f_m(x) f_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

และจากทฤษฎีบท 4.1 (iii) เมื่อแทน n ด้วย $-n$ จะได้ว่า

$$
l_m(x) l_{-n+1}(x)-l_{-n}(x) l_{m+1}(x)=-4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\left(a^2-b\right)^{-n} f_{m+n}(x)=\frac{-4\left(a^2x^2+b-a^2\right)}{\left(a^2-b\right)^n} f_{m+n}(x)
$$

อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (i) จึงได้ว่า

$$
\begin{aligned}
4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_{m+n}(x) &= -\left(a^2-b\right)^n\left(l_m(x)\,l_{-(n-1)}(x)-l_{-n}(x)\,l_{m+1}(x)\right)\\
&= -\left(a^2-b\right)^n\left(\left(l_m(x)\frac{l_{n-1}(x)}{\left(a^2-b\right)^{n-1}}\right)-\left(\frac{l_n(x)}{\left(a^2-b\right)^n}l_{m+1}(x)\right)\right)\\
&= l_{m+1}(x)\,l_n(x)-\left(a^2-b\right)l_m(x)\,l_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

(iv) โดยสูตรของบิเน็ท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$
f_n(x)\,l_n(x)=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right)=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}=f_{2n}(x)
$$

(v) อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (viii) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&4\left(a^2x^2+b-a^2\right)f_n(x)\,f_{n+1}(x)+l_n(x)\,l_{n+1}(x)\\
&\quad=4\left(a^2x^2+b-a^2\right)\frac{1}{4\left(a^2x^2+b-a^2\right)}\left(l_{2n+1}(x)-2ax(a^2-b)^n\right)+\left(l_{2n+1}(x)+2ax(a^2-b)^n\right)\\
&\quad=l_{2n+1}(x)-2ax(a^2-b)^n+l_{2n+1}(x)+2ax(a^2-b)^n=2l_{2n+1}(x)
\end{aligned}
$$

จากทฤษฎีบท 4.1 และบทแทรก 4.2 ทำให้ทราบเอกลักษณ์บางแบบของพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ เท่านั้น ซึ่งอาจจะยังไม่ใช่เอกลักษณ์ทั้งหมดของพหุนามดังกล่าว

5. สรุปผล

งานวิจัยฉบับนี้ได้กำหนดบทนิยามของพหุนาม $f_n(x)$และ $l_n(x)$ ดังบทนิยาม 1.2 ซึ่งเป็นพหุนามที่เป็นการวางนัยทั่วไปของพหุนามฟีโบนักชีและพหุนามลูคัส ซึ่งจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดและสูตรของบิเน็ทสำหรับสองพหุนามดังกล่าว นอกจากนี้ โดยอาศัยสูตรของบิเน็ทจะทำให้ได้บางเอกลักษณ์เกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ อีกด้วย

6. References

[1] Bicknell, M., 1970, A primer for the Fibonacci numbers VII, Fibonacci Quarterly. 8: 407-420.

[2] Bilgici, G., 2014, New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequence, Applied Mathematical Sciences. 8(29): 1429-1437.

[3] Edson, M. and Yayenie, O., 2009, A New Generalization of Fibonacci Sequences and Extended Binet’s Formula, Integers. 9: 639-654.

[4] Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M., 1983, Pell and Pell-Lucas Polynomials, Univerity of New England Armidale. Catholic Collage of Education. Sydney. Australia.

[5] Jacobsthal, E., 1957, Über eine zahlentheoretische Summe, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim. 30: 35-41.