



การขดของเชือกบนพื้นราบหมุน

Rope Coiling on a Rotating Plane

สิรภพ เงินงาม* และ มาริสา เย็นตุรัส

Sirapop Ngoengam* and Marisa Yenturat

สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี 12110

Major field of Physics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Khlong Luang, Pathumthani 12110, THAILAND.

*Corresponding author e-mail: Sirapop_kong801@hotmail.com

ARTICLE INFO

ABSTRACT

Article history:

Received: 31 March, 2022

Revised: 20 May, 2022

Accepted: 6 June, 2022

Available online: 12 June, 2022

DOI: xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Keywords: buckling instability, hypotrochoid, epitrochoid, circle

Feeding the rope steadily with uniform velocity about 67.15 cm/s from the height 105 cm toward the rotating plane creates a variety of coiling shapes, resulted from the buckling instability. Our present work aims to classify all possible coiling patterns on a rotating flat surface, studying the measurement of coiling sizes, the frequency of coiling, which is a function of height, speed of rope feeding and frequency of rotation of the plane. In the experiment, the coiling of a rope on a flat surface in a circular motion and rotating on a flat surface would destroy the symmetry of the circle. The shape occurs sequentially starting from the hypotrochoid, then the epitrochoid and finally to the circle. The hypotrochoid to epitrochoid transition is associated with a reversal of the direction of the angular momentum. The criteria for the epitrochoid to circle transition are an equality between the primary and secondary radii of the epitrochoid, and the number of secondary loops reducing facing inward will continue to decrease until there are no more sub rings facing inward the rope is coiled in a circular pattern. Including factors that determine the form of a new coiling such as, the height of the rope release point, rope feeding speed and the rotation frequency

of the plane. The factors related to the properties of the rope are Young's modulus. This principle of physics can also explain the spiral patterns of viscous liquids on a rotating flat surface. where the elastic force in the case of rope is the viscous force in the case of liquid. Such an understanding is beneficial to the design of 3D printers.

บทคัดย่อ

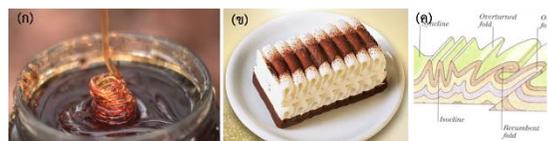
การป้อนเชื้ออย่างสม่ำเสมอด้วยความเร็วคงที่ 67.15 cm/s จากระดับความสูง 105 เซนติเมตรลงสู่พื้นราบหมุน ก่อให้เกิดการขดของเชือกในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งแสดงออกถึงการสูญเสียเสถียรภาพอันเป็นผลจากการโก่งเดาะ (Buckling) โดยงานวิจัยนี้ศึกษารูปแบบการขดเชือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดบนพื้นราบหมุน และศึกษาการวัดขนาดของการขดและความถี่ของการขดเป็นฟังก์ชันกับความถี่การหมุนของระนาบ ซึ่งจากการทดลองพบว่า การขดของเชือกบนพื้นราบหนึ่งจะมีรูปแบบการขดเป็นวงกลม ส่วนการขดบนพื้นราบหมุนจะทำให้ลายสมมาตรของวงกลม ก่อให้เกิดรูปแบบการขดใหม่ ได้แก่ ไฮโปโทรคอยด์ (Hypotrochoid), เอพิโทรคอยด์ (Epitrochoid) และวงกลม (Circle) การเปลี่ยนแปลงของรูปแบบของ ไฮโปโทรคอยด์เป็นเอพิโทรคอยด์มีความเกี่ยวข้องกับ การกลับตัวของทิศทางของโมเมนตัมเชิงมุม เกณฑ์สำหรับการเปลี่ยนผ่านจากเอพิโทรคอยด์เป็นวงกลมคือความเท่าเทียมกันระหว่างรัศมีวงหลักและรัศมีวงรองของรูปแบบเอพิโทรคอยด์ และจำนวนวงย่อยหันเข้าด้านในจะลดลงไปเรื่อย ๆ จนไม่มีวงย่อยหันเข้าด้านในอีกต่อไป เชือกจะขดเป็นรูปแบบวงกลม ปัจจุบันที่กำหนดรูปแบบของการขดใหม่ ได้แก่ ความสูงของจุดปล่อยเชือก, ความเร็วในการป้อนเชือก และความถี่การหมุนของระนาบ ส่วนปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของเชือก ได้แก่ ค่ามอดูลัสยัง (Young's Modulus) หลักการฟิสิกส์ดังกล่าวนี้ยังสามารถอธิบายรูปแบบการขดของของเหลวหนืดบนพื้นราบหมุน โดยแทนแรงยืดหยุ่นในกรณีของเชือกเป็นแรง

หนืดในกรณีของของเหลว ความเข้าใจดังกล่าวเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบเครื่องพิมพ์สามมิติ

คำสำคัญ: การสูญเสียเสถียรภาพแบบโก่งเดาะ ไฮโปโทรคอยด์ เอพิโทรคอยด์ วงกลม

บทนำ

การโก่งของเกลียวและแผ่นของเหลวเกลียวเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในหลาย ๆ สถานการณ์ ตัวอย่างในชีวิตประจำวันมากมาย รวมถึงการขดเกลียวของน้ำผึ้งที่ถูกเทลงบนชิ้นส่วนของขนมปังหรือเจลอาบน้ำที่ขดเกลียวตามที่เทลงบนมือ ในกระบวนการทางอุตสาหกรรมมักเป็นที่พึงปรารถนาในการยับยั้งการโก่งงอของเหลว เช่นระหว่างกระบวนการเติมซึ่งแผ่นที่โค้งงอของผลิตภัณฑ์ ทำให้เกิดอากาศหรือของเหลวรอบข้างซึ่งอาจส่งผลให้คุณภาพของผลิตภัณฑ์ลดลง ในทางกลับกันการโก่งงอของเหลวอาจถูกนำไปใช้ประโยชน์ เช่นเพื่อช่วยในการผลิตขนม เช่น ไอศกรีมเวียนเน็ตต้า หรือในระหว่างการสร้างโฟมและอิมัลชันภายในช่องทางไหลจุลภาค (Microfluidics) และปรากฏการณ์โก่งงอเกิดขึ้นในกระบวนการทางธรณีวิทยา (1) ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การขดที่พบในชีวิตประจำวัน (ก) การขดเกลียวของน้ำผึ้ง (ข) ผลิตภัณฑ์ขนมไอศกรีมเวียนเน็ตต้า (ค) ปรากฏการณ์โก่งงอเกิดขึ้นในกระบวนการทางธรณีวิทยา

การขดเชือกสามารถเข้าใจได้บนพื้นฐานของแท่งยืดหยุ่น เกิดขึ้นหลายบริบท เช่น แบบจำลองดีเอ็นเอ (Deoxy-Ribonucleic Acid, DNA) โพลีเมอร์ และขน (2-4) คุณลักษณะที่เหมือนกันของวัสดุที่แตกต่างกันเหล่านี้ความสามารถในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างต่อเนื่องเพื่อตอบสนองต่อแรงและทอร์ก วัสดุเหล่านี้จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างต่อเนื่องโดยไม่มีขีดจำกัดเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ รูปร่างที่เกิดขึ้นเป็นสถานะที่ให้พลังงานของระบบต่ำสุด โดยการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีลักษณะสำคัญ 3 รูปแบบ คือ การบีบอัด การโค้งงอ และการบิด ซึ่งทั้ง 3 รูปแบบนี้สามารถเกิดขึ้นในเวลาเดียวกัน สำหรับแท่งยืดหยุ่นที่มีเส้นศูนย์กลางน้อยกว่าความยาว การบิดรอบแกนต้องใช้พลังงานมาก หากไม่มีทอร์กภายนอก การอัดและการดัดรอบแกนจะใช้พลังงานน้อยกว่าจึงสามารถเกิดขึ้นได้ง่ายกว่า เมื่อการอัดตามแนวแกนของแท่งยืดหยุ่นมีค่าเกินค่าขีดเริ่มแท่งยืดหยุ่นจะเริ่ม โค้งงอ การโค้งงอนี้จะขึ้นอยู่กับเรขาคณิตและสมบัติยืดหยุ่นของแท่งการโค้งงอที่มากเกินไปจะส่งผลให้แท่งยืดหยุ่นเกิดการสูญเสียสภาพแบบโก่งเดาะ (Buckling Instability) สำหรับระบบมหภาคการสูญเสียสภาพแบบโก่งเดาะเป็นผลทางกลศาสตร์ นอกจากนี้การสูญเสียสภาพแบบโก่งเดาะยังสามารถเกิดขึ้นจากความไม่เข้าใจกันระหว่างเรขาคณิตของรอยพับกับการยึดของแผ่นบาง การปฏิบัติตามแนวกึ่งกลางของวงแหวนจะทำให้แผ่นซึ่งเคียววงตัวในระนาบโค้งงอออกจากระนาบนั้นวงแหวนดังกล่าวจะโค้งงอขึ้นเป็นรูปอานม้าแม้ว่าจะไม่มีแรงภายนอกมากระทำก็ตาม (5)

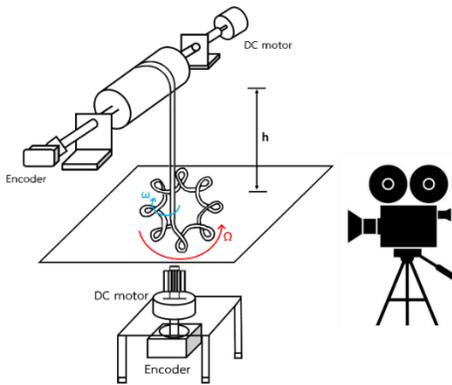
ก่อนหน้านี้นี้มีการศึกษาการก่อตัวของเงื่อน (Knot) เชือกเปรียบได้กับโพลีเมอร์วงปิด การเกิดเงื่อนในสาย โพลีเมอร์มีผลต่อคุณสมบัติทางรีโอโลยี (Rheological Properties) (6) มีการศึกษาเงื่อนโดยบรรจุเชือกยาวในกล่องลูกบาศก์ ทำการหมุนกล่องลูกบาศก์เชือกเกิดการพันกันเกิดเงื่อนหลายประเภท ซึ่งมีการจำแนกประเภทโดยพหุนามโจนส์ (Jones Polynomial) (7) หากมีการใส่เชือกในจานแบนราบ

แทนที่กล่องลูกบาศก์ ระบบจะเป็น 2 มิติแทนที่เป็น 3 มิติ การบิดเบี้ยวของเชือกจึงจำกัดอยู่ในระนาบเดียวเท่านั้น เมื่อจานแบนเกิดการหมุนรูปแบบของเชือกจะจำแนกได้จากรัศมีไจเรชัน (Radius of Gyration) การทดลองที่ดังตามด้วยเครื่องมือที่เรียบง่ายเกิดการสร้างความดันดาลใจให้เราใช้เชือกเป็นแบบจำลองของแท่งกลมยาว เพื่อศึกษาการสูญเสียเสถียรภาพแบบโก่งเดาะจากการทดลองได้มีการศึกษารูปแบบการขดที่เป็นไปได้ทั้งหมดบนพื้นราบหมุน สร้างแผนภาพเฟสเพื่อแสดงว่ารูปแบบการขดจะเป็นเช่นไรเมื่อให้ค่าความสูง, ความเร็วในการป้อนเชือก และความถี่การหมุนของระนาบ ตลอดจนศึกษาการวัดขนาดของการขดและความถี่ของการขดเป็นฟังก์ชันกับความถี่การหมุนของระนาบ

วิธีดำเนินการวิจัย

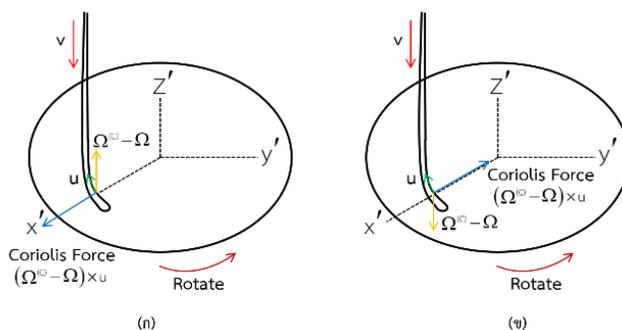
เชือกถูกปล่อยด้วยความเร็ว 67.15 เซนติเมตร/วินาที จากระดับความสูง 105 เซนติเมตร ไปยังระนาบพื้นหมุนดังแสดงในรูปที่ 2 รัศมีหน้าตัด ($2a_0$) = 0.2 เซนติเมตร ให้พื้นที่หน้าตัดขวางเป็นวงกลม $A = 3.14 \times 10^{-2}$ เซนติเมตร² และโมเมนต์ความเฉื่อยของภาคตัดขวาง $I = A^2/2\pi = 1.57 \times 10^{-4}$ เซนติเมตร⁴ ความหนาแน่น = 0.51 กรัม/เซนติเมตร³ และมอดูลัสของยัง $E = 2.43$ เมกะปาสคาล เพื่อปล่อยเชือกให้ราบรีนมอเตอร์กระแสตรงหมุนกระบอกลูกกลิ้งมีรัศมี 6.4 เซนติเมตร รอบเชือกที่พันรอบ วัดความถี่การหมุนของกระบอกสูบโดยออสซิลโลสโคปที่สร้างฟังก์ชัน 500 ฟังก์ชัน/รอบ ด้านล่างของระนาบพื้นราบหมุนถูกหมุนด้วยมอเตอร์กระแสตรงตัวที่สอง ความถี่ในการหมุนของระนาบ f_0 วัดด้วยออสซิลโลสโคปที่สอง ความถี่ตามธรรมชาติของเชือกแขวนอยู่ที่ประมาณ $(1/2\pi)\sqrt{g/h} = 0.45$ Hz ช่วงของ f_0 รวมถึงความถี่ธรรมชาติระนาบพื้นราบหมุนถูกหมุนทวนเข็มนาฬิกาด้วยความเร็วเชิงมุม $\Omega = 2\pi f_0$ ในขณะที่เชือกขดทวนเข็มนาฬิกา

ด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 2\pi f$ โดยที่ f หมายถึง ความถี่การหมุนของเชือก



รูปที่ 2 การจัดอุปกรณ์ในการทดลอง พันเชือกบน ลูกกลิ้งซึ่งหมุนด้วยมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง วัดความถี่การหมุนของลูกกลิ้งด้วยเอ็นโค้ดเดอร์ (Encoder) โดยเชือกเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v จากความสูง h

การขดของเชือกบนพื้นราบนั้นมี 3 ลักษณะ เช่นเดียวกับของเหลวหนืด แตกต่างกันเพียง การขดหนืด กลายเป็นการขดยืดหยุ่น ในกรณีของแข็ง แรงยืดหยุ่น แสดงบทบาทแทนแรงหนืด รูปแบบการขดของเชือกบน



รูปที่ 3 ทิศทางของแรงโคริโอลิสเมื่อ (ก) ความเร็วเชิงมุมน้อยกว่าความเร็วเชิงมุมวิกฤติ (ข) ความเร็วเชิงมุมมากกว่าความเร็วเชิงมุมวิกฤติ

การเกิดรูปแบบการขดของเชือกบนพื้นราบ นั้นเป็นวงกลม การหมุนพื้นราบหนึ่งทำลายสมมาตรของวงกลม ก่อให้เกิดรูปแบบการขดใหม่ ได้แก่ ไฮโปโทรคอยด์ (Hypotrochoid), เอพิโทรคอยด์ (Epitrochoid) และวงกลม (Circle) โดยหากความถี่

พื้นราบเคลื่อนที่เหมือนกับของของเหลวหนืด ดังนั้นแรงที่กระทำต่อเชือก 3 แรงแหลัก ๆ ด้วยกัน ได้แก่ แรงยืดหยุ่น (Elastic force) แรงโน้มถ่วง (Gravity) และแรงเฉื่อย (Inertia) กำหนดให้ F_E คือแรงยืดหยุ่นต่อหนึ่งหน่วยความยาว F_G คือแรงโน้มถ่วงต่อหนึ่งหน่วยความยาว และ F_I คือแรงเฉื่อยต่อหนึ่งหน่วยความยาว (8) ดังสมการที่ 1-3

$$F_E \approx \frac{E(2a_0)^4}{R^3} \tag{1}$$

$$F_G \approx \rho g(2a_0)^2 \tag{2}$$

$$F_I \approx \frac{\rho(2a_0)^2 v^2}{R} \tag{3}$$

หมายเหตุ: ρ (ความหนาแน่น), g (ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก)

ระดับความยาว (length Scale): R หาได้จากแรงยืดหยุ่นต่อหนึ่งหน่วยความยาวเท่ากับแรงโน้มถ่วงต่อหนึ่งหน่วยความยาว มีค่าเท่ากับ 12.5 เซนติเมตร และระดับเวลา (Time Scale) : t หาได้จากแรงโน้มถ่วงต่อหนึ่งหน่วยความยาวเท่ากับแรงเฉื่อยต่อหนึ่งหน่วยความยาว มีค่าเท่ากับ 0.11 วินาที (9, 10)

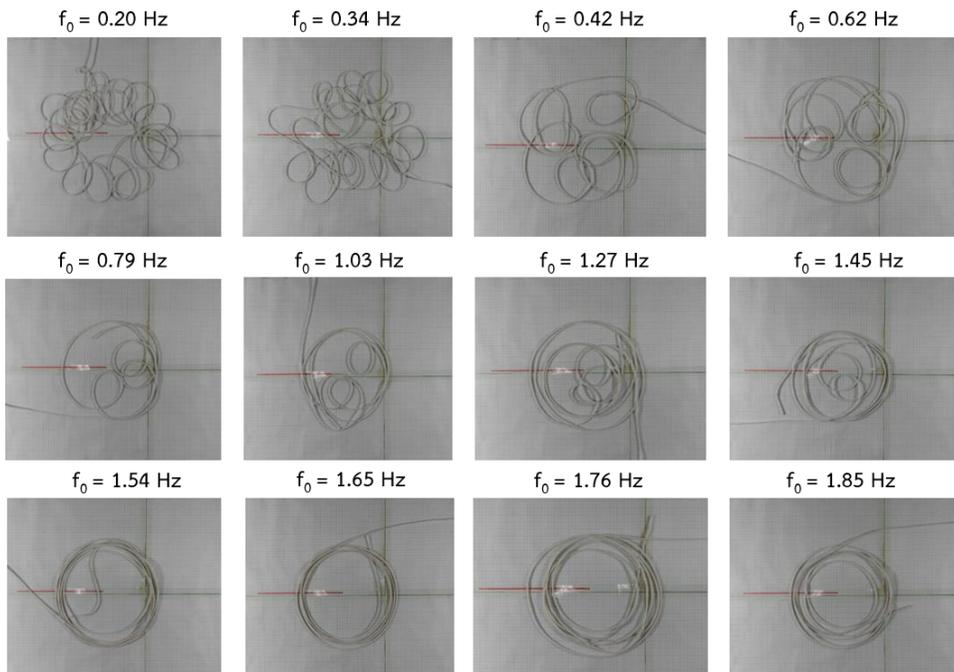
ของพื้นราบหมุนมีค่า $f_0 < f_0^{(c)}$ และมีความเร็วเชิงมุมเป็น $\Omega < \Omega^{(c)}$ เชือกขดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา โดย u คือความเร็วในการขด แรงโคริโอลิส (Coriolis Force) ตามกฎของมือขวามีทิศพุ่งออกจากศูนย์กลาง ดังนั้นเชือกจึงขดออกด้านนอก เกิดเป็นไฮโปโทรคอยด์

(Hypotrochoid) ถ้าหากความถี่ของพื้นราบหมุนมีค่า $f_0 > f_0^{(c)}$ มีความเร็วเชิงมุมเป็น $\Omega > \Omega^{(c)}$ เชือกขดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา โดย u คือความเร็วในการขดแรงโคริโอลิสตามกฎของมือขวามีทิศพุ่งเข้าหาศูนย์กลาง ดังนั้นเชือกจึงขดออกด้านนอกเกิดเป็นเอพิโทรคอยด์ ซึ่ง f_0 คือความถี่ของพื้นราบหมุน, $f_0^{(c)}$ คือความถี่วิกฤตของพื้นราบหมุน, Ω คือความเร็วเชิงมุมของพื้นราบหมุน และ $\Omega^{(c)}$ คือความเร็วเชิงมุมวิกฤตของพื้นราบหมุน แสดงดังรูปที่ 3

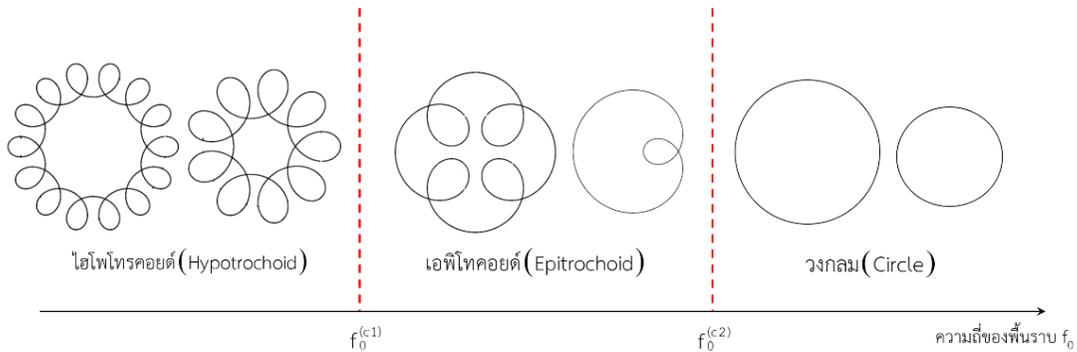
ผลการศึกษาและอภิปรายผล

ป้อนเชือกด้วยความเร็วคงที่ $v = 67.15$ cm/s จากระดับความสูง 105 เซนติเมตร โดยการป้อนความต่างศักย์ 13.2 V มีกระแสไหลผ่าน 1.09 A พื้นราบหมุนทวนเข็มนาฬิกาและเชือกขดลงบนพื้นราบหมุนตามเข็มนาฬิกา และที่มีความเร็วในการป้อนเชือกนี้ หากป้อนเชือกบนพื้นราบนิ่ง เชือกจะขดเป็นวงกลมด้วยความเร็ว $v = 65$ cm/s และความถี่ของการขดคือ 3.077 Hz

จากการทดลองจะเห็นว่ารูปร่างของการขดของเชือกนั้นมีความคล้ายคลึงกับลักษณะของไฮโปโทรคอยด์ และเอพิโทรคอยด์เป็นอย่างมาก ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าการป้อนเชือกด้วยความเร็วที่เร็วกว่าอัตราที่แผ่นระนาบหมุนสามารถถ่ายโอนได้ความยาวที่มากเกินไปจะถูกนำไปใช้ในการสร้างวงย่อยภายนอกที่เส้นรอบวงของวงกลม โดยเรียกว่าเป็นรูปแบบ ไฮโปโทรคอยด์ จะประกอบด้วยวงย่อยภายนอก 15 วงย่อยและ 10 รอบต่อการหมุนที่ $f_0 = 0.20$ Hz และ $f_0 = 0.34$ Hz ตามลำดับการเพิ่ม f_0 เป็น 0.42 Hz จะทำให้ไฮโปโทรคอยด์นั้นไม่คงที่และ เอพิโทรคอยด์จะเกิดการวนซ้ำภายใน 4 วงย่อยและ 1 รอบต่อการหมุน เมื่อ f_0 เพิ่มขึ้นเป็น $f_0 = 1.54$ Hz แผ่นระนาบจะหมุนอย่างรวดเร็วพอที่จะถ่ายโอนความยาวที่เพิ่มขึ้นเพื่อสร้างวงย่อยภายใน โดยเอพิโทรคอยด์จะถูกยึดออกไปตามทิศทางตามแนวเส้นรอบวง เพื่อกำจัดหรือลดวงย่อยภายในทั้งหมด ดังนั้นจึงถูกเปลี่ยนรูปเป็นวงกลมรัศมีของวงกลมนั้นเล็กลงเมื่อ f_0 เพิ่มขึ้นเป็น 1.85 Hz ดังรูปที่ 4



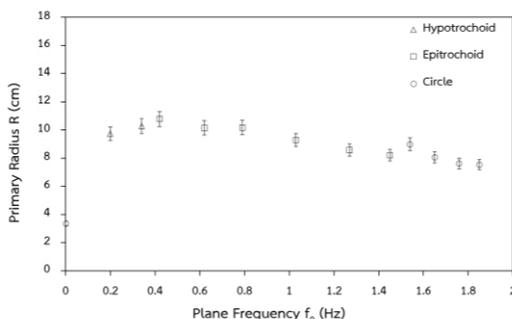
รูปที่ 4 แสดงการขดของเชือกบนพื้นราบหมุนที่ความเร็วในการป้อนเชือกคงที่ 67.15 cm/s จากระดับความสูง 105 cm ลงบนพื้นราบที่หมุนด้วยความถี่ที่เปลี่ยนแปลงไป



รูปที่ 5 รูปแบบการขดเชือกแบบไฮโปโทรคอยด์ (Hypotrochoid), เอพิโทรคอยด์ (Epitrochoid) และวงกลม (Circle) ตามลำดับ

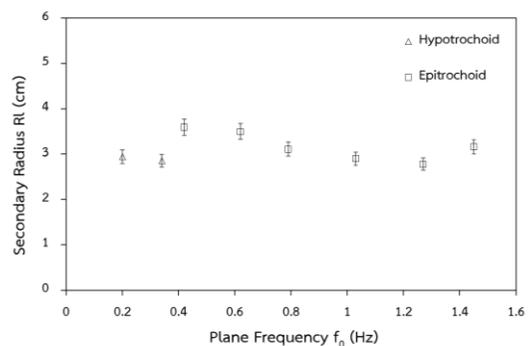
ดังนั้นเมื่อความเร็วในการป้อนเชือก v เร็วพอ เชือกจะขดเป็นรูปแบบ ไฮโปโทรคอยด์บนพื้นราบหมุน เมื่อเพิ่มความถี่การหมุน f_0 ของพื้นราบหมุน จำนวนวงย่อยหันออกด้านนอกของไฮโปโทรคอยด์จะลดลงเมื่อเพิ่มความถี่การหมุน f_0 ไปอีกจนเกินค่าวิกฤติ $f_0^{(c1)}$ เชือกจะขดเป็นรูปแบบ เอพิโทรคอยด์เมื่อเพิ่มความถี่การหมุน f_0 ไปอีกจนเกินค่าวิกฤติ $f_0^{(c2)}$ จำนวนวงย่อยหันเข้าด้านในของเอพิโทรคอยด์จะลดลงไปเรื่อย ๆ จนไม่มีวงย่อยหันเข้าด้านในอีกต่อไป เชือกจะขดเป็นรูปแบบวงกลม ดังรูปที่ 5 กล่าวโดยสรุปได้ว่า เมื่อเพิ่มความถี่การหมุน f_0 ของพื้นราบหมุน ลำดับของรูปแบบที่เกิดขึ้นคือ ไฮโปโทร-คอยด์, เอพิโทรคอยด์ และวงกลม

ความถี่ของพื้นราบ f_0 ไปเรื่อย ๆ รูปแบบการขดเชือกจะมีการเปลี่ยนรูปแบบเป็น ไฮโปโทรคอยด์, เอพิโทรคอยด์ และวงกลม ตามลำดับ ดังนั้นจึงส่งผลให้รัศมีในการขดของเชือกจะมีค่าลดลง เนื่องจากแรงเข้าสู่ศูนย์กลางมีค่ามากขึ้นเมื่อพื้นราบหมุนด้วยความถี่มากขึ้น ในการพิจารณาในครั้งนี้ใช้รัศมีการขดของวงหลัก



รูปที่ 6 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงหลัก (R) กับความถี่ของพื้นราบ (f_0)

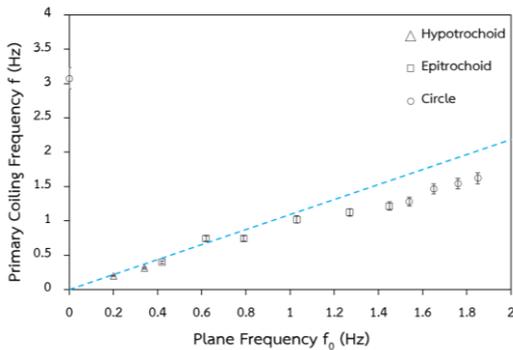
จากการทดลองสามารถเสนอได้โดยกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงหลัก R กับความถี่ของพื้นราบ f_0 ตามรูปที่ 6 จะเห็นได้ว่าเมื่อเราเพิ่ม



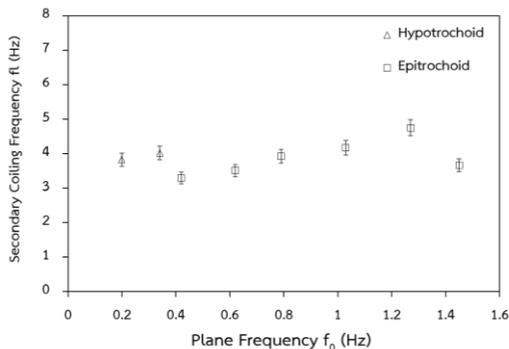
รูปที่ 7 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงรอง (R_t) กับความถี่ของพื้นราบ (f_0)

จากรูปที่ 7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงรอง R_t กับความถี่ของพื้นราบ f_0 จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มความถี่ของพื้นราบ f_0 ไปเรื่อย ๆ รูปแบบการขดเชือกจะมีการเปลี่ยนเป็นรูปแบบ ไฮโปโทรคอยด์ เป็นเอพิโทร-คอยด์ จนเชือกขดเป็นรูปแบบวงกลม ดังนั้นจึงส่งผลให้รัศมีของวงรองของ เอพิโทรคอยด์ใหญ่กว่าของไฮโปโทรคอยด์เพราะจำนวนวงรองของ ไฮโปโทรคอยด์มีมากกว่า ขณะที่รัศมีของวงหลักของ ไฮโปโทรคอยด์มีค่าใกล้เคียงกับของเอพิโทรคอยด์ความยาวเชือกของวง

รองของไฮโปโทรคอยด์ถูกใช้เป็นการยาวเชือกของวงรองของเอพิโทรคอยด์ แต่จำนวนวงรองของเอพิโทรคอยด์มีไม่มากนัก จึงทำให้แต่ละวงรองของเอพิโทรคอยด์มี ขนาดใหญ่ นอกจากนี้หากพิจารณารัศมีวงรองของ เอพิโทรคอยด์พบว่าแนวโน้มมีค่าลดลงเมื่อความถี่พื้นราบเพิ่มขึ้น ที่เป็นเช่นนี้ เพราะพื้นราบหมุนเร็วได้ ถ่ายความยาวเชือกในส่วนของวงรองไปที่อื่นวงรองจึงมีขนาดเล็กลง



รูปที่ 8 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความถี่หลัก (f) กับความถี่ของพื้นราบ (f_0) โดยเส้นประคือกราฟเส้นตรงเมื่อ $f = f_0$



รูปที่ 9 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความถี่วงรอง (f_i) กับความถี่ของพื้นราบ (f_0)

จากรูปที่ 8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ของการขดเชือกวงหลัก f กับความถี่ของพื้นราบ f_0 จะเห็นได้ว่าในบริเวณที่มีความถี่ของพื้นราบ f_0 ต่ำ จะเกิดรูปแบบของการขดเชือกเป็น ไฮโปโทรคอยด์ และเมื่อเพิ่มความถี่ของพื้นราบ f_0 ไปเรื่อย ๆ รูปแบบการขด

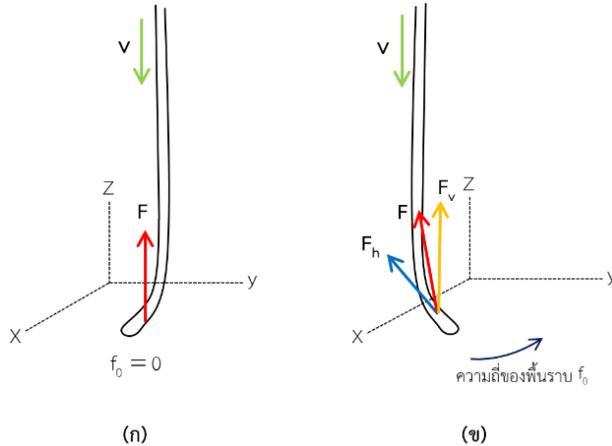
เชือกจะมีการเปลี่ยนเป็นรูปแบบเอพิโทรคอยด์ และวงกลม ตามลำดับ หากเราลากเส้นตรง $f = f_0$ ในรูปที่ 8 แทบจะผ่านทุกจุดข้อมูล ที่ความเร็วในการป้อนเชือก 67.15 cm/s จัดว่าเป็นความเร็วที่มาก ทำให้เชือกแทบจะเคลื่อนที่ติดไปกับพื้นราบหมุน กล่าวคือความถี่ของวงหลัก f มีค่าประมาณความถี่ของพื้นราบ f_0 ฉะนั้นเมื่อพื้นราบหมุนด้วยความถี่ f_0 มากขึ้น เชือกย่อเมฆดด้วยความถี่ f ที่มากขึ้นเช่นกัน

จากรูปที่ 9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ของการขดเชือกวงรอง f_i กับความถี่ของพื้นราบ f_0 จะเห็นได้ว่าในบริเวณที่มีความถี่ของพื้นราบ f_0 ต่ำ จะเกิดรูปแบบของการขดเชือกเป็น ไฮโปโทรคอยด์ (Hypotrochoid) และหากสังเกตดูกราฟความถี่วงรอง f_i ในรูปที่ 9 เป็นการพลิกจากบนลงล่างและล่างขึ้นบนของกราฟรัศมีวงรอง R_i ในรูปที่ 7 โดยจากความสัมพันธ์ $v = 2\pi R_i f_i$ เนื่องจากความเร็วในการป้อนเชือก v เท่ากัน มีผลให้แนวโน้มของความถี่วงรอง f_i จึงตรงข้ามกับของรัศมีวงรอง R_i ตามความสัมพันธ์ $f_i = v/2\pi R_i$ โดยความเร็วในการป้อนเชือกคงที่ เมื่อความถี่วงรองมีค่าลดลง จะส่งผลให้รัศมีวงรองเพิ่มขึ้น ตลอดจนถ้าความถี่วงรองมีค่าเพิ่มขึ้น ก็ส่งผลให้รัศมีวงรองลดลงเช่นกัน

เมื่อพิจารณาในกรณีพื้นราบนิ่ง เมื่อเชือกเคลื่อนที่ลงมาด้วยความเร็วคงที่ v กระทบพื้นแล้วเชือกจะหยุดการเคลื่อนที่ทันที โดยพื้นจะออกแรงกระทำต่อเชือกในแนวตั้งพุ่งขึ้น F เพื่อหยุดการเคลื่อนที่ของเชือก ขณะที่ในพื้นราบหมุน เมื่อเชือกเคลื่อนที่ลงมาด้วยความเร็วคงที่ v เช่นเดียวกัน พอกระทบกับพื้นแล้วเชือกจะมีการปรับความเร็วให้เท่ากับความเร็วตามแนวเส้นรอบวงของพื้นราบหมุน โดยพื้นราบหมุนจะมีการออกแรงกระทำต่อเชือกเพื่อปรับความเร็วดังกล่าว ความเร็วของเชือกก่อนกระทบพื้นราบหมุนมีทิศพุ่งลงด้านล่าง หลังกระทบกับพื้นราบหมุนแล้ว ความเร็วของเชือกจะอยู่ในแนวระนาบเดียวกับพื้นราบและมีทิศ

ตามแนวเส้น รอบวง สามารถหาแรงได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัม $F = \Delta p / \Delta t$ จะเห็นได้ว่าพื้นราบหมุนออกแรงกระทำต่อเชือกในทิศทางที่แรงพุ่งเฉียงขึ้นจากพื้นราบ F จึงมีองค์ประกอบตามแนวตั้งและตามแนวราบ โดยสามารถอธิบายขยายความได้ว่า

องค์ประกอบตามแนวตั้งจะเหมือนกับพื้นราบนิ่งคือทิศพุ่งขึ้น F_v ในรูปที่ 10 ส่วนองค์ประกอบตามแนวราบจะมีการดึงเชือกให้รัศมีวงหลักให้มีขนาดใหญ่ขึ้น F_h จึงเป็นผลทำให้รัศมีวงหลักของพื้นราบนิ่งมีค่าน้อยกว่ารัศมีบนพื้นราบหมุน ในรูปที่ 6



รูปที่ 10 องค์ประกอบของแรงที่กระทำต่อเชือกเมื่อ (ก) พื้นราบนิ่ง (ข) พื้นราบหมุน

จากที่กล่าวข้างต้นเมื่อใช้การอนุรักษ์มวลของเชือก กล่าวคือ $v = 2\pi fR$ เมื่อรัศมี R บนพื้นราบหมุนมีขนาดใหญ่กว่ารัศมีบนพื้นราบนิ่ง ความเร็วในการป้อนเชือก v บนพื้นราบนิ่งและพื้นราบหมุนมีค่าเท่ากัน ย่อมหมายความว่า ความถี่หลัก f บนพื้นราบหมุนมีค่าน้อยกว่าความถี่หลักบนพื้นราบนิ่ง ในรูป 8

สรุปผล

การขดของเชือก คือการรวมตัวกันของความไม่แน่นอนของการโค้งงอ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อมีแรงอัดตามแนวแกนเกินค่าวิกฤติ $F_c = CE/L^2$ โดย C คือค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับประเภทของเงื่อนไขข้อสระทั้งรัศมีการขด R ความถี่การขด f และพื้นราบหมุน f_0 ที่มีแรงที่กระทำต่อเชือกสามแรงหลักด้วยกัน คือแรงยืดหยุ่น (Elastic Force) แรงโน้มถ่วง (Gravity) และแรงเฉื่อย (Inertia) จากการทดลองรูปแบบของการขดของเชือกนั้นมีความคล้ายคลึงกับลักษณะของไฮโพโทรคอยด์ และเอพิโทรคอยด์เป็นอย่างมาก ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าการป้อนเชือก

ด้วยความเร็วที่เร็วกว่าอัตราที่แผ่นระนาบหมุนสามารถถ่ายโอนได้ความยาวที่มากเกินไปจะถูกนำไปใช้ในการสร้างวงย่อยภายนอกที่เส้นรอบวงของวงกลม โดยเรียกว่าเป็นรูปแบบ ไฮโพโทรคอยด์เมื่อ f_0 เพิ่มขึ้นแผ่นระนาบจะหมุนอย่างรวดเร็วพอที่จะถ่ายโอนความยาวที่เพิ่มขึ้นเพื่อสร้างวงย่อยภายในโดยเอพิโทรคอยด์ จะถูกยึดออกไปตามทิศทางตามแนวเส้นรอบวง เพื่อกำจัดหรือลดวงย่อยภายในทั้งหมด ดังนั้นจึงถูกเปลี่ยนรูปเป็นวงกลมจากลักษณะการเกิดรูปแบบของการขดเชือกเมื่อแสดงถึงความความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงหลัก R กับความถี่ของพื้นราบ f_0 มีผลทำให้รัศมีในการขดของเชือกจะมีค่าลดลงเนื่องจากแรงเข้าสู่ศูนย์กลางมีค่ามากขึ้นเมื่อพื้นราบหมุนด้วยความถี่มากขึ้น และเมื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ของการขดเชือกวงหลัก f กับความถี่ของพื้นราบ f_0 จะเห็นได้ว่าในบริเวณที่มีความถี่ของพื้นราบ f_0 ต่ำ มีผลทำให้ความถี่ในการขดเชือก f เพิ่มขึ้น เนื่องจากเมื่อเราป้อนความเร็วในการเชือก 67.15 cm/s จัดว่าเป็นความเร็วที่มาก ทำให้

เชือกแขวนจะเคลื่อนที่ติดไปกับพื้นราบหมุน กล่าวคือ ความถี่ของวงหลัก f มีค่าประมาณความถี่ของพื้นราบ f_0 ฉะนั้นเมื่อพื้นราบหมุนด้วยความถี่ f_0 มากขึ้น เชือกยอมหดด้วยความถี่ f ที่มากขึ้นเช่นกัน หลักการทางฟิสิกส์ซึ่งกำหนดรูปแบบการหดของเชือกบนพื้นราบหมุน เป็นไปได้ว่าหลักการฟิสิกส์ดังกล่าวยังสามารถอธิบายรูปแบบการหดของของเหลวหนืดบนพื้นราบหมุน โดยแทนแรงยึดหยุ่นในกรณีของเชือกเป็นแรงหนืดในกรณีของของเหลว ความเข้าใจดังกล่าวเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบเครื่องพิมพ์สามมิติ ณ ปัจจุบัน การทำงานของเครื่องพิมพ์สามมิติ คือให้หัวฉีดของเหลวเคลื่อนที่ และฐานข้างล่างนิ่งในอนาคตอาจให้ฐานข้างล่างเกิดการเคลื่อนที่หรือการหมุนไปด้วยลักษณะของชิ้นตัวอย่างบนฐานไม่ว่าจะเป็นเช่นไร จำต้องอาศัยการศึกษาอย่างเป็นระเบียบระบบในกรณีที่ย่างที่สุดก่อน คือการหมุน

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิทธิโชค อำนวยพล อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา และข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำโครงการ อีกทั้งยังช่วยแก้ไขปัญหาต่าง ๆ เพื่อการปรับปรุงแก้ไขโครงการพิเศษฉบับนี้ให้เหมาะสม ตลอดจนเป็นผู้อนุญาตให้ใช้ห้องปฏิบัติการดำเนินการวัดและการทดลองตลอดทั้งโครงการนี้รวมถึงให้ความรู้เกี่ยวกับการใช้เครื่องมือ

เอกสารอ้างอิง

1. Blount MJ. Bending and buckling of a falling viscous thread [Doctoral thesis]. Cambridge: Cambridge university. 2010.

2. Travers AA, Thompson JMT. An introduction to the mechanics of DNA. Phil Trans R Soc Lond. 2004;362(1820):1265-79.
3. Singh AR, Giri D, Kumar S. Conformational properties of polymers. Springer-Verlag. 2008; 71(2):283-95.
4. Wolgemuth CW, Powers TR, Goldstein RE. Twirling and whirling: viscous dynamics of rotating elastic filaments. Phys Rev Lett. 2000;87(7):1623-6.
5. Dias MA, Dudte LH, Mahadevan L, Santangelo CD. Geometric Mechanics of Curved Crease Origami. Phys Rev Lett. 2012;109(11):114-301.
6. Kantor Y. Knots in Polymers. Pramana – J Phys. 2005;64(6):1011-7.
7. Raymer DM, Smith DE. The tangled web of self-tying knots. PNAS. 2007;104(44):17243-4.
8. Habibi M, Ribe NM, Bonn D. Coiling of elastic ropes. APS P. 2007;99(15):154-302.
9. Amnuanpol S. Rope coiling. Pramana – J Phys. 2017;89(69):68-78.
10. Amnuanpol S. Shape sequence of rope coiling on a rotating plane. 2019;125:54001.