JSSE Journal of Science & Science Education
https://so04.tci-thaijo.org/index.php/JSSE
วารสารวิทยาศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษา
ปีที่ 5 เล่มที่ 1 (ม.ค. – มิ.ย. 2565) | xx

บทความวิชาการ

วิธีระบุเงื่อนไขเกินของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

รตี โบจรัส[1,*]
[1]สังกัด ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี
**Email: ratee.b@ubu.ac.th*

รับบทความ: 5 พฤศจิกายน 2564 แก้ไขบทความ: 13 ธันวาคม 2564 ยอมรับตีพิมพ์: 24 มกราคม 2565

บทคัดย่อ

กำหนดการเชิงเส้นเป็นวิธีที่สำคัญวิธีหนึ่งในการสร้างตัวแบบเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับการจัดการทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประสิทธิภาพมากที่สุด สำหรับการสร้างตัวแบบเชิงเส้นอาจมีเงื่อนไขบังคับที่เกินความจำเป็น ทำให้ใช้เวลาหาผลเฉลยเหมาะที่สุดมากขึ้นตาม ในบทความนี้นำเสนอผลวิจัยของ Paulraj and Sumathi (2010, 2012) และ Estiningsih *et al*. (2019) ที่เปรียบเทียบวิธีระบุเงื่อนไขเกินรวมทั้งหมด 8 วิธี พบว่าแต่ละวิธีสามารถระบุเงื่อนไขเกินได้โดยใช้ระยะเวลาการคำนวณที่แตกต่างกัน หากเราพบวิธีระบุเงื่อนไขเกินที่ดีที่สุดจะช่วยลดเวลาการคำนวณหาผลเฉลยเหมาะที่สุดได้เร็วขึ้น

คำสำคัญ: กำหนดการเชิงเส้น เงื่อนไขเกิน ผลเฉลยเหมาะที่สุด

Online-first Version

ลิขสิทธิ์โดย คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

Academic Article

Redundant constraints identification methods for linear programming problems

Ratee Bojaras[1,*]

[1] Department of Mathematics Computer and Statistics, Faculty of science, Ubon Ratchathani University

**Email: ratee.b@ubu.ac.th*

Received <5 November 2021>; Revised <13 December 2021>; Accepted <24 January 2022>

Abstract

Linear programming (LP) is one of the most important methods used in modeling and solving to manage the resources effectively. Formulating LP model may include redundant constraints so it takes more time-consuming to achieve the optimal solutions. This paper presents the results of Paulraj and Sumathi (2010, 2012) and Estiningsih *et al*. (2019) which identified the redundant constraints by 8 methods. It reveals that each method can detect redundant constraints with different computational times. The effective method to identify the redundant constraints can reduce time to solve the optimal solutions.

Keywords: Linear programming (LP), redundant constraint, optimal solution

Online-first Version

Copyright by Faculty of Science, Ubon Ratchathani University

Online-first Version

บทนำ

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming: LP) เป็นเครื่องมือหนึ่งในการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization problems) ซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective function) ที่อยู่ในรูปเชิงเส้น (Linear function) และข้อจำกัดหรือเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น (Linear equality or linear inequality) โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ภายใต้ข้อจำกัด ปัญหาทั่วไปที่เกี่ยวกับอุตสาหกรรม การขนส่ง การจัดการทรัพยากร มักจะใช้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุด (Optimal solution) เพราะช่วยหาจำนวนการผลิตสินค้าให้ได้กำไรมากที่สุดภายใต้วัตถุดิบที่มีอย่างจำกัด หรือเป็นตัวช่วยในการตัดสินใจภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด ได้ดี วิธีแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีหลายวิธี เช่น วิธีกราฟ (Graphical method) วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) และวิธีจุดภายใน (Interior point method) แต่วิธีที่นิยมมากที่สุดคือวิธีซิมเพล็กซ์เพราะมีขั้นตอนวิธีไม่ยุ่งยากซับซ้อนมากนัก อย่างไรก็ตามวิธีนี้ไม่เหมาะกับปัญหาที่มีตัวแปรจำนวนมากหรือมีตัวแปรมากเลขศูนย์ (Sparse problems)

เงื่อนไขเกินของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

พิจารณารูปแบบทั่วไปของปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีจำนวนเงื่อนไขบังคับ m เงื่อนไขและจำนวนตัวแปร n ตัว $(m \ge n)$ ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ (Max) $\quad Z = C^T X$

ภายใต้เงื่อนไข (subject to)

$$\left.\begin{aligned} AX &\le b \\ X &\ge \underline{0} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

โดยที่

$$C^T = [c_1\ c_2 \dots c_n]\ ,\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ ,\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\ ,\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ และ } \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

หรือเขียนได้ในรูป $C = [c_j]_{n\times 1}$, $X = [x_j]_{n\times 1}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $b = [b_i]_{m\times 1}$ เมื่อ $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ บริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (The feasible region) S ที่สอดคล้องกับสมการ (1) คือ $S = \{X \in R^n \mid AX \le b,\ X \ge \underline{0}\}$

ในบางปัญหาเราอาจลดจำนวนเงื่อนไขลงได้ โดยไม่ทำให้บริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ S เปลี่ยนแปลง Telgen (1983) พิสูจน์ว่าเราสามารถลดจำนวนเงื่อนไขในอสมการ (1) ก็ต่อเมื่อ อสมการ (1) มีเงื่อนไขเกินและ/หรือมีอสมการเงื่อนไขที่สามารถแทนได้ด้วยสมการเงื่อนไขแล้วไม่ทำให้บริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ S เปลี่ยนแปลง นอกจากนี้ยังกำหนดนิยามและแบ่งประเภทของเงื่อนไขเกิน ดังนี้

<u>บทนิยาม 1</u> สำหรับค่า k ใดๆ $(1 \le k \le m)$ เงื่อนไขบังคับที่ k $(A_k X \le b_k)$ จะเป็นเงื่อนไขเกินของสมการ (1) ก็ต่อเมื่อ $S_k = S$ เมื่อ $S_k = \{\ X \in R^n \mid A_i X \le b_i,\ X \ge 0,\ \forall i \ne k\ \}$ และ $1 \le i \le m$

<u>บทนิยาม 2</u> (Weakly redundant constraints) เงื่อนไขบังคับที่ k $(A_k X \le b_k)$ จะเป็น Weakly redundant constraints ของสมการ (1) ถ้าเงื่อนไขบังคับที่ k เป็นเงื่อนไขเกินและ $A_k X = b_k$ สำหรับบาง X ที่ $X \in S_k$

<u>บทนิยาม 3</u> (Strongly redundant constraints) เงื่อนไขบังคับที่ k $(A_k X \le b_k)$ จะเป็น Strongly redundant constraints ของสมการ (1) ถ้าเงื่อนไขบังคับที่ k เป็นเงื่อนไขเกินและ $A_k X < b_k$ สำหรับทุก X ที่ $X \in S_k$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณากราฟของเงื่อนไขบังคับที่ (i)-(vii) ในภาพที่ 1

$$x_1 - x_2 \le 2 \qquad \text{(i)}$$

$$2x_1 + x_2 \le 7 \qquad \text{(ii)}$$

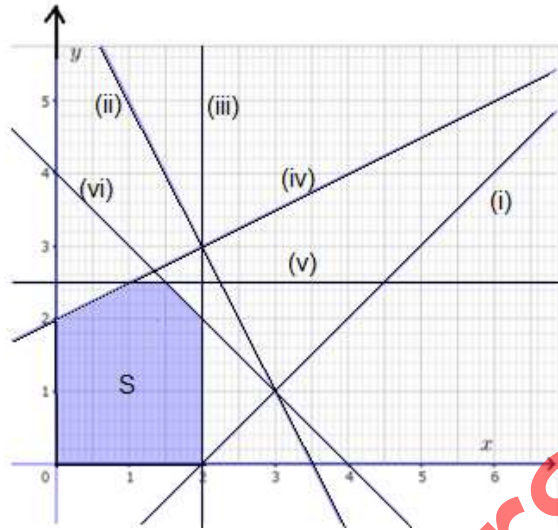
$$x_1 \le 2 \qquad \text{(iii)}$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 4 \qquad \text{(iv)}$$

$$2x_2 \le 5 \qquad \text{(v)}$$

$$x_1 + x_2 \le 4 \qquad \text{(vi)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad \text{(vii)}$$



ภาพที่ 1 บริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (the feasible region) (S) ที่สอดคล้องกับอสมการ (i)-(vii)

จากรูปเงื่อนไขบังคับที่ (iii), (iv), (v), (vi) และ (vii) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น ส่วนเงื่อนไขที่ (i) และ (ii) เป็นเงื่อนไขเกินโดยเงื่อนไขที่ (i) เป็น Weakly redundant constraints เงื่อนไขที่ (ii) เป็น Strongly redundant constraints สังเกตว่า Weakly redundant constraints เป็นเส้นตรงที่มีจุดสัมผัสกับบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (S) แต่ Strongly redundant constraints เป็นเส้นตรงที่ไม่มีจุดสัมผัสกับบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (S)

ในบทความนี้นำเสนองานวิจัยของ Paulraj and Sumathi (2010) ที่เปรียบเทียบวิธีระบุเงื่อนไขเกินทั้งหมด 5 วิธี งานวิจัยของ Paulraj and Sumathi (2012) เปรียบเทียบกับวิธี Ioslovich (2001) และงานวิจัยของ Estiningsih *et al*. (2019) เปรียบเทียบวิธีระบุเงื่อนไขเกินทั้งหมด 3 วิธี หากเราเลือกวิธีระบุเงื่อนไขเกินที่มีความถูกต้องและใช้เวลาน้อยที่สุด จะช่วยลดเวลาการหาผลเฉลยเหมาะที่สุดได้ โดยไม่ทำให้ผลเฉลยเหมาะที่สุดเปลี่ยนแปลง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (Related researches)

- งานวิจัยของ Paulraj and Sumathi (2010) ได้อภิปรายและเปรียบเทียบวิธีระบุเงื่อนไขเกินทั้งหมด 5 วิธี ได้แก่
  1) วิธีกำหนดขอบเขต (Brearley *et al*., 1975)
  2) วิธี Linear programming (Caron *et al*., 1989)
  3) วิธี Deterministic (Telgen, 1983)
  4) วิธีของ Stojković และ Stanimirović (Stojković and Stanimirović, 2001)
  5) วิธี Heuristic (Paulraj *et al*., 2006)

จากการศึกษาในปัญหาขนาดกลางที่มีจำนวนตัวแปรไม่เกิน 6 ตัวและจำนวนเงื่อนไขไม่เกิน 50 เงื่อนไข พบว่าวิธี Heuristic สามารถระบุเงื่อนไขเกินได้มากที่สุดโดยใช้เวลาน้อยที่สุด ส่วนวิธี Linear programming และวิธี Deterministic สามารถระบุเงื่อนไขเกินได้แต่ใช้เวลามากกว่า วิธีกำหนดขอบเขตระบุเงื่อนไขเกินได้น้อยกว่าวิธีอื่นและขึ้นอยู่กับขอบเขตบน-ล่างของตัวแปรตัดสินใจ สำหรับวิธีของ Stojković และ Stanimirović ระบุเงื่อนไขเกินได้น้อยที่สุด ดังตารางที่ 1

Online-first Version

ตารางที่ 1 จำนวนเงื่อนไขเกินที่ตรวจสอบโดย 5 วิธี จากตัวอย่างขนาดกลาง

จำนวนเงื่อนไข	จำนวนตัวแปร	จำนวนเงื่อนไขเกินที่ระบุด้วย				
		วิธีกำหนดขอบเขต	วิธี Linear programming	วิธี Deterministic	วิธีของ Stojković และ Stanimirović	วิธี Heuristic
16	6	14	13	5	1	14
20	5	17	18	1	0	17
25	6	17	23	3	0	23
30	3	24	29	18	0	29
37	5	29	35	12	0	35
40	2	38	39	38	0	39
45	3	34	43	10	0	43
50	5	28	49	11	0	49

ในปัญหาขนาดเล็กที่มีจำนวนตัวแปรไม่เกิน 10 ตัวและจำนวนเงื่อนไขไม่เกิน 7 เงื่อนไข พบว่าวิธี Heuristic มีจำนวนตัวดำเนินการคูณ/การหารน้อยที่สุด รองลงมาคือวิธี Linear programming วิธี Deterministic และวิธีของ Stojković และ Stanimirović ตามลำดับ ส่วนวิธีกำหนดขอบเขตมีจำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหารมากที่สุด ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 จำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหาร จากตัวอย่างขนาดเล็ก

จำนวนเงื่อนไข	จำนวนตัวแปร	จำนวนเงื่อนไขเกินที่ระบุด้วย				
		วิธีกำหนดขอบเขต	วิธี Linear programming	วิธี Deterministic	วิธีของ Stojković และ Stanimirović	วิธี Heuristic
3	2	93	42	42	93	42
3	2	93	93	93	93	42
3	2	93	42	42	93	42
4	3	167	76	168	311	76
4	3	167	75	75	167	75
3	3	186	97	88	178	97
4	5	186	88	88	336	88
5	2	505	70	159	159	70
5	4	535	50	50	167	50
7	10	883	161	1894	1894	161

งานวิจัยของ Paulraj and Sumathi (2012) นำเสนอวิธีใหม่ที่ใช้หลักการของ Ioslovich (2001) มาปรับปรุงและเปรียบเทียบกับวิธีเดิมของ Ioslovich พบว่า วิธี Paulraj and Sumathi (2012) ใช้เวลาตรวจสอบเงื่อนไขเกินน้อยกว่าวิธีเดิมและจำนวนตัวดำเนินการคูณ/การหารน้อยกว่า รวมทั้งให้ผลตรงกัน เมื่อทดสอบกับปัญหาขนาดเล็ก $(m=7, n=10)$ ดังตารางที่ 3 และปัญหาขนาดใหญ่ $(m=511, n=210)$ m คือ จำนวนเงื่อนไข n คือ จำนวนตัวแปร ดังตารางที่ 4

Online-first Version

ตารางที่ 3 จำนวนตัวดำเนินการคูณ/การหารและเวลาที่ใช้ตรวจสอบเงื่อนไขเกิน จากตัวอย่างขนาดเล็ก

จำนวนเงื่อนไข	จำนวนตัวแปร	วิธี Ioslovich		วิธี Paulraj and Sumathi (2012)	
		จำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหาร	เวลา (micro seconds)	จำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหาร	เวลา (micro seconds)
3	2	747	201	326	179
3	2	815	286	326	187
3	2	747	203	326	184
3	3	2034	285	648	185
3	3	1895	290	786	200
3	4	4245	485	1360	230
4	3	2682	306	972	231
4	3	2681	295	1248	235
4	5	107860	643	3795	336
6	3	5082	460	2724	349
7	10	221226	8516	94146	3797

ตารางที่ 4 จำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหารและเวลาที่ใช้ตรวจสอบเงื่อนไขเกิน จากตัวอย่างขนาดใหญ่

จำนวนเงื่อนไข	จำนวนตัวแปร	วิธี Ioslovich		วิธี Paulraj and Sumathi (2012)	
		จำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหาร	เวลา (micro seconds)	จำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหาร	เวลา (micro seconds)
50	500	7299004428	157638973	608250369	19837621
50	500	6965109510	146332149	593487546	18657901
50	500	6967810329	157647651	510430124	16727382
240	192	8011245923	930620218	774361273	2046104
511	210	12577042510	1230620218	922863013	641873563

งานวิจัยของ Estiningsih *et al*. (2019) เปรียบเทียบวิธี Heuristic (Paulraj *et al*., 2006) วิธีของ Llewellyn (Telgen, 1979) และวิธีของ Stojković และ Stanimirović (Stojković and Stanimirović, 2001) พบว่า วิธี Heuristic ไม่สามารถระบุเงื่อนไขเกินชนิด Weakly redundant constraints ได้ วิธีของ Llewellyn และวิธีของ Stojković และ Stanimirović มีจำนวนขั้นตอนการทำซ้ำเท่ากันคือ $n\times(n-1)$ ขั้นตอน เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปร นอกจากนี้วิธีของ Llewellyn สามารถระบุเงื่อนไขเกินได้ดีที่สุดเมื่อเทียบกับ 2 วิธีแต่จะใช้เวลามากขึ้น ถ้าปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้น เพราะขั้นตอนวีธีของ Llewellyn ต้องเปรียบเทียบทีละ 2 เงื่อนไขจนครบทุกเงื่อนไข ดังตารางที่ 5

Online-first Version

ตารางที่ 5 จำนวนเงื่อนไขเกินที่ตรวจสอบโดย 3 วิธี จากตัวอย่างขนาดเล็ก

จำนวนเงื่อนไข	**จำนวนตัวแปร**	**จำนวนเงื่อนไขเกินที่ระบุด้วย**		
		วิธี Heuristic	**วิธีของ Llewellyn**	**วิธีของ Stojković และ Stanimirović**
5	2	3	3	3
5	2	-	3	-
5	2	1	3	-
5	2	3	3	-
5	2	2	3	3
5	2	-	3	-

สรุปและปัญหาเปิด

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น พบว่า วิธี Heuristic สามารถระบุเงื่อนไขเกินได้ดีทั้งในปัญหาขนาดกลางและขนาดใหญ่ โดยใช้เวลาตรวจสอบเงื่อนไขเกินน้อยกว่าอื่น เนื่องจากมีจำนวนตัวดำเนินการคูณ/ การหารน้อยที่สุด แต่ไม่สามารถระบุเงื่อนไขเกินชนิด Weakly redundant constraints ได้ วิธีของ Llewellyn สามารถระบุเงื่อนไขเกินได้ดีกว่าวิธี Heuristic แต่จะใช้เวลาตรวจสอบเงื่อนไขเกินมากขึ้น ถ้าปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้น สำหรับวิธีของ Paulraj and Sumathi (2012) ที่ใช้หลักการของ Ioslovich มาปรับปรุง ใช้เวลาตรวจสอบเงื่อนไขเกินน้อยกว่าวิธีเดิม แต่ไม่ได้ระบุจำนวนเงื่อนไขเกินที่ตรวจสอบได้ หากเราสามารถเปรียบเทียบวิธี Heuristic วิธีของ Llewellyn และวิธีของ Paulraj and Sumathi (2012) อาจพบวิธีที่ดีที่สุดในการระบุเงื่อนไขเกินและใช้เวลาน้อยที่สุดได้

เอกสารอ้างอิง

Brearley, A. L., Mitra, G., and Williams, H. P. (1975). Analysis of mathematical programming problems prior to applying the simplex algorithm. **Mathematical Programming**, 8(1), 54-83.

Caron, R. J., McDonald, J. F., and Ponic, C. M. (1989). A degenerate extreme point strategy for the classification of linear constraints as redundant or necessary. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 62(2), 225-237.

Estiningsih, Y., Farikhin, and Tjahjana, R. H. (2019). Some methods for identifying redundant constraints in linear programming. **Journal of Physics: Conference Series**, 1321, 022073.

Ioslovich, I. (2001). Robust reduction of a class of large-scale linear programs. **SIAM journal on Optimization**, 12(1), 262-282.

Paulraj, S., Chellappan, C., and Natesan, T. R. (2006). A heuristic approach for identification of redundant constraints in linear programming models. **International Journal of Computer and Mathematics**, 83(8-9), 675-683.

Paulraj, S. and Sumathi, P. (2010). A Comparative Study of Redundant Constraints Identification Methods in Linear Programming Problems. **Mathematical Problems in Engineering**, 2010, 723402.

Paulraj, S. and Sumathi, P. (2012). A new approach for selecting a constraint in linear programming problems to identify the redundant constraints. **International Journal of Scientific and Engineering Research**, 3(8), 1345-1348.

Stojković, N. V. and Stanimirović, P. S. (2001). Two direct methods in linear programming. **European Journal of Operation Research**, 131(2), 417-439.

Telgen, J. (1979). On R. W. Llewellyn's rules to identify redundant constraints: A detailed critique and some generalizations. **Zeitschrift Für Operations Research**, 23(5), 197–206.

Telgen, J. (1983). Identifying redundant constraints and implicit equalities in systems of linear constraints. **Management Science**, 29(10), 1209-1222.

Online-first Version