P-ISSN 2586-9000
E-ISSN 2586-9027

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 30 ฉบับที่ 2 (มีนาคม-เมษายน 2565) หน้า [110-125]

นอร์มของเมทริกซ์ อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรกับจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

On the Norms of Symmetric r-Circulant and Symmetric Geometric Circulant Matrices with the Hyperharmonic Fibonacci Numbers

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์*, ชัญญานุช ราชสีห์, สุขุมาล วรรณดิษฐ์, วิมลสิริ ทวีปรีดา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Archara Pacheenburawana*, Chanyanuch Ratchasri, Sukumal Wannadit, Wimonsiri Taveepreeda

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 9 October 2021; Received in revised from 2 March 2022; Accepted 16 March 2022

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี นอกจากนี้ได้ให้ตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลขที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น

คำสำคัญ: เมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร; เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร; จำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี; เมทริกซ์นอร์ม

***ผู้รับผิดชอบบทความ: :** archara@mathstat.sci.tu.ac.th

Abstract

This research objective is to find upper and lower bounds for the spectral norms, 1-norm, and ∞-norm of symmetric r-circulant and symmetric geometric circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers. Furthermore, some examples and numerical results for demonstrating the validity of the hypotheses of our results are demonstrated.

Keywords: Symmetric r-circulant matrix; Symmetric geometric circulant matrix; Hyperharmonic Fi bonacci number; Matrix norm

1. บทนำ

เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับหลากหลายปัญหา อาทิเช่น กระบวนการส่งสัญญาณ ความน่าจะเป็น การวิเคราะห์เชิงตัวเลข และทฤษฎีรหัส ช่วงเวลาที่ผ่านมามีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนต่างๆ ในปี ค.ศ. 2015 Tuglu และ Kızılates ได้ศึกษานอร์มของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี [1] ต่อมาในปี ค.ศ. 2016 Sintunavarat ได้ประมาณค่าขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นลำดับพาโดแวน [2] จากนั้นในปี ค.ศ. 2018 Tuglu และ Kızılates ได้ให้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไตรโบนักชี [3]

จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมา ผู้วิจัยพบว่าในปัจจุบันยังไม่มีการศึกษาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์ม สเปกตรัม 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

2. ความรู้พื้นฐาน

หัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงบทนิยามและผลลัพธ์ของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตลอดงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ $\mathbb{C}^{n\times n}$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ในปี ค.ศ. 1202 เลโอนาร์โด ฟีโบนักชี (Leonardo Fibonacci) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี ได้เขียนหนังสือเกี่ยวกับการคิดคำนวณชื่อ The Book of Abacus ในหนังสือเล่มนี้มีโจทย์ปัญหาข้อหนึ่งซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างดี คือ ปัญหาจำนวนกระต่ายในทุ่งหญ้า ซึ่งปัญหานี้ทำให้ได้รูปแบบของจำนวนชุดหนึ่งที่เรียงเป็นลำดับ ดังนี้ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ลำดับดังกล่าวในเวลาต่อมารู้จักอย่างกว้างขวางว่า ลำดับฟีโบนักชี

จำนวนฟีโบนักชี ถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

เมื่อ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ ซึ่งเรียงเป็นลำดับดังนี้

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$$

ในบทความวิจัย [4] Tuglu Kızılates และ Kesim ได้ทำการศึกษาสมบัติต่างๆ ของผลบวกจำกัดของส่วนกลับของจำนวนฟีโบนักชี

$$\mathbb{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}$$

เรียกว่า **จำนวน n ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี** (n-th Harmonic Fibonacci numbers) ซึ่งเรียงเป็นลำดับดังนี้

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\mathbb{F}_n$	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{91}{30}$	$\frac{379}{120}$	$\frac{5047}{1560}$	$\cdots$

และนอกจากนี้พวกเขาได้นิยาม **จำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี** (Hyperharmonic Fibonacci numbers) สำหรับจำนวนเต็ม $n, p \geq 1$

$$\mathbb{F}_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{F}_k^{(p-1)}$$

เมื่อ $\mathbb{F}_n^{(0)} = \frac{1}{F_n}$ และ $\mathbb{F}_0^{(p)} = 0$ สำหรับ $p \geq 0$ และถ้า $p = 2$ แล้วจะได้ลำดับของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชีดังนี้

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\mathbb{F}_n^{(2)}$	0	1	3	$\frac{11}{2}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{341}{30}$	$\frac{581}{40}$	$\frac{13853}{780}$	$\cdots$

<u>หมายเหตุ</u> ในกรณีที่ $p = 1$ จะได้ว่าจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี เป็นจำนวน n ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

บทนิยาม 2.1 [5] **เมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร** (Symmetric r-circulant matrix) คือ เมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่นิยามโดย

$$SC_r = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & rc_0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & rc_0 & rc_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & rc_0 & \cdots & rc_{n-4} & rc_{n-3} \\ c_{n-1} & rc_0 & rc_1 & \cdots & rc_{n-3} & rc_{n-2} \end{pmatrix}$$

เมื่อ $r, c_i \in \mathbb{C}$ สำหรับทุก $i = 0, \ldots n-1$ และเขียนแทนด้วย $SC_r = SCirc_r(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$

บทนิยาม 2.2 [3] **เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร** (Symmetric geometric circulant matrix) คือ เมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่นิยามโดย

$$SC_{r^*} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & rc_0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & rc_0 & r^2c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & rc_0 & \cdots & r^{n-3}c_{n-4} & r^{n-2}c_{n-3} \\ c_{n-1} & rc_0 & r^2c_1 & \cdots & r^{n-2}c_{n-3} & r^{n-1}c_{n-2} \end{pmatrix}$$

เมื่อ $r, c_i \in \mathbb{C}$ สำหรับทุก $i = 0, \ldots n-1$ และเขียนแทนด้วย $SC_{r^*} = SCirc_{r^*}(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$

บทตั้ง 2.3 [4] รากที่สองของผลบวกของกำลังสองของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี สอดคล้องอสมการต่อไปนี้

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \leq \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

บทนิยาม 2.4 [6] กำหนดให้ $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ

1. **นอร์มแบบยุคลิด** (Euclidean norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2}$$

2. **นอร์มสเปกตรัม** (Spectral norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^H A)}$$

เมื่อ $\lambda_i(A^H A)$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A^H A$ และ A^H เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคของ A

3. **นอร์มความยาวแถวสูงสุด** (Maximum row length norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2}$$

4. **นอร์มความยาวหลักสูงสุด** (Maximum column length norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$c_1(B) = \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right|^2}$$

5. **1-นอร์ม** (1-norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

$n \times n$ 6. ∞-**นอร์ม** (∞-norm) ของเมทริกซ์ A นิยามโดย

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

บทตั้ง 2.5 [6] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E \le \|A\|_2 \le \|A\|_E \qquad (1)$$

บทนิยาม 2.6 [6] กำหนดให้ $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่า **ผลคูณฮาดามาร์ด** (Hadamard product) ของ A และ B คือ เมทริกซ์ที่นิยามโดย $A \circ B = \left(a_{ij}b_{ij}\right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

บทตั้ง 2.7 [6] กำหนดให้ $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่า

$$\|A \circ B\|_2 \le r_1(A)c_1(B)$$

3. ผลการวิจัย

หัวข้อนี้ผู้วิจัยได้แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ-นอร์มของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

สำหรับทฤษฎีบท 3.1 เป็นการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $SC_r^{(k)} = SCirc_r\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรขนาด $n \times n$ จะได้ว่า

(i) ถ้า $|r| \ge 1$ แล้ว

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \le \left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{1 + (n-1)|r|^2}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

(ii) ถ้า $|r| < 1$ แล้ว

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \le \left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{n}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้ $SC_r^{(k)} = SCirc_r\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรขนาด $n \times n$ นั่นคือ

$$SC_r^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r\mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.4 (1) จะได้ว่ากำลังสองของนอร์มแบบยุคลิดของ $SC_r^{(k)}$ คือ

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_E^2 = \sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2}(n-s-1)|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2$$

(i) สำหรับกรณี $|r| \geq 1$ จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_E \geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2}(s+1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2}(n-s-1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} n\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-2}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_E \geq \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}\right) = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

และจากอสมการ (1) จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \geq \tfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{2}$$

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r & r \\ 1 & r & r & \cdots & r & r \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $A \circ B = SC_r^{(k)}$ และจะได้

$$r_1(A) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{nj}\right|^2} = \sqrt{1+(n-1)|r|^2}$$

$$c_1(B) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \leq \sqrt{1+(n-1)|r|^2}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{1+(n-1)|r|^2}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{3}$$

จากอสมการ (2) และ (3) จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \leq \sqrt{1+(n-1)|r|^2}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

(ii) สำหรับกรณี $|r| < 1$ จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_E \geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2}(s+1)|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2}(n-s-1)|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n\,|r|^2\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2} n|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n|r|^2\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2 = |r|\sqrt{n}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_E \geq |r|\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}\right) = |r|\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

และจากอสมการ (1) จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \geq \frac{|r|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{4}$$

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r & r \\ 1 & r & r & \cdots & r & r \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $A \circ B = SC_r^{(k)}$ และจะได้

$$r_1(A) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{1j}\right|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(B) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{n}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{5}$$

จากอสมการ (4) และ (5) จะได้

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\|SC_r^{(k)}\right\|_2 \leq \sqrt{n}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.2 ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรขนาด 5 x 5 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์-มอนิกฟีโบนักชี

Table 1 Upper and lower bounds for the spectral norms of 5 x 5 symmetric r-circulant with the hyperharmonic Fibonacci numbers

			Lower bounds	$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_2$	Upper bounds
$\|r\| \geq 1$	$\boldsymbol{k = 1}$	$\boldsymbol{r = 2}$	3.7268	10.8164	34.3592
		$\boldsymbol{r = 1}$	3.7268	8.3333	18.6339
		$r = 1 + i$	3.7268	9.1182	25.0000
	$k = 2$	$\boldsymbol{r = 2}$	7.9753	21.6523	73.5287
		$\boldsymbol{r = 1}$	7.9753	17.8333	39.8765
		$r = 1 + i$	7.9753	19.0112	53.5000
$\|r\| < 1$	$\boldsymbol{k = 1}$	$\boldsymbol{r = 0.5}$	1.8634	7.5492	18.6339
		$\boldsymbol{r = -0.1}$	0.3727	7.0073	18.6339
		$r = 0.2i$	1.6667	7.1028	18.6339
	$k = 2$	$\boldsymbol{r = 0.5}$	3.9877	16.6240	39.8765
		$\boldsymbol{r = -0.1}$	0.7975	15.7322	39.8765
		$r = 0.2i$	3.5667	15.8927	39.8765

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหา 1-นอร์ม และ ∞-นอร์มของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $SC_r^{(k)} = SCirc_r\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรขนาด $n \times n$ จะได้ว่า

(i) ถ้า $|r| \geq 1$ แล้ว

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_1 = \left\|SC_r^{(k)}\right\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} + |r|\mathbb{F}_{n-2}^{(k+1)}$$

(ii) ถ้า $|r| < 1$ แล้ว

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_1 = \left\|SC_r^{(k)}\right\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้ $SC_r^{(k)} = SCirc_r\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรขนาด $n \times n$ นั่นคือ

$$SC_r^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r\mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

(i) สำหรับกรณี $|r| \geq 1$ จากบทนิยาม 2.4 (5) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชีจะได้ว่า

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_1 = \left|\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right| + |r|\sum_{s=0}^{n-2}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} + |r|\mathbb{F}_{n-2}^{(k+1)} \tag{6}$$

และจากบทนิยาม 2.4 (6) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชีจะได้ว่า

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_\infty = \left|\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right| + |r|\sum_{s=0}^{n-2}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} + |r|\mathbb{F}_{n-2}^{(k+1)} \tag{7}$$

จากสมการ (6) และ (7) จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_1 = \left\|SC_r^{(k)}\right\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} + |r|\mathbb{F}_{n-2}^{(k+1)}$$

(ii) สำหรับกรณี $|r| < 1$ จากบทนิยาม 2.4 (5) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชีจะได้ว่า

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_1 = \sum_{s=0}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \sum_{s=1}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{8}$$

และจากบทนิยาม 2.4 (6) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชีจะได้ว่า

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_\infty = \sum_{s=0}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \sum_{s=1}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{9}$$

จากสมการ (8) และ (9) จะได้

$$\left\|SC_r^{(k)}\right\|_1 = \left\|SC_r^{(k)}\right\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.4 ตารางแสดง 1-นอร์มและ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรขนาด 5 x 5 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

Table 2 1-norm and ∞-norm of 5 x 5 symmetric r-circulant with the hyperharmonic Fibonacci numbers

			$\left\Vert SC_r^{(k)}\right\Vert_1 = \left\Vert SC_r^{(k)}\right\Vert_\infty$
$\lvert r\rvert \geq 1$	$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{r=2}$	13.8333
		$\boldsymbol{r=1}$	8.3333
		$r=1+i$	10.6115
	$k=2$	$\boldsymbol{r=2}$	27.3333
		$\boldsymbol{r=1}$	17.8333
		$r=1+i$	21.7684
$\lvert r\rvert < 1$	$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{r=0.5}$	8.3333
		$\boldsymbol{r=-0.1}$	8.3333
		$r=0.2i$	8.3333
	$k=2$	$\boldsymbol{r=0.5}$	17.8333
		$\boldsymbol{r=-0.1}$	17.8333
		$r=0.2i$	17.8333

สำหรับทฤษฎีบท 3.5 เป็นการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรเมื่อ $|r| \geq 1$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \leq \left\Vert SC_{r^*}^{(k)}\right\Vert_2 \leq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| > 1, \\ \sqrt{n}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| = 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ นั่นคือ

$$SC_{r^*}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & r^{n-3}\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r^{n-1}\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.4 (1) จะได้กำลังสองของนอร์มแบบยุคลิดของ $SC_{r^*}^{(k)}$ คือ

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_E^2 = \sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2}(n-s-1)|r^{s+1}|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2}(s+1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2}(n-s-1)|r^{s+1}|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2$$

สำหรับ $|r| > 1$ จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_E \geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2}(s+1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2}(n-s-1)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2}n\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n\left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_E \geq \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}\right) = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

และจากอสมการ (1) จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{10}$$

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $A \circ B = SC_{r^*}^{(k)}$

สำหรับกรณี $|r| > 1$ จะได้

$$r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{nj}\right|^2} = \sqrt{1 + |r|^2 + |r^2|^2 + \cdots + |r^2|^{n-1}}$$

จากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$r_1(A) = \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}$$

และ

$$c_1(B) = \max_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \le \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{11}$$

(ii) สำหรับกรณี $|r| = 1$ จะได้

$$r_1(A) = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|a_{1j}\right|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(B) = \max_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{n}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \le \sqrt{n}\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{12}$$

จากอสมการ (11) และ (12) จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \le \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| > 1, \\ \sqrt{n}\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| = 1 \end{cases}$$

และจากอสมการ (10) จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \le \left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \le \begin{cases} \sqrt{\frac{1-|r|^{2n}}{1-|r|^2}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r|>1, \\ \sqrt{n}\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r|=1 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.6 ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด 5 x 5 และ $|r| \geq$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

Table 3 Upper and lower bounds for the spectral norms of 5 x 5 symmetric geometric circulant matrices and $|r| \geq 1$ with the hyperharmonic Fibonacci numbers

		Lower bounds	$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2$	Upper bounds
$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{r=2}$	3.7268	24.6392	153.8849
	$\boldsymbol{r=1}$	3.7268	8.3333	18.6339
	$r=1+i$	3.7268	14.3055	46.3980
$\boldsymbol{k=2}$	$\boldsymbol{r=2}$	7.9753	95.5802	329.3136
	$\boldsymbol{r=1}$	7.9753	17.8333	39.8765
	$r=1+i$	7.9753	28.8122	99.2918

สำหรับทฤษฎีบท 3.7 เป็นการหาขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรเมื่อ $|r| < 1$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ จะได้ว่า สำหรับ $|r| < 1$

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \leq \sqrt{n}\, \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้ $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ นั่นคือ

$$SC_{r^*}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & r^{n-3}\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r^{n-1}\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \end{pmatrix} \text{ และ } B=\begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $A \circ B = SC_{r^*}^{(k)}$ ถ้า $|r| < 1$ แล้วจะได้ว่า

$$r_1(A) = \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{1j}|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(B) = \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{n}\sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \le \sqrt{n}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.8 ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด 5 x 5 และ $|r| < 1$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

Table 4 Upper bound for the spectral norms of 5 x 5 symmetric geometric circulant matrices and $|r| < 1$ with the hyperharmonic Fibonacci numbers

		$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_2$	Upper Bound
$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{r=0.5}$	7.2070	18.6339
	$\boldsymbol{r=-0.1}$	7.0753	18.6339
	$r=0.2i$	7.0586	18.6339
$\boldsymbol{k=2}$	$\boldsymbol{r=0.5}$	16.0422	39.8765
	$\boldsymbol{r=-0.1}$	15.8495	39.8765
	$r=0.2i$	15.8295	39.8765

สำหรับทฤษฎีบท 3.9 เป็นการหา 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร เมื่อ $|r| < 1$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ จะได้ว่า สำหรับ $|r| < 1$

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_1 = \left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้ $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด $n \times n$ นั่นคือ

$$SC_{r^*}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & r^{n-3}\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r^{n-1}\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ถ้า $|r| < 1$ แล้วจากบทนิยาม 2.4 (5) จะได้ว่า

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_1 = \sum_{s=0}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \sum_{s=1}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{13}$$

และจากบทนิยาม 2.4 (6) จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_\infty = \sum_{s=0}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \sum_{s=1}^{n-1}\left|\mathbb{F}_s^{(k)}\right| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{14}$$

จากสมการ (13) และ (14) จะได้

$$\left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_1 = \left\|SC_{r^*}^{(k)}\right\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$ ■

ตัวอย่าง 3.10 ตารางแสดง 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด 5 x 5 และ $|r| < 1$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี

Table 5 1-norm and ∞-norm of 5 x 5 symmetric geometric circulant matrices and with the hyperharmonic Fibonacci numbers

		$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_1 = \|SC_{r^*}^{(k)}\|_\infty$
$\boldsymbol{k = 1}$	$\boldsymbol{r = 0.5}$	8.3333
	$\boldsymbol{r = -0.1}$	8.3333
	$r = 0.2i$	8.3333
$\boldsymbol{k = 2}$	$\boldsymbol{r = 0.5}$	17.8333
	$\boldsymbol{r = -0.1}$	17.8333
	$r = 0.2i$	17.8333

4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ ∞-นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี ผลของการวิจัยทำให้ได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ ∞-นอร์มของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี ดังทฤษฎีบท 3.1 และ 3.3 ตามลำดับ และผู้วิจัยได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมในกรณี $|r| < 1$ ขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมในกรณี $|r| < 1$ และ 1-นอร์ม และ ∞-นอร์มในกรณี $|r| < 1$ ของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนักชี ดังทฤษฎีบท 3.5, 3.7 และ 3.9 ตามลำดับ

5. References

[1] Tuglu, N. and Kızılates, C., 2015, On the norms of circulant and r–circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers, J. Inequal. Appl., 253.

[2] Sintunavarat, W., 2016, The upper bound estimation for the spectral norm of r-circulant and symmetric r–circulant matrices with the Padovan sequence, J. Nonlinear Sci. Appl., 9: 92-101.

[3] Kızılates, C. and Tuglu, N., 2018, On the Norms of Geometric and Symmetric Geometric Circulant Matrices with the Tribonacci Number, GU J. Sci., 31(2): 555-567.

[4] Tuglu, N., Kızılates, C. and Kesim, S., 2015, On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers, Adv. Diff. Eqn., 2015:297.

[5] Daojin, S. and Wenling, Z., 2009, On Nonsingularity the Symmetric r-Circulant Matrices, Second International Conference on Future Information Technology and Management Engineering, pp.335-338.

[6] Horn, RA., Johnson, CR., 1991, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 607 p.