P-ISSN 2586-9000
E-ISSN 2586-9027

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj
ปีที่ 30 ฉบับที่ 1 (มกราคม-กุมภาพันธ์ 2565) หน้า [1-16]

การประมาณค่าแบบเบส์โดยใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2

Bayesian Estimation using Metropolis-Hastings Algorithm of Gumbel Type-II Distribution

มณฑิรา ดวงสาพล*, ภัทรพงศ์ สุรเสน,
จิระศักดิ์ ศรีโยธี, รังสรรค์ ประเสริฐนรสาร
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Monthira Duangsaphon*, Pattharapong Surasen,
Jeerasak Sriyothee, Rangsan Prasoednorasan
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Pathum Thani 12120
Received 29 June 2020; Received in revised from 25 March 2021; Accepted 12 July 2021

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการแบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ทั้งหมด 4 วิธี ได้แก่ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ และขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณด้วยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลภายใต้สถานการณ์ที่มีค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่างเท่ากับ 0.5, 1, 2, 3 และ 4 พารามิเตอร์บ่งขนาดเท่ากับ 0.5, 1 และ 2 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 50 และ 100 และการแจกแจงก่อนของทั้งสองพารามิเตอร์คือการแจกแจงแกมมา นอกจากนั้นผู้วิจัยยังนำทั้ง 4 วิธีมาประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ผลการศึกษาโดยสรุปจากการจำลองภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ โดยส่วนใหญ่ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มและขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ให้ประสิทธิภาพมากที่สุด และผลจากการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงพบว่าขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ให้ประสิทธิภาพมากที่สุด

คำสำคัญ: มอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ; ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ; ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม; การเลือกตัวอย่างแบบกิบส์

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** monthira.stat@gmail.com **doi:**

Abstract

This research aims to compare the performance of the parameter estimation by the Bayesian approach of the Gumbel type-II distribution on four methods, namely independent metropolis-hastings algorithm, random walk metropolis algorithm, independent metropolis-hastings algorithm with Gibbs sampling, and random walk metropolis algorithm with Gibbs sampling. The comparison among methods is made in terms of the mean square errors based on the Monte Caro simulation technique. The shape parameters were chosen to be 0.5, 1, 2, 3, and 4, the scale parameters were chosen to be 0.5, 1, and 2 and the sample sizes were chosen to be 20, 50, and 100. The prior distribution of both parameters was assumed to be the Gamma distribution. Moreover, we apply four methods for real data. The findings show that the random walk metropolis algorithm and the independent metropolis-hastings algorithm with Gibbs sampling present the best performance in most cases under a simulation study. For real data, the independent metropolis-hastings algorithm with Gibbs sampling offers the best performance.

Keywords: Markov chain Monte Carlo; Independent metropolis-hastings algorithm; Random walk metropolis algorithm; Gibbs sampling

1. บทนำ

Gumbel [1] นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันได้นำเสนอการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 (gumbel type-II distribution) และได้นำไปประยุกต์ใช้สำหรับสร้างตัวแบบภายใต้ข้อมูลที่มีค่าสุดขีด (extreme value) เพื่อคาดการณ์การเปลี่ยนแปลงปรากฏการณ์ทางอุตุนิยมวิทยา เช่น น้ำท่วม แผ่นดินไหว และภัยพิบัติทางธรรมชาติอื่นๆ นอกจากนั้นยังนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์อายุขัย มีงานวิจัยหลายๆ งานวิจัยได้นำเสนอการอนุมานทางสถิติและคุณสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 เช่น Feroze และ Aslam [2] ได้นำเสนอการประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดแบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ภายใต้ข้อมูลที่ถูกตรวจตัดโดยใช้ฟังก์ชันความสูญเสียที่แตกต่างกัน ซึ่งใช้การแจกแจงก่อนแบบไม่ให้สารสนเทศ (non – informative prior) และให้สารสนเทศ (informative prior) หลังจากนั้น Abbas และคณะ [3] ได้นำเสนอการประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดแบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 โดยใช้การประมาณของลินด์เลย์ (lindley's approximation) ภายใต้ฟังก์ชันความสูญเสียที่แตกต่างกัน ซึ่งใช้การแจกแจงก่อนแบบไม่ให้สารสนเทศและให้สารสนเทศ นอกจากนั้นยังนำตัวประมาณแบบเบส์มาเปรียบเทียบกับตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimators) โดยใช้การจำลองมอนติคาร์โลและประยุกต์ใช้กับข้อมูลแรงเค้นที่ทำให้เส้นใยคาร์บอนขาด ต่อมา Okorie และคณะ [4] ได้ทดสอบว่าข้อมูลเวลารอดชีวิตของผู้ป่วยมะเร็งเม็ดเลือดขาวชนิดไมอีลอยด์มีการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ภายใต้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด รวมถึงได้นำเสนอการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 แบบเลขชี้กำลัง (exponentiated gumbel type-II distribution) ซึ่งมีการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 เป็นการแจกแจงเฉพาะ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood method) เพื่อสร้าง

ตัวแบบที่เหมาะสมในแต่ละการแจกแจงเป็นวิธีการอนุมานเชิงสถิติแบบดั้งเดิมที่ใช้เพียงสารสนเทศข้อมูลเชิงประจักษ์ ซึ่งจะได้ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพเมื่อมีขนาดตัวอย่างมากเพียงพอ ส่วนการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการแบบเบส์ (Bayesian method) เป็นการการอนุมานเชิงสถิติที่แตกต่างไปจากวิธีการอนุมานเชิงสถิติแบบดั้งเดิม ซึ่งจะใช้สารสนเทศสองส่วน คือ สารสนเทศข้อมูลเชิงประจักษ์จากฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) และสารสนเทศความรู้ก่อนหน้าที่มีเกี่ยวกับพารามิเตอร์จากการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (prior probability distribution) ในกรณีที่ตัวประมาณแบบเบส์ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสูตรปิดได้ ผู้วิจัยจึงต้องหาวิธีประมาณค่าตัวประมาณแบบเบส์ เช่น เลือกใช้เทคนิคการประมาณค่าของลินด์เลย์ (lindley’s approximation) ซึ่งนำเสนอโดย Lindley [5] และการเลือกตัวอย่างในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov chain Monte Carlo, MCMC) ซึ่งนำเสนอโดย Gilks และคณะ [6]

การเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs sampling) ซึ่งนำเสนอโดย Geman และ Geman [7] เป็นวิธีการหนึ่งในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟที่เป็นที่นิยม โดยหลักการคือในแต่ละรอบของการวนซ้ำจะสุ่มตัวอย่างจากการแจกแจงโดยประมาณของการแจกแจงจริงที่ต้องการ แต่ยังมีข้อจำกัดสำหรับวิธีนี้คือผู้วิจัยควรจะทราบรูปแบบของการแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ อีกหนึ่งวิธีการที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟที่นำมาประมาณตัวประมาณแบบเบส์ คือ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ (metropolis-hastings agorithm) ที่นำเสนอโดย Hastings [8] โดยมีหลักการคือเป็นการสุ่มตัวอย่างค่าประมาณที่เป็นไปได้ (candidate value) จากการแจกแจงนำเสนอ (proposal distribution) ที่มีลักษณะคล้ายกันกับขั้นตอนวิธีการเลือกตัวอย่างแบบปฏิเสธ (rejection sampling) ซึ่งการสุ่มตัวอย่างค่าประมาณที่เป็นไปได้จากการแจกแจงนำเสนอของขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ มี 2 แบบ ได้แก่ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ (independent metropolis-hastings algorithm, IMH) และขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม (random walk metropolis algorithm, RWM) มีงานวิจัยที่ได้นำขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ ไปประยุกต์ใช้การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์เพื่อสร้างตัวแบบที่เหมาะสมและน่าเชื่อถือ เช่น Moala และคณะ [9] ได้นำเสนอการประมาณพารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดแบบเบส์ของการแจกแจงแกมมาภายใต้สถานการณ์การแจกแจงก่อนแบบไม่ให้สารสนเทศที่แตกต่างกัน Ahmed [10] ได้นำเสนอการประมาณพารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดแบบเบส์ภายใต้การแจกแจงไวบูลเมื่อข้อมูลถูกตรวจตัดแบบช่วง ต่อมา Saraiva และ Suzuki [11] ได้ประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระและขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์พารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดของการแจกแจงไวบูลภายใต้การตรวจตัดทางขวา หลังจากนั้น Saraiva และคณะ [12] ได้ศึกษาประสิทธิภาพการประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ในการประมาณค่าแบบเบส์ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดของการแจกแจงไวบูลสองตัวแปรภายใต้ AMH Copula เมื่อข้อมูลมีการการตรวจตัดทางขวา Haselimashadi และคณะ [13] ได้นำเสนอตัวแบบการถดถอยแบบเบส์สำหรับข้อมูลเชิงนับและประยุกต์ใช้กับข้อมูลสุขภาพ และยังมีงานวิจัยที่ได้ประยุกต์การเลือกตัวอย่างแบบกิบส์กับการเลือกตัวอย่างแบบอื่นๆ ภายใต้วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เช่น Kundu และ Gupta [14] ได้ประยุกต์ใช้การเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ร่วมกับการเลือกตัวอย่างจากการแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขที่มีคุณสมบัติเป็น log-concave เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่างและพารามิเตอร์บ่งขนาดของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังทั่วไป จากการศึกษางานวิจัยที่กล่าวมาแล้วข้างต้นสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ ส่วนใหญ่

พบว่าไม่สามารถหารูปแบบของการแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ได้ ซึ่งเป็นเพราะความซับซ้อนของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นและฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (posterior distribution) จึงได้ประมาณพารามิเตอร์แบบเบส์ด้วยขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ แต่ในบางตัวแบบผู้วิจัยสามารถหารูปแบบของการแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ได้ ซึ่งส่งผลให้สามารถประยุกต์ใช้การเลือกตัวอย่างแบบกิบส์เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ด้วย

ในงานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม รวมถึงนำขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ทั้ง 2 แบบมาประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ด้วย

2. วิธีการดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ภายใต้ข้อสมมติว่าทราบสารสนเทศความรู้ก่อนหน้าเกี่ยวกับพารามิเตอร์ โดยทำการศึกษาเปรียบเทียบ 4 ขั้นตอนวิธี ได้แก่ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ และขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ทั้ง 4 ขั้นตอนวิธีข้างต้นกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดด้วยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (mean square error, MSE)

2.1 การแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2

Gumbel [1] ได้นำเสนอการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 โดยได้นำไปประยุกต์ใช้สำหรับสร้างตัวแบบภายใต้ข้อมูลที่มีค่าสุดขีด (extreme value) ที่เกิดจากสถานการณ์ น้ำท่วม แผ่นดินไหว และภัยพิบัติทางธรรมชาติอื่นๆ ที่รุนแรง นอกจากนั้นยังได้นำมาประยุกต์ใช้สร้างตัวแบบข้อมูลช่วงชีวิต (lifetime data) เป็นต้น กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ซึ่งมีพารามิเตอร์ α และ β เมื่อ α คือพารามิเตอร์บ่งรูปร่าง (shape parameter) และ β คือพารามิเตอร์บ่งขนาด (scale parameter) ฟังก์ชันการแจกแจงและฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีรูปแบบตามลำดับดังนี้

$$F(x|\alpha,\beta)=e^{-\beta x^{-\alpha}} \tag{1}$$

$$f(x|\alpha,\beta)=\alpha\beta x^{-(\alpha+1)}e^{-\beta x^{-\alpha}} \tag{2}$$

เมื่อ $x>0$ และ $\alpha,\beta>0$

2.2 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 มีรูปแบบดังนี้

$$L(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})=\prod_{i=1}^{n}f(x_i|\alpha,\beta)=\alpha^n\beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\alpha+1)} \tag{3}$$

ฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 มีรูปแบบดังนี้

$$l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})=n\ln\alpha+n\ln\beta-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha} \tag{4}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ผู้วิจัยไม่สามารถเขียนตัวประมาณให้อยู่ในรูปของสูตรปิดได้ ดังนั้นจึงประยุกต์ใช้ฟังก์ชัน nlminb บนโปรแกรม R เพื่อประมาณตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimators, MLE) การแจกแจงร่วมเชิงเส้นกำกับ (asymptotic joint distribution) ของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\alpha}_{MLE}$ และ $\hat{\beta}_{MLE}$ ประมาณได้ด้วยการแจกแจงปรกติสองตัวแปร (approximately bivariate normal distribution) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้ $\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_{MLE}\\ \hat{\beta}_{MLE}\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}\right)$ เมื่อ $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

คือเวกเตอร์ของค่าเฉลี่ย และ $\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ คือเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของ $\hat{\alpha}_{MLE}$ และ $\hat{\beta}_{MLE}$ ซึ่งเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมนี้สามารถประมาณได้โดยเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ข้อสนเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์และแทนค่าพารามิเตอร์ α และ β ด้วย $\hat{\alpha}_{MLE}$ และ $\hat{\beta}_{MLE}$ ตามลำดับ

ให้ $I(\alpha,\beta)$ เป็นเมทริกซ์สารสนเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์ (observed fisher's information matrix) ของพารามิเตอร์ α และ β ที่มีขนาด 2 x 2 ซึ่งมีสมาชิกเป็นค่าลบของอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นเทียบกับ α และ β มีรูปแบบดังนี้

$$I(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\alpha^2} & -\dfrac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\alpha\partial\beta} \\ -\dfrac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\beta\partial\alpha} & -\dfrac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\beta^2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

เมื่อ
$$\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}(\ln x_i)^2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})}{\partial\beta\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\ln x_i \quad (8)$$

ดังนั้นค่าประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของ $\hat{\alpha}_{MLE}$ และ $\hat{\beta}_{MLE}$ คือ $I^{-1}(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE})$

2.3 การประมาณแบบเบส์

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β เมื่อทราบสารสนเทศความรู้ก่อนหน้าเกี่ยวกับพารามิเตอร์ภายใต้ข้อสมมติความเป็นอิสระต่อกันของพารามิเตอร์ โดยฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของการแจกแจงก่อนของ α และ β คือ $\pi(\alpha,\beta)=\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)$ เนื่องจากพารามิเตอร์ $\alpha,\beta>0$ ผู้วิจัยจึงกำหนดให้การแจกแจงก่อนของ α และ β คือการแจกแจงแกมมา ซึ่งเหมือนกับงานวิจัยของ Abbas และคณะ [3] ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของพารามิเตอร์ α และ β มีรูปแบบดังนี้

$$\pi_1(\alpha) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\alpha^{a_1-1}e^{-b_1\alpha} \ ; \ a_1>0, b_1>0 \ \text{และ}$$

$$\pi_2(\beta) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta} \ ; \ a_2>0, b_2>0$$

การแจกแจงภายหลัง (posterior distribution) ของ α และ β มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมคือ

$$p(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x}) \propto L(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x})\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)$$

การแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไข (conditional posterior distributions) ของ α และ β มีรูปแบบตามลำดับดังนี้

$$p(\beta|\underset{\sim}{x},\alpha) \propto \beta^{(n+a_2)-1}e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+b_2)} \quad (9)$$

และ

$$p(\alpha|\underset{\sim}{x},\beta) \propto \alpha^{(n+a_1)-1}e^{-(b_1+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)\alpha-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}} \quad (10)$$

ซึ่งในสมการ (9) การแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของ β มีการแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $n+a_2$ และ $\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+b_2$ ส่วนการแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของ ในสมการ (10) ไม่สามารถจัดให้อยู่ในการแจกแจงใดๆ ได้

ในงานวิจัยนี้ได้นำขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ (metropolis-hastings algorithm) ซึ่งได้แก่ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ (independent metropolis-hastings algorithm, IMH) และขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม (random walk metropolis algorithm, RWM) มาประมาณค่าทั้งพารามิเตอร์ α และ

β นอกจากนั้นได้ประยุกต์ใช้การเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (gibbs sampling) มาประมาณค่าพารามิเตอร์ β ร่วมกับขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์เพื่อประมาณพารามิเตอร์ α ตามลำดับ

2.3.1 ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ (independent metropolis-hastings algorithm, IMH)

กำหนดให้ $\left(\alpha^*,\beta^*\right)$ คือค่าประมาณที่เป็นไปได้ (candidate value) ที่สร้างจากการแจกแจงนำเสนอ (proposal distribution) $q\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\alpha,\beta\right)$ ซึ่ง (α^*,β^*) จะถูกยอมรับด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $\min\{1,R_{IMH}\}$ เมื่อ

$$R_{IMH}=\frac{L\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^*,\beta^*)}{L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha,\beta)}\times\frac{q\left(\alpha,\beta\middle|\alpha^*,\beta^*\right)}{q\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\alpha,\beta\right)}$$

การแจกแจงนำเสนอในขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ จะไม่ขึ้นอยู่กับสถานะปัจจุบันของ α,β นั่นคือ

$$q(\alpha^*,\beta^*\mid\alpha,\beta)=q(\alpha^*,\beta^*)$$

ในงานวิจัยนี้จะกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงนำเสนอให้เท่ากับการแจกแจงก่อน เช่นเดียวกับงานวิจัยของ Saraiva และ Suzuki [11] ดังนั้น

$$R_{IMH}=\frac{L\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^*,\beta^*)}{L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha,\beta)}\times\frac{q\left(\alpha,\beta\right)}{q\left(\alpha^*,\beta^*\right)}=\frac{L\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^*,\beta^*)}{L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha,\beta)}\times\frac{\pi(\alpha,\beta)}{\pi(\alpha^*,\beta^*)}=\frac{L\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\underset{\sim}{x}\right)}{L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)}\qquad(11)$$

กำหนดให้ $(\alpha^{(l-1)},\beta^{(l-1)})$ เป็นสถานะปัจจุบันของโซ่มาร์คอฟ เมื่อ l คือการวนซ้ำรอบที่ l , $l=1,2,...,L$ และกำหนดให้ค่าเริ่มต้นคือ $\alpha^{(0)},\beta^{(0)}$ โดยขั้นตอนวิธีสามารถอธิบายได้ดังนี้

(1) จำลอง และ $\alpha^*\sim Gamma(a_1,b_1)$ และ $\beta^*\sim Gamma(a_2,b_2)$

(2) คำนวณ $p=\min\{1,R_{IMH}\}$ เมื่อ

$$R_{IMH}=\frac{L\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\underset{\sim}{x}\right)}{L\left(\alpha^{(l-1)},\beta^{(l-1)}\middle|\underset{\sim}{x}\right)}$$

(3) จำลอง $u\sim U(0,1)$ ถ้า $u\le p$ ให้ $\alpha^{(l)}=\alpha^*$และ $\beta^{(l)}=\beta^*$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p

หรือถ้า $u>p$ให้ $\alpha^{(l)}=\alpha^{(l-1)}$ และ $\beta^{(l)}=\beta^{(l-1)}$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $1-p$

2.3.2 ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม (random walk metropolis algorithm, RWM)

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มจะมีกระบวนการยอมรับ α^* และ β^* ในลักษณะเช่นเดียวกับขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ แตกต่างกันที่ฟังก์ชันการแจกแจงนำเสนอ (proposal distribution) ในขั้นตอนวิธีนี้ฟังก์ชันการแจกแจงนำเสนอจะมีลักษณะสมมาตร ซึ่งทำให้ $q\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\alpha,\beta\right)=q\left(\alpha,\beta\middle|\alpha^*,\beta^*\right)$ ดังนั้น

$$R_{RWM}=\frac{L\left(\alpha^*,\beta^*\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^*,\beta^*)}{L\left(\alpha,\beta\middle|\underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha,\beta)}\qquad(12)$$

กำหนดให้ $(\alpha^{(l-1)},\beta^{(l-1)})$ เป็นสถานะปัจจุบันของโซ่มาร์คอฟ เมื่อ l คือการวนซ้ำรอบที่ l , $l=1,2,...,L$ และกำหนดให้ค่าเริ่มต้นคือ $\alpha^{(0)},\beta^{(0)}$ โดยขั้นตอนวิธีสามารถอธิบายได้ดังนี้

(1) จำลอง $\underset{\sim}{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)'$ จากการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร (multivariate normal distribution) ที่มีเวกเตอร์ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\underset{\sim}{0}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\begin{bmatrix}\sigma_\alpha^2 & 0\\ 0 & \sigma_\beta^2\end{bmatrix}$ และให้ $\alpha^*=\alpha^{(l-1)}+\varepsilon_1$ และ $\beta^*=\beta^{(l-1)}+\varepsilon_2$

(2) คำนวณ $p = \min\{1, R_{RWM}\}$ เมื่อ

$$R_{RWM} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta^* \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^*, \beta^*)}{L\left(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l-1)} \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l-1)})}$$

(3) จำลอง $u \sim U(0,1)$ ถ้า $u \le p$ ให้ $\alpha^{(l)} = \alpha^*$ และ $\beta^{(l)} = \beta^*$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p

หรือถ้า $u > p$ ให้ $\alpha^{(l)} = \alpha^{(l-1)}$ ให้ $\beta^{(l)} = \beta^{(l-1)}$ และ $1-p$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ

2.3.3 ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (independent metropolis-hastings algorithm with gibbs sampling, IMHG)

ผู้วิจัยจะประมาณค่าพารามิเตอร์ β ด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์และประมาณค่าพารามิเตอร์ α ด้วยขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ แบบอิสระ

กำหนดให้ $(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l-l)})$ เป็นสถานะปัจจุบันของโซ่มาร์คอฟ เมื่อ l คือการวนซ้ำรอบที่ $l,\ l = 1, 2, ..., L$ จำลอง $\beta^{(l)} \sim Gamma(n + a_2, \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha^{(l-1)}} + b_2)$ เมื่อ $\alpha^{(l-1)}$ คือค่าประมาณของพารามิเตอร์ α ของรอบการวนซ้ำที่ $l-1$ และ $\alpha^{(0)}$ ค่าเริ่มต้นของพารามิเตอร์ α

กำหนดให้ α^* คือค่าประมาณที่เป็นไปได้ (candidate value) ที่สร้างจากการแจกแจงนำเสนอ (proposal distribution) $q\left(\alpha^* \middle| \alpha\right)$ ซึ่ง α^* จะถูกยอมรับด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $\min\{1, R_{IMHG}\}$ เมื่อ

$$R_{IMHG} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha^*)}{L\left(\alpha, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha)} \times \frac{q\left(\alpha \middle| \alpha^*\right)}{q\left(\alpha^* \middle| \alpha\right)}$$

การแจกแจงนำเสนอในขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์อิสระ จะไม่ขึ้นอยู่กับสถานะปัจจุบันของ α นั่นคือ

$$q\left(\alpha^* \middle| \alpha\right) = q\left(\alpha^*\right)$$

ในงานวิจัยนี้จะกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงนำเสนอให้เท่ากับการแจกแจงก่อน เช่นเดียวกับงานวิจัยของ Saraiva และ Suzuki [11] ดังนั้น

$$R_{IMHG} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha^*)}{L\left(\alpha, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha)} \times \frac{q\left(\alpha\right)}{q\left(\alpha^*\right)} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha^*)}{L\left(\alpha, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha)} \times \frac{\pi_1(\alpha)}{\pi_1(\alpha^*)} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)}{L\left(\alpha, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)} \tag{13}$$

กำหนดให้ $(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l)})$ เป็นสถานะปัจจุบันของโซ่มาร์คอฟ เมื่อ l คือการวนซ้ำรอบที่ $l,\ l = 1, 2, ..., L$ และกำหนดให้ค่าเริ่มต้นคือ $\alpha^{(0)}$ โดยขั้นตอนวิธีสามารถอธิบายได้ดังนี้

(1) จำลอง $\alpha^* \sim Gamma(a_1, b_1)$

(2) คำนวณ $p = \min\{1, R_{IMHG}\}$ เมื่อ

$$R_{IMHG} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta^{(l)} \middle| \underset{\sim}{x}\right)}{L\left(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l)} \middle| \underset{\sim}{x}\right)}$$

(3) จำลอง $u \sim U(0,1)$ ถ้า $u \le p$ ให้ $\alpha^{(l)} = \alpha^*$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p หรือถ้า $u > p$ ให้ $\alpha^{(l)} = \alpha^{(l-1)}$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $1-p$

2.3.4 ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (random walk metropolis algorithm with gibbs sampling, RWMG)

ผู้วิจัยจะประมาณค่าพารามิเตอร์ β ด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์และประมาณค่าพารามิเตอร์ α ด้วยขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ แบบเดินสุ่ม

กำหนดให้ $(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l-l)})$ เป็นสถานะปัจจุบันของโซ่มาร์คอฟ เมื่อ l คือการวนซ้ำรอบที่ $l,\ l = 1, 2, ..., L$ จำลอง $\beta^{(l)} \sim Gamma(n + a_2, \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha^{(l-1)}} + b_2)$ เมื่อ $\alpha^{(l-1)}$ คือค่าประมาณของพารามิเตอร์ α ของรอบการวนซ้ำที่ $l-1$ และ $\alpha^{(0)}$ ค่าเริ่มต้นของพารามิเตอร์ α

การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม ฟังก์ชันการแจกแจงนำเสนอ (proposal distribution) จะมีลักษณะสมมาตรซึ่งทำให้ $q\left(\alpha^* \middle| \alpha\right) = q\left(\alpha \middle| \alpha^*\right)$ กระบวนการยอมรับ α^* จะมีลักษณะเช่นเดียวกับขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ ดังนั้น

$$R_{RWMG} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha^*)}{L\left(\alpha, \beta \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi_1(\alpha)} \tag{14}$$

กำหนดให้ $(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l)})$ เป็นสถานะปัจจุบันของโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) เมื่อ l คือการวนซ้ำรอบที่ l , $l = 1, 2, ..., L$ โดยขั้นตอนวิธีสามารถอธิบายได้ดังนี้

(1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\alpha^{(0)}$

(2) จำลอง $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$ และให้ $\alpha^* = \alpha^{(l-1)} + \varepsilon$

(3) คำนวณ $p = \min\{1, R_{RWMG}\}$ เมื่อ

$$R_{RWMG} = \frac{L\left(\alpha^*, \beta^{(l)} \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^*)}{L\left(\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l)} \middle| \underset{\sim}{x}\right)\pi(\alpha^{(l-1)})}$$

(4) จำลอง $u \sim U(0,1)$

ถ้า $u \le p$ ให้ $\alpha^{(l)} = \alpha^*$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p หรือถ้า $u > p$ ให้ $\alpha^{(l)} = \alpha^{(l-1)}$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $1 - p$ ตัวประมาณแบบเบส์ของ α และ β จากขั้นตอนวิธีข้างต้นมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{L - L_0} \sum_{l=L_0+1}^{L} \alpha^{(l)} \text{ และ } \hat{\beta}_k = \frac{1}{L - L_0} \sum_{l=L_0+1}^{L} \beta^{(l)}$$

เมื่อ L คือจำนวนรอบวนซ้ำมอนติคาร์โล และ L_0 คือจำนวน burn-in period ซึ่งสูตรข้างต้นเป็นการประมาณค่าเฉลี่ยเพื่อที่จะให้โซ่มาร์คอฟเข้าใกล้กระบวนการคงที่ก่อน (convergence to stationary)

2.4 การศึกษาโดยใช้การจำลอง

ในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม R จำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล โดยกำหนดสถานการณ์ต่างๆ ดังนี้

(1) กำหนดขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 20 50 และ 100

(2) กำหนดจำนวนรอบทำซ้ำเท่ากับ 1,000 รอบ

(3) จำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ที่มีพารามิเตอร์ $\alpha = 0.5, 1, 2, 3, 4$ และ $\beta = 0.5, 1, 2$

(4) กำหนดพารามิเตอร์ (a_1, b_1) และ (a_2, b_2) ให้สอดคล้องกับค่าคาดหมายของ α และ β ที่มีการแจกแจงแกมมาตามลำดับ เช่น กรณี $\alpha = 1$ ให้ $a_1 = 1, b_1 = 1$ และ $\beta = 2$ ให้ $a_2 = 1, b_2 = 1/2$

(5) คำนวณตัวประมาณของพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีแบบเบส์ด้วยขั้นตอนวิธี IMH RWM IMHG และ RWMG ผู้วิจัยกำหนดค่าเริ่มต้น $\left(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}\right)$ คือตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ส่วนในขั้นตอนวิธี RWM และ RWMG ผู้วิจัยกำหนด σ_α^2 และ σ_β^2 เท่ากับค่าประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่มีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับปรกติ นอกจากนั้นในขั้นตอนวิธี IMH RWM IMHG และ RWMG จะทำการวนซ้ำในโซ่มาร์คอฟ (L) 10,000 รอบ และกำหนดจำนวน burn-in period (L_0) 1,000 รอบ ซึ่งการกำหนดรอบการวนซ้ำและจำนวน burn-in period จะกำหนดเช่นเดียวกันกับงานวิจัยของ Moala และคณะ [9]

(6) ทำซ้ำข้อ 3-5 จำนวน 1,000 รอบ

(7) คำนวณค่าเฉลี่ยและค่าประมาณความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณทั้ง 5 วิธี จากการทำซ้ำ 1,000 รอบ ค่าเฉลี่ย (Average) มีรูปแบบดังนี้ $\bar{\hat{\alpha}} = \frac{1}{1,000} \sum_{k=1}^{1,000} \hat{\alpha}_k$ และ $\bar{\hat{\beta}} = \frac{1}{1,000} \sum_{k=1}^{1,000} \hat{\beta}_k$ และค่าประมาณความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มีรูปแบบดังนี้ $MSE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{1,000} \sum_{k=1}^{1,000} \left(\hat{\alpha}_k - \alpha\right)^2$ และ

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{1,000} \sum_{k=1}^{1,000} \left(\hat{\beta}_k - \beta\right)^2$$

2.5 การศึกษาโดยใช้ข้อมูลจริง

ผู้วิจัยได้ใช้ข้อมูลระยะเวลารอดชีวิต (หน่วยเป็นเดือน) ของผู้ป่วยมะเร็งเม็ดเลือดขาวชนิดไมอีลอยด์เฉียบพลันจำนวน 20 ราย ซึ่งเป็นตัวอย่างในงานวิจัยของ Okorie และคณะ [4] ดังนี้

2.226	2.113	3.631	2.473	2.720	2.050	2.061	3.915	0.871	1.548
2.746	1.972	2.265	1.200	2.967	2.808	1.079	2.353	0.726	1.958

ผู้วิจัยนำข้อมูลข้างต้นมาทดสอบการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ด้วยการทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (kolmogorov-smirnov test) และประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์จากทั้ง 4 วิธี รวมถึงคำนวณรากที่สองของคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (square root of mean square error, RMSE) [11] เพื่อวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{F}(x_i) - F(x_i)\right)^2}$$

เมื่อ $\hat{F}(x_i)$ คือค่าประมาณฟังก์ชันการแจกแจง (the distribution function) ที่ได้จากการแทนค่าตัวประมาณ $F(x_i)$ คือฟังก์ชันการแจกแจงเชิงประจักษ์ (the empirical distribution function) และ n คือขนาดตัวอย่าง

3. ผลการวิจัย

ในส่วนนี้จะแสดงผลลัพธ์จากการจำลองสถานการณ์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพ 4 ขั้นตอนวิธีสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่าง α และพารามิเตอร์บ่งขนาด β แบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ซึ่งได้แก่ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ (IMH) ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม (RWM) ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (IMHG) และขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (RWMG) นอกจากนั้นยังนำวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) มาเปรียบเทียบร่วมด้วย ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิจัยในรูปแบบตารางโดยบรรทัดแรกแสดงค่าเฉลี่ย (Average) ของตัวประมาณ α และ β และบรรทัดที่สองแสดงค่าประมาณความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของตัวประมาณ α และ β จากการทำซ้ำ 1,000 รอบ ซึ่งตัวประมาณที่ให้ค่าประมาณ MSE ต่ำที่สุดจะเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด โดยผู้วิจัยได้ทำตัวเข้มสำหรับวิธีที่ให้ค่าประมาณ MSE ต่ำที่สุด ดังตารางที่ 1-3 ภายใต้พารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างที่แตกต่างกัน จากตารางที่ 1-3 พบว่า ทั้ง 5 วิธีเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณมีแนวโน้มเข้าใกล้ค่าพารามิเตอร์จริงและค่าประมาณ MSE มีแนวโน้มลดลงทุกสถานการณ์ นอกจากนั้นในตารางที่ 4 ได้แสดงผลจากการนำวิธีการประมาณแบบเบส์ทั้ง 4 ขั้นตอนวิธีวิธีมาประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

3.1 ผลจากการจำลอง

จากตารางที่ 1 เป็นสถานการณ์ที่กำหนด $\beta = 0.5$ สำหรับการประมาณค่า α สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 100$ และ $\alpha = 3$ ที่ $n = 50$ วิธี IMHG จะมีประสิทธิภาพดีกว่า นอกจากนั้นยังพบว่าในกรณี $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 50,100$ วิธี IMH และ IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับ วิธี RWM สำหรับการประมาณค่า β สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 100$ วิธี IMHG จะมีประสิทธิภาพดีกว่า และ $\alpha = 3$ ที่ $n = 20$ วิธี RWMG จะมีประสิทธิภาพดีกว่า นอกจากนั้นยังพบว่าสถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับ วิธี RWM ยกเว้นกรณี $\alpha = 0.5, 2$ ที่ $n = 50$

วิธี RWM จะมีประสิทธิภาพดีกว่า และ $\alpha = 3$ ที่ $n = 20$ วิธี RWMG จะมีประสิทธิภาพดีกว่า ยิ่งไปกว่านั้นวิธี RWMG มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับวิธี RWM เมื่อ $\alpha = 1$ ที่ $n = 20$, $\alpha = 3$ ที่ทุกขนาดตัวอย่าง และ $\alpha = 4$ ที่ $n = 20,50$ รวมถึง IMH มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับ วิธี RWM เมื่อ $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 20$ และ $\alpha = 1$ ที่ $n = 50$ ส่วนวิธี MLE เกือบทุกกรณีจะให้ประสิทธิภาพต่ำกว่าวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ แต่จะใกล้เคียงเมื่อ $n = 100$

จากตารางที่ 2 เป็นสถานการณ์ที่กำหนด $\beta = 1$ สำหรับการประมาณค่า α สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 1$ ที่ $n = 50$, $\alpha = 3$ ที่ $n = 20$ และ $\alpha = 4$ ที่ $n = 100$ วิธี IMHG จะมีประสิทธิภาพดีกว่า และกรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 20$ พบว่าวิธี IMH และ RWMG จะมีประสิทธิภาพดีกว่า นอกจากนั้นยังพบว่าในกรณี $\alpha = 0.5,1$ ที่ทุกขนาดตัวอย่าง วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับวิธี RWM และกรณี $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 100$ วิธี IMH มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับวิธี RWM เช่นกัน สำหรับการประมาณค่า β สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้น กรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 50$ วิธี IMH จะมีประสิทธิภาพดีกว่า นอกจากนั้นยังพบว่าวิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับวิธี IMHG เมื่อ $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 20,100$, $\alpha = 1$ ที่ $n = 100$, $\alpha = 3$ ที่ $n = 50,100$ และ $\alpha = 4$ ที่ $n = 100$ ยิ่งไปกว่านั้นวิธี RWMG มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับ วิธี IMHG เช่นกัน เมื่อ $\alpha = 3$ ที่ $n = 50,100$ และ $\alpha = 4$ ที่ทุกขนาดตัวอย่าง รวมถึงวิธี IMH ประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับวิธี IMHG เมื่อ $\alpha = 0\ 5$ ที่ $n = 20$ ส่วนวิธี MLE เกือบทุกกรณีจะให้ประสิทธิภาพต่ำกว่าวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ แต่จะใกล้เคียงในกรณีที่ $n = 100$

จากตารางที่ 3 เป็นสถานการณ์ที่กำหนด $\beta = 2$ สำหรับการประมาณค่า α เมื่อ $\alpha = 0.5,1,2$ สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 1$ ที่ $n = 20$ วิธี RWM จะมีประสิทธิภาพดีกว่า ยิ่งไปกว่านั้นยังพบว่า RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุดเช่นเดียวกันกับวิธี IMGH ยกเว้น กรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 20,100$ วิธี IMGH จะมีประสิทธิภาพดีกว่า ส่วนกรณี $\alpha = 3,4$ ที่ $n = 20$ วิธี IMH มีประสิทธิภาพมากที่สุด กรณี $\alpha = 3$ ที่ $n = 50$ วิธี RWM และ IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด กรณี $\alpha = 4$ ที่ $n = 50$ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุด และกรณี $\alpha = 3,4$ ที่ $n = 100$ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุด สำหรับการประมาณค่า β พบว่าผลลัพธ์ค่อนข้างหลากหลาย ผู้วิจัยจึงสรุปแต่ละวิธีภายใต้สถานการณ์ต่างๆ ดังนี้ วิธี IMH มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณี $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 20,100$ และกรณี $\alpha = 1$ ที่ $n = 20$ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณีที่ $\alpha = 0.5,3$ ที่ $n = 50$ วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณี $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 100$, $\alpha = 1$ ที่ $n = 50$, $\alpha = 2$ ที่ $n = 20,100$, $\alpha = 3$ ที่ $n = 20$ และ $\alpha = 4$ ที่ $n = 50$ และวิธี RWMG มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณี $\alpha = 1$ ที่ $n = 100$, $\alpha = 2$ ที่ $n = 50$ และ $\alpha = 3,4$ ที่ $n = 20,100$ ส่วนวิธี MLE ทุกกรณีจะให้ประสิทธิภาพต่ำกว่าวิธีการประมาณค่าแบบเบส์

3.2 ผลจากการใช้ข้อมูลจริง

การทดสอบการแจกแจงของข้อมูลระยะเวลารอดชีวิต (หน่วยเป็นเดือน) ของผู้ป่วยมะเร็งเม็ดเลือดขาวชนิดไมอีลอยด์เฉียบพลันจำนวน 20 ราย ด้วยการทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ พบว่าค่า D = 0.25 และ p-value = 0.5713 สรุปได้ว่าข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 จากนั้นผู้วิจัยได้ประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์และค่า RMSE ด้วยวิธี IMH RWM IMHG และ RWMG ตามลำดับ ได้ผลดังนี้ ค่าประมาณ α คือ 2.0632, 2.0429, 2.0526 และ 2.0582 ตามลำดับ ส่วนค่าประมาณ β คือ 2.5874, 2.5562, 2.5905 และ 2.5833 ตามลำดับ และค่า RMSE คือ 0.1050, 0.1053, 0.1046 และ 0.1049 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE จากทั้ง 4 วิธี พบว่าวิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยิ่งไปกว่านั้นเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับสถานการณ์จาก

การจำลองเมื่อ α เท่ากับ 2 และ β เท่ากับ 2 เมื่อ n เท่ากับ 20 ในตารางที่ 3 ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่ใกล้เคียงกับค่าประมาณพารามิเตอร์จากข้อมูลจริง พบว่า ค่า MSE และ RMSE ให้ผลสอดคล้องกัน นั่นคือวิธีประมาณที่ให้ค่า MSE และ RMSE ต่ำที่สุดคือ วิธี IMHG

4. สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 ภายใต้ขอบเขตที่ทราบสารสนเทศความรู้ก่อนหน้าเกี่ยวกับพารามิเตอร์ โดยกำหนดการแจกแจงก่อนคือการแจกแจงแกมมา ซึ่งจะส่งผลให้การแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์บ่งขนาด เป็นการแจกแจงแกมมา แต่การแจกแจงภายหลังแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์บ่งรูปร่างไม่สามารถจัดให้อยู่ในการแจกแจงใดๆ ได้ ผู้วิจัยจึงใช้การเลือกตัวอย่างในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาคอร์ฟเพื่อประยุกต์การประมาณค่าตัวประมาณแบบเบส์ ซึ่งประกอบด้วย 4 วิธี ได้แก่ ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระ (IMH) ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม (RWM) ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (IMHG) และขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ (RWMG) นอกจากนั้นยังนำวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) มาเปรียบเทียบร่วมด้วย โดยใช้เกณฑ์ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) จากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลภายใต้การกำหนดสถานการณ์ที่ขนาดตัวอย่าง n แตกต่างกัน ค่าพารามิเตอร์ α แตกต่างกัน และค่าพารามิเตอร์ β แตกต่างกัน ซึ่งพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ทั้ง 5 วิธี ค่า MSE มีแนวโน้มลดลงทุกสถานการณ์ แสดงให้เห็นว่าตัวประมาณมีค่าเข้าใกล้พารามิเตอร์ นั่นคือตัวประมาณเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา นอกจากนั้นพบว่าวิธี MLE มีประสิทธิภาพต่ำกว่าวิธีอื่นๆ เกือบทุกสถานการณ์ แต่จะให้ประสิทธิภาพใกล้เคียงกับวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 100$

เมื่อพิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งขนาด α กรณีที่กำหนด β เท่ากับ 0.5 สถานการณ์โดยส่วนใหญ่วิธี RWM จะมีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 100$ และ $\alpha = 3$ ที่ $n = 50$ วิธี IMHG จะมีประสิทธิภาพมากที่สุด กรณีที่กำหนด β เท่ากับ 1 สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM และวิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 20$ วิธี IMH และ RWMG มีประสิทธิภาพมากที่สุด และกรณีที่กำหนด β เท่ากับ 2 สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM และ IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 3,4$ ที่ $n = 20$ วิธี IMH จะมีประสิทธิภาพมากที่สุด

ในส่วนของประมาณค่าพารามิเตอร์บ่งขนาด β กรณีที่กำหนด β เท่ากับ 0.5 สถานการณ์โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM และ IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 3$ ที่ $n = 20$ วิธี RWMG มีประสิทธิภาพมากที่สุด กรณีที่กำหนด β เท่ากับ 1 วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยกเว้นกรณี $\alpha = 2$ ที่ $n = 50$ วิธี IMH มีประสิทธิภาพมากที่สุด และกรณีที่กำหนด β เท่ากับ 2 พบว่าวิธีที่มีประสิทธิภาพดีที่สุดค่อนข้างหลากหลาย ผู้วิจัยจึงสรุปผลการวิจัยในแต่ละวิธีดังนี้ วิธี IMH มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณี $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 20,100$ และกรณี $\alpha = 1$ ที่ $n = 20$ วิธี RWM มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณีที่ $\alpha = 0.5,3$ ที่ $n = 50$ วิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณี $\alpha = 0.5$ ที่ $n = 100$, $\alpha = 1$ ที่ $n = 50$, $\alpha = 2$ ที่ $n = 20,100$, $\alpha = 3$ ที่ $n = 20$ และ $\alpha = 4$ ที่ $n = 50$ และวิธี RWMG มีประสิทธิภาพมากที่สุดในกรณี $\alpha = 1$ ที่ $n = 100$, $\alpha = 2$ ที่ $n = 50$ และ $\alpha = 3,4$ ที่ $n = 20,100$ นอกจากนั้นจากการนำข้อมูลจริงมาประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ทั้ง 4 วิธี พบว่าผลที่ได้สอดคล้องกับผลที่ได้จากการจำลองข้อมูล นั่นคือวิธี IMHG มีประสิทธิภาพมากที่สุด

5. วิจารณ์และข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้เป็นผลที่ได้จากการศึกษาภายใต้สถานการณ์ที่กำหนดเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ของการแจกแจงกัมเบลแบบที่ 2 โดยใช้วิธีการเลือกตัวอย่างในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟซึ่งเป็นการประมาณโดยใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์เพียงวิธีเดียว และประมาณโดยใช้ขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ประยุกต์ใช้ร่วมกับการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ โดยสรุปจากจำลองภายใต้สถานการณ์ต่างๆ โดยส่วนใหญ่ วิธี RWM และวิธี IMHG ให้ประสิทธิภาพดีที่สุด ในส่วนของขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์ประยุกต์ร่วมกับวิธีการเลือกตัวอย่างแบบกิบส์ จะสอดคล้องกับงานวิจัยของ Saraiva และ Suzuki [11] แต่จะมีบางสถานการณ์ที่บางวิธีให้ประสิทธิภาพดีกว่าวิธี RWM และวิธี IMHG อาจเป็นเพราะการเลือกการแจกแจงนำเสนอคือการแจกแจงแกมมาในขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิส-แฮสติงส์แบบอิสระจึงอาจจะส่งผลให้โซ่มาร์คอฟลู่เข้าสู่การแจกแจงเดียวกันช้าหรือเร็ว ซึ่งทำให้ส่งผลต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณ ในงานวิจัยต่อไปจะพิจารณาใช้การแจกแจงนำเสนอนอกเหนือจากงานวิจัยนี้ เช่น การแจกแจงปรกติหลายตัวแปร โดยใช้แนวคิดจากตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีคุณสมบัติเป็นการแจกแจงเชิงเส้นกำกับปรกติ นอกจากนั้นการประมาณความแปรปรวนของการแจกแจงปรกติหลายตัวแปรในขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่มอาจจะส่งผลให้โซ่มาร์คอฟลู่เข้าสู่การแจกแจงเดียวกันช้าหรือเร็วเช่นเดียวกัน ในงานวิจัยต่อไปจะศึกษาถึงการกำหนดความแปรปรวนในขั้นตอนวิธีเมโทรโพลิสแบบเดินสุ่ม เพื่อให้เห็นถึงอัตราส่วนของการยอมรับตัวประมาณในโซ่มาร์คอฟซึ่งอาจจะส่งผลต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณ

Table 1 Average of estimates and MSE for β=0.5, different values of α and different sample sizes

α	n	Methods									
		MLE		IMH		RWM		IMHG		RWMG	
		α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
0.5	20	0.5401	0.5042	0.5323	0.5110	0.5317	0.5121	0.5324	0.5111	0.5328	0.5107
		0.0129	0.0240	0.0104	**0.0190**	**0.0103**	**0.0190**	0.0104	**0.0190**	0.0109	0.0193
	50	0.5117	0.5037	0.5094	0.5072	0.5096	0.5067	0.5095	0.5069	0.5097	0.5068
		0.0038	0.0098	**0.0035**	0.0090	**0.0035**	**0.0088**	**0.0035**	0.0089	0.0040	0.0095
	100	0.5059	0.5040	0.5050	0.5058	0.5050	0.5056	0.5051	0.5056	0.5059	0.5047
		0.0016	0.0044	**0.0016**	0.0043	**0.0016**	**0.0042**	**0.0016**	**0.0042**	0.0020	0.0046
1	20	1.0625	0.5057	1.0487	0.5119	1.0473	0.5130	1.0481	0.5123	1.0477	0.5125
		0.0446	0.0224	0.0369	0.0178	**0.0362**	**0.0177**	0.0368	0.0178	0.0366	**0.0177**
	50	1.0318	0.4972	1.0271	0.5007	1.0272	0.5007	1.0274	0.5006	1.0276	0.5005
		0.0147	0.0092	0.0137	**0.0084**	**0.0136**	**0.0084**	0.0137	**0.0084**	0.0143	0.0085
	100	1.0153	0.4982	1.0131	0.5002	1.0133	0.5001	1.0132	0.5001	1.0136	0.4999
		0.0064	0.0043	0.0064	0.0042	**0.0062**	**0.0041**	0.0063	**0.0041**	0.0067	0.0042
2	20	2.0564	0.5009	2.0468	0.5044	2.0479	0.5040	2.0480	0.5042	2.0482	0.5040
		0.0623	0.0104	0.0578	0.0095	**0.0575**	**0.0094**	0.0578	**0.0094**	0.0583	0.0095
	50	2.1328	0.5041	2.1023	0.5112	2.1011	0.5117	2.1041	0.5107	2.1038	0.5109
		0.1816	0.0245	0.1486	0.0194	**0.1467**	**0.0192**	0.1488	0.0193	0.1493	0.0193
	100	2.0247	0.5017	2.0204	0.5040	2.0209	0.5035	2.0213	0.5033	2.0213	0.5034
		0.0270	0.0043	0.0263	0.0042	0.0262	0.0042	**0.0261**	**0.0041**	0.0266	0.0042
3	20	3.1878	0.5111	3.1460	0.5173	3.1419	0.5181	3.1450	0.5172	3.1476	0.5168
		0.4367	0.0234	0.3591	0.0187	**0.3566**	0.0186	0.3602	0.0186	0.3594	**0.0185**
	50	3.0817	0.5015	3.0687	0.5049	3.0681	0.5050	3.0679	0.5048	3.0695	0.5046
		0.1290	0.0096	0.1208	0.0088	0.1192	**0.0087**	**0.1183**	**0.0087**	0.1199	**0.0087**
	100	3.0435	0.4999	3.0374	0.5019	3.0372	0.5019	3.0376	0.5017	3.0385	0.5016
		0.0587	0.0041	0.0572	0.0040	**0.0564**	**0.0039**	0.0569	**0.0039**	0.0569	**0.0039**
4	20	4.3063	0.5038	4.2454	0.5107	4.2414	0.5116	4.2453	0.5108	4.2447	0.5108
		0.7800	0.0238	0.6402	0.0189	**0.6332**	**0.0188**	0.6359	**0.0188**	0.6384	**0.0188**
	50	4.1399	0.5016	4.1247	0.5046	4.1214	0.5049	4.1227	0.5048	4.1208	0.5051
		0.2494	0.0098	0.2303	0.0090	**0.2294**	**0.0089**	0.2303	**0.0089**	0.2312	**0.0089**
	100	4.0219	0.5061	4.0164	0.5076	4.0151	0.5076	4.0150	0.5077	4.0143	0.5078
		0.0964	0.0042	0.0962	0.0041	**0.0932**	**0.0040**	0.0938	**0.0040**	0.0934	0.0041

Table 2 Average of estimates and MSE for $\beta=1$, different values of α and different sample sizes

α	n	Methods									
		MLE		IMH		RWM		IMHG		RWMG	
		α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
0.5	20	0.5152	1.0149	0.5133	1.0136	0.5132	1.0126	0.5134	1.0129	0.5132	1.0128
		0.0039	0.0233	**0.0037**	**0.0217**	**0.0037**	**0.0217**	**0.0037**	**0.0217**	0.0039	0.0219
	50	0.5361	1.0433	0.5299	1.0348	0.5298	1.0354	0.5298	1.0355	0.5294	1.0357
		0.0120	0.0756	0.0124	0.0627	**0.0104**	0.0627	**0.0104**	**0.0626**	0.0107	0.0631
	100	0.5052	1.0078	0.5044	1.0070	0.5044	1.0068	0.5043	1.0069	0.5036	1.0076
		0.0016	0.0114	**0.0016**	0.0112	**0.0016**	**0.0110**	**0.0016**	**0.0110**	0.0021	0.0114
1.0	20	1.0715	1.0334	1.0587	1.0267	1.0582	1.0267	1.0585	1.0262	1.0587	1.0262
		0.0488	0.0818	0.0423	0.0680	**0.0421**	0.0677	**0.0421**	**0.0676**	0.0431	0.0677
	50	1.0288	1.0131	1.0246	1.0112	1.0250	1.0110	1.0248	1.0112	1.0264	1.0107
		0.0148	0.0249	0.0141	0.0234	0.0141	0.0233	**0.0140**	**0.0232**	0.0147	0.0233
	100	1.0144	1.0059	1.0129	1.0049	1.0127	1.0048	1.0129	1.0049	1.0126	1.0050
		0.0065	0.0117	0.0064	0.0116	**0.0063**	**0.0113**	**0.0063**	**0.0113**	0.0066	0.0114
2.0	20	2.1685	1.0411	2.1417	1.0332	2.1423	1.0343	2.1424	1.0334	2.1408	1.0338
		0.1989	0.0781	**0.1723**	0.0649	0.1734	0.0650	0.1727	**0.0645**	**0.1723**	0.0646
	50	2.0562	1.0113	2.0477	1.0094	2.0487	1.0092	2.0485	1.0094	2.0480	1.0096
		0.0537	0.0232	0.0512	**0.0215**	**0.0510**	0.0216	**0.0510**	0.0217	0.0511	0.0216
	100	2.0241	1.0126	2.0209	1.0117	2.0204	1.0119	2.0203	1.0118	2.0219	1.0114
		0.0245	0.0119	0.0245	0.0116	**0.0238**	0.0116	0.0239	**0.0115**	0.0244	0.0116
3.0	20	3.2351	1.0275	3.1973	1.0214	3.1977	1.0210	3.1974	1.0211	3.1963	1.0211
		0.4120	0.0685	0.3580	0.0570	0.3585	0.0571	**0.3575**	**0.0569**	0.3587	0.0568
	50	3.0735	1.0117	3.0637	1.0095	3.0621	1.0097	3.0623	1.0098	3.0607	1.0099
		0.1273	0.0247	0.1226	0.0232	**0.1211**	**0.0231**	0.1212	**0.0231**	0.1219	**0.0231**
	100	3.0164	1.0132	3.0116	1.0123	3.0111	1.0122	3.0111	1.0123	3.0107	1.0124
		0.0542	0.0113	0.0539	0.0111	**0.0530**	**0.0109**	0.0533	**0.0109**	0.0533	**0.0109**
4.0	20	4.3286	1.0354	4.2741	1.0284	4.2748	1.0289	4.2743	1.0286	4.2756	1.0285
		0.8622	0.0707	0.7512	0.0591	**0.7507**	0.0590	0.7513	**0.0589**	0.7515	**0.0589**
	50	4.0924	1.0168	4.0763	1.0153	4.0775	1.0147	4.0765	1.0148	4.0772	1.0147
		0.2096	0.0237	0.2011	0.0223	**0.1993**	0.0222	0.1996	**0.0221**	0.1996	**0.0221**
	100	4.0583	1.0048	4.0500	1.0042	4.0513	1.0039	4.0513	1.0040	4.0516	1.0040
		0.0981	0.0116	0.0963	0.0113	0.0960	**0.0112**	**0.0956**	**0.0112**	0.0960	**0.0112**

Table 3 Average of estimates and MSE for $\beta = 2$, different values of α and different sample sizes

α	n	Methods									
		MLE		IMH		RWM		IMHG		RWMG	
		α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
0.5	20	0.5376	2.1880	0.5306	2.1405	0.5306	2.1412	0.5305	2.1400	0.5311	2.1423
		0.0124	0.4588	0.0106	**0.3357**	**0.0105**	0.3416	**0.0105**	0.3384	0.0114	0.3449
	50	0.5153	2.0643	0.5135	2.0533	0.5134	2.0531	0.5132	2.0529	0.5131	2.0530
		0.0035	0.1008	**0.0033**	0.0941	**0.0033**	**0.0933**	**0.0033**	0.0934	0.0037	0.0941
	100	0.5074	2.0322	0.5063	2.0270	0.5065	2.0271	0.5065	2.0273	0.5055	2.0259
		0.0017	0.0467	**0.0016**	**0.0450**	**0.0016**	0.0452	**0.0016**	**0.0450**	0.0020	0.0452
1.0	20	1.0649	2.1882	1.0518	2.1426	1.0517	2.1436	1.0520	2.1439	1.0521	2.1439
		0.0413	0.4017	0.0354	**0.3030**	**0.0352**	0.3053	0.0353	0.3050	0.0360	0.3055
	50	1.0306	2.0758	1.0267	2.0635	1.0266	2.0646	1.0265	2.0641	1.0267	2.0642
		0.0161	0.1138	0.0154	0.1056	**0.0153**	0.1059	**0.0153**	**0.1051**	0.0157	0.1057
	100	1.0141	2.0310	1.0123	2.0261	1.0124	2.0260	1.0123	2.0260	1.0108	2.0250
		0.0066	0.0449	**0.0065**	0.0437	**0.0065**	0.0434	**0.0065**	0.0433	0.0069	**0.0430**
2.0	20	2.1568	2.1909	2.1275	2.1430	2.1284	2.1440	2.1279	2.1419	2.1280	2.1421
		0.1939	0.4758	0.1650	0.3422	0.1651	0.3465	**0.1644**	**0.3404**	0.1646	0.3405
	50	2.0579	2.0783	2.0493	2.0664	2.0500	2.0671	2.0499	2.0665	2.0480	2.0660
		0.0587	0.1175	0.0559	0.1082	**0.0557**	0.1083	**0.0557**	0.1084	0.0559	**0.1080**
	100	2.0301	2.0318	2.0263	2.0276	2.0265	2.0269	2.0266	2.0269	2.0261	2.0269
		0.0255	0.0475	0.0251	0.0468	0.0250	0.0461	**0.0249**	**0.0459**	0.0253	0.0460
3.0	20	3.2306	2.1864	3.1878	2.1419	3.1895	2.1443	3.1888	2.1426	3.1891	2.1426
		0.4386	0.3733	**0.3761**	0.2877	0.3771	0.2898	0.3791	**0.2873**	0.3767	**0.2873**
	50	3.0785	2.0544	3.0662	2.0446	3.0667	2.0434	3.0673	2.0436	3.0656	2.0433
		0.1324	0.1068	0.1271	0.1009	**0.1260**	**0.0989**	**0.1260**	0.0991	0.1265	0.0996
	100	3.0435	2.0336	3.0387	2.0291	3.0378	2.0287	3.0382	2.0287	3.0387	2.0287
		0.0587	0.0433	0.0581	0.0425	**0.0572**	0.0420	0.0573	0.0419	0.0577	**0.0418**
4.0	20	4.2705	2.1973	4.2151	2.1468	4.2152	2.1499	4.2141	2.1476	4.2146	2.1475
		0.7570	0.4911	**0.6401**	0.3455	0.6453	0.3498	0.6432	0.3458	0.6406	**0.3443**
	50	4.0966	2.0613	4.0806	2.0502	4.0803	2.0510	4.0805	2.0501	4.0816	2.0504
		0.2224	0.1035	0.2126	0.0974	**0.2114**	0.0965	0.2120	**0.0961**	0.2120	0.0964
	100	4.0580	2.0336	4.0516	2.0291	4.0504	2.0288	4.0509	2.0287	4.0515	2.0287
		0.1043	0.0433	0.1033	0.0425	**0.1017**	0.0420	0.1020	0.0419	0.1019	**0.0418**

5. References

[1] Gumbel, E. J., 1958, Statistics of Extremes, Columbia University Press, New York, 375 p.

[2] Feroze, N. and Aslam, M., 2012, Bayesian Analysis of Gumbel type-II Distribution under Doubly Censored Samples Using Different Loss Functions, Caspian Journal of Applied Sciences Research. 1(10): 1-10.

[3] Abbas, K., Fu, J. and Tang, Y., 2013, Bayesian Estimation of Gumbel type-II distribution, Data Science Journal. 12: 33-46.

[4] Okorie, I.E., Akpanta, A.C. and Ohakwe, J., The Exponentiated Gumbel Type-2 Distribution: Properties and Application, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Available Source: http://dx.doi.org/10.1155/2016/5898356, August 4, 2016.

[5] Lindley, D.V., 1961, The Use of Prior Probability Distribution in Statistical Inference and Decision, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, pp. 453-468.

[6] Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D., 1996, Markov Chain Monte Carlo in Practice, Interdisciplinary Statistics, Chapman and Hall, London, 512 p.

[7] Geman, S and Geman, D., 1984, Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and Bayesian Restoration of Images, IEEE Transaction Pattern Analysis and Machine Intelligence. 6: 721-741.

[8] Hastings, W.K., 1970, Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications, Biometrika. 57(1): 97-109.

[9] Moala, A.F., Romos, L.P. and Achcar, A.J., 2013, Baysian Inference for Two-Parameter Gamma Distribution Assuming Different Noninformative Priors, Revista Colombiana de Estadistica. 36(2), 321-338.

[10] Ahmed M.O., 2014, Comparison of the Bayesian Methods on Interval-Censored Data for Weibull Distribution, Open Journal of Statistics. 4: 570-577.

[11] Saraiva, E.F. and Suzuki, A.K., 2017, Baysian Computational Methods for Estimation of Two-Parameters Weibull Distribution in Presence of Right-Censored Data, Chilean Journal of Statistics. 8(2): 25-43.

[12] Saraiva, E.F., Suzuki, A.K., and Milan, L.A., Bayesian Computational Methods for Sampling from the Posterior Distribution of a Bivariate Survival Model, Based on AMH Copula in the Presence of Right-Censored Data, Entropy, Available Source: https://doi.org/10.3390/e20090642, August 27, 2018.

[13] Haselimashhadi, H., Vinciotti, V. and K. Yu, K., 2018, A novel Bayesian regression model for counts with an application to health data, Journal of Applied Statistics. 6: 1085-1105.

[14] Kundu, D. and Gupta, D.R., 2008, Generalized Exponential Distribution: Bayesian estimations, Journal of Computational Statistics & Data Analysis. 52(4): 1873-1883.