วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

อัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม

A Ratio on The Cut Line of Butterfly's Wings on A Circle

อรรณพ แก้วขาว[1,*] และ วรเชษฐ ขันทอง[2]
[1,2]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Annop Kaewkhao[1,*] and Warachat Khuntong[2]
[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, Chonburi 20131

Email: [1]tor_idin@buu.ac.th [2]warachat12345@gmail.com

วันที่รับบทความ : 13 พฤศจิกายน 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 26 เมษายน 2564 วันที่ตอบรับบทความ : 31 กรกฎาคม 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอความสัมพันธ์ของอัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้สามารถนำไปพิสูจน์ทฤษฎีบทผีเสื้อ โดยใช้เพียงสมบัติพื้นฐานของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมในการพิสูจน์

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทผีเสื้อ

ABSTRACT

In this paper, we propose a relation of a ratio on the cut line of butterfly's wings on a circle using the basic properties of triangular areas to prove it. The result can be

* ผู้เขียนหลัก

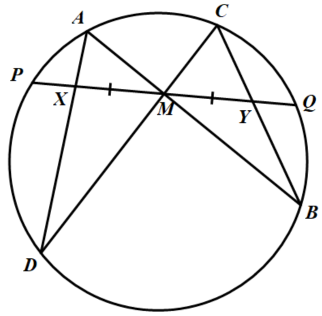
used to prove the original butterfly theorem.

Keywords: Butterfly theorem

1. ทฤษฎีบทผีเสื้อ

ในปี ค.ศ. 1805 William Wallace ได้ค้นพบความสัมพันธ์บนรูปร่างทางเรขาคณิตที่มีลักษณะคล้ายปีกผีเสื้อ (butterfly's wings) ในวงกลม ดังรูปที่ 1.1 ซึ่งต่อมาเรียกผลงานนี้ว่า ทฤษฎีบทผีเสื้อ (Butterfly theorem) ซึ่งกล่าวไว้ว่า

ทฤษฎีบท 1.1 [1] กำหนดให้ PQ, AB และ CD เป็นคอร์ดบนวงกลม ซึ่งจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ และ AB, CD ผ่านจุด M ถ้า AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ แล้ว $XM = MY$



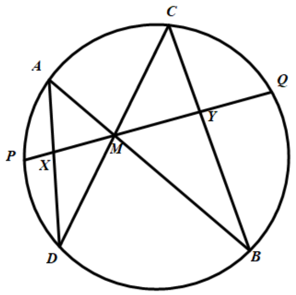
รูปที่ 1.1 ปีกผีเสื้อในวงกลม

ต่อมามีนักคณิตศาสตร์ที่หลงใหลในเรขาคณิตได้นำเสนอวิธีการพิสูจน์ใหม่ ดังปรากฏใน [1], [2], [4], [5] และ [7] รวมถึงมีการพิจารณาขยายทฤษฎีบทผีเสื้อในหลากหลายลักษณะ เช่น การพิจารณาเมื่อจุด M เป็นจุดภายนอกวงกลม ดังปรากฏใน [6] และ [8] การพิจารณารูปผีเสื้อบนวงรี ดังปรากฏใน [9] การพิจารณารูปผีเสื้อบนรูปสี่เหลี่ยม ดังปรากฏใน [3] ซึ่งจะเห็นได้ว่าถึงแม้ทฤษฎีบทผีเสื้อจะถูกค้นพบมาตั้งแต่ต้นทศวรรษที่ 19 แต่ในปัจจุบันก็ยังคงได้รับความสนใจที่จะศึกษา และขยายองค์ความรู้อย่างต่อเนื่อง

2. อัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อ

บทความนี้ผู้เขียนจะได้นำเสนอผลลัพธ์ซึ่งทั่วไปกว่าทฤษฎีบทผีเสื้อ โดยการพิจารณาอัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อ กล่าวคือ พิจารณาเมื่อจุด M เป็นจุดใด ๆ บน PQ ดังรูปที่ 2.1

เราจะเรียกจุด M ว่า **จุดร่วมของปีก** เรียกคอร์ด PQ ว่า **เส้นตัดปีก** และเรียกอัตราส่วน $\frac{PX}{XM}\cdot\frac{MY}{YQ}$ ว่า **อัตราส่วนบนเส้นตัดปีก**



รูปที่ 2.1 เส้นตัดปีก

ในการพิสูจน์ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม ผู้เขียนใช้เพียงสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเท่านั้น กล่าวคือ

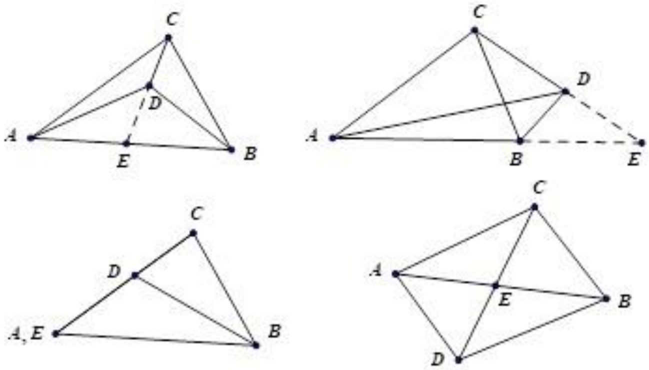
สมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

1. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะได้ว่า $[ABC]=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle CAB$

2. ให้ ABC และ ABD เป็นรูปสามเหลี่ยม ถ้า CD ตัด AB ที่จุด E แล้ว

$$\frac{[ABC]}{[ABD]}=\frac{CE}{DE}$$

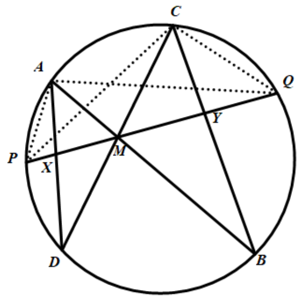
เมื่อ $[ABC]$ แทน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC



รูปที่ 2.2 ภาพประกอบสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ข้อ 2

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ PQ, AB และ CD เป็นคอร์ดบนวงกลม ซึ่งจุด M เป็นจุดใด ๆ บน PQ และ AB, CD ผ่านจุด M ถ้า AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ แล้ว $\frac{PX}{XM}\cdot\frac{MY}{YQ}=\frac{PM}{MQ}$

บทพิสูจน์ ลาก AP, AQ, CP และ CQ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ประกอบบทพิสูจน์

เนื่องจาก $\angle MAX=\angle MCY, \angle PAX=\angle PCM, \angle QCY=\angle MAQ$ และ $\angle PAQ=\angle PCQ$ โดยสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{PX}{XM}\cdot\frac{MY}{YQ} &= \frac{[PXA]}{[MXA]}\cdot\frac{[MYC]}{[QYC]}\\
&= \frac{AP\cdot AX\cdot\sin\angle PAX}{AM\cdot AX\cdot\sin\angle MAX}\cdot\frac{CM\cdot CY\cdot\sin\angle MCY}{CQ\cdot CY\cdot\sin\angle QCY}\\
&= \frac{AP\cdot\sin\angle PAX}{AM}\cdot\frac{CM}{CQ\cdot\sin\angle QCY}\\
&= \frac{AP\cdot CM\cdot\sin\angle PAX}{AM\cdot CQ\cdot\sin\angle QCY}\\
&= \frac{AP\cdot CM\cdot\sin\angle PCM}{AM\cdot CQ\cdot\sin\angle MAQ}\\
&= \frac{AP\cdot CM\cdot\sin\angle PCM}{AM\cdot CQ\cdot\sin\angle MAQ}\cdot\frac{CP}{CP}\cdot\frac{AQ}{AQ}\cdot\frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle PCQ}\\
&= \frac{CP\cdot CM\cdot\sin\angle PCM}{AM\cdot AQ\cdot\sin\angle MAQ}\cdot\frac{AP\cdot AQ\cdot\sin\angle PAQ}{CP\cdot CQ\cdot\sin\angle PCQ}\\
&= \frac{[PCM]}{[MAQ]}\cdot\frac{[PAQ]}{[PCQ]}
\end{aligned}$$

$$= \frac{[PCM]}{[PCQ]} \cdot \frac{[PAQ]}{[MAQ]}$$

$$= \frac{PM}{PQ} \cdot \frac{PQ}{MQ}$$

$$= \frac{PM}{MQ}$$

ดังนั้น $\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = \frac{PM}{MQ}$ □

ข้อสังเกต

1. เมื่อจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ จะได้ $PM = MQ$

โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = 1$ นั่นคือ $\frac{PX}{XM} = \frac{YQ}{MY}$ จะได้

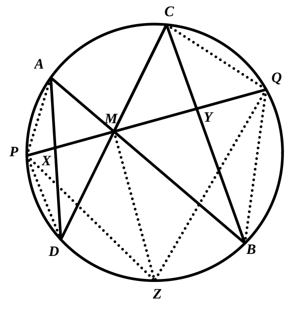
$$\frac{PX + XM}{XM} = \frac{YQ + MY}{MY}$$

$$\frac{PM}{XM} = \frac{MQ}{MY}$$

ดังนั้น $XM = MY$ ซึ่งก็คือทฤษฎีบทผีเสื้อ

2. เมื่อจุด Z เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม ดังรูปที่ 2.4 โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = \frac{PM}{MQ}$

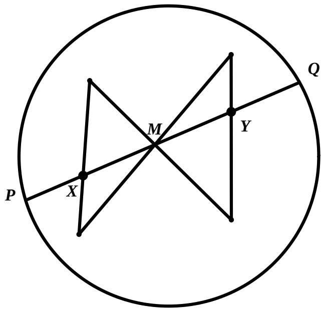
จากสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม จะได้ความสัมพันธ์อัตราส่วนในแบบของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม คือ $\frac{[PDA]}{[MDA]} \cdot \frac{[MBC]}{[QBC]} = \frac{[PZM]}{[QZM]}$



รูปที่ 2.4 รูปร่างของสามเหลี่ยม PZM และ QZM

3. ข้อเสนอแนะ

เป็นที่น่าสนใจหากสามารถพิจารณารูปแบบผีเสื้อในรูปร่างอื่น ๆ เช่น รูปแบบของผีเสื้อซึ่งอยู่เพียงภายในวงกลม ดังรูปที่ 3.1 จะมีหรือไม่ และถ้ามี จะมีเงื่อนไขอย่างไร ที่ยังคงทำให้อัตราส่วนของเส้นตัดปีกนั้นมีความสัมพันธ์กับจุดร่วมของปีก (จุด M)



รูปที่ 3.1 รูปผีเสื้อภายในวงกลม

เอกสารอ้างอิง

[1] ภัคคินี ชิตสกุล. (2560). ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ. *วารสารคณิตศาสตร์*, 62 (691), น. 13 - 20.
Chitsakul, P. (2017). The Butterfly Theorem. *Mathematical Journal,* 62 (691), p. 13 - 20.

[2] Celli, M. (2016). A Proof of The Butterfly Theorem Using the Similarity Factor of The Two Wings. *Forum Geometricorum*, 16, p. 337 - 338.

[3] Cerin, Z. (2006). On Butterflies Inscribed in A Quadrilateral. *Forum Geometricorum*, 6, p. 241 - 246.

[4] Donolato, C. (2016). A Proof of The Butterfly Theorem Using Ceva's Theorem. *Forum Geometricorum*, 16, p. 185 - 186.

[5] Nguyen, T. D. (2017). Three Synthetic Proofs of The Butterfly Theorem. *Forum Geometricorum*, 17, p. 355 - 358.

[6] Sledge, J. (1973). A Generalization of The Butterfly Theorem, *J. of Undergraduate Math*, 5, p. 3 – 4.

[7] Tran, Q. H. (2016). Another Synthetic Proof of The Butterfly Theorem Using The Midlinein Triangle. *Forum Geometricorum*, 16, p. 345 - 346.

[8] Volenec, V. (2000). A Generalization of The Butterfly Theorem. *Mathematical Communications*, 5, p. 157 - 160.

[9] Zvonko, C. (2001). A Generalization of The Butterfly Theorem from Circles to Conics. *Mathematical Communications*, 6, p. 161 - 164.