วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ว่าด้วยเรื่องคณิตศาสตร์ระดับมัธยม : ภาคตัดกรวยจริงฤๅ? 1

Middle & High School Mathematics: Conic Section, Really? 1

จุมพฏ อินตระกูล

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ปทุมธานี 12120

Jumpot Intrakul

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University (Rangsit Center), Pathum Thani 12120

Email: jumpot@mathstat.sci.tu.ac.th

วันที่รับบทความ : 19 มิถุนายน 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 22 สิงหาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 16 กรกฎาคม 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้อาศัยแนวคิดของเรขาคณิตสังเคราะห์แสดงว่า ภาคตัดกรวย (รอยตัดระหว่างกรวยกับระนาบ) ซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวยจะเป็นวงกลม วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา เท่านั้น

คำสำคัญ: ภาคตัดกรวย วงกลม วงรี พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา เรขาคณิตสังเคราะห์

ABSTRACT

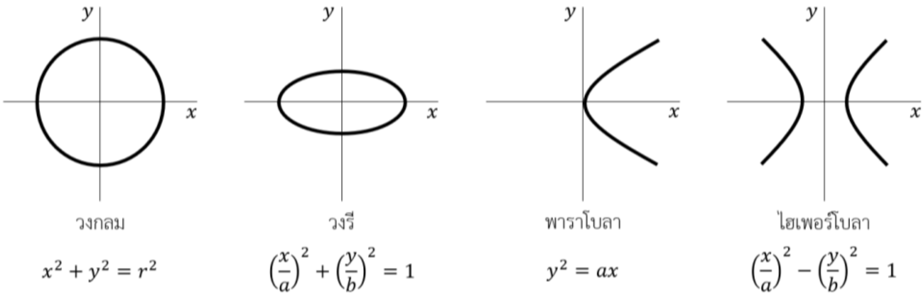
We use the concept of synthetic geometry to show that the conic section (intersection between a cone and a plane), not containing the vertex of a cone, must be either a circle; or an ellipse; or a parabola; or a hyperbola.

Keywords: Conic section, Circle, Ellipse, Parabola, Hyperbola, Synthetic geometry

1. บทนำ

“ภาคตัดกรวย” เป็นหัวข้อหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย [1 - 3] ซึ่งปรากฏในบทเรียนเรื่อง “เรขาคณิตวิเคราะห์” โดยหนึ่งในเนื้อหาของบทเรียนดังกล่าวจะศึกษาสมการเส้นโค้ง 4 ประเภท ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา พร้อมการแปลงและสมบัติเบื้องต้น สมการเส้นโค้งดังกล่าวในรูปแบบมาตรฐานอย่างง่าย (จุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่พิกัด (0,0) และแกนหลักอยู่ในแนวนอน) เป็นดังนี้

1. สมการวงกลม : $x^2 + y^2 = r^2$
2. สมการวงรี : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
3. สมการพาราโบลา : $y^2 = ax$
4. สมการไฮเพอร์โบลา : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



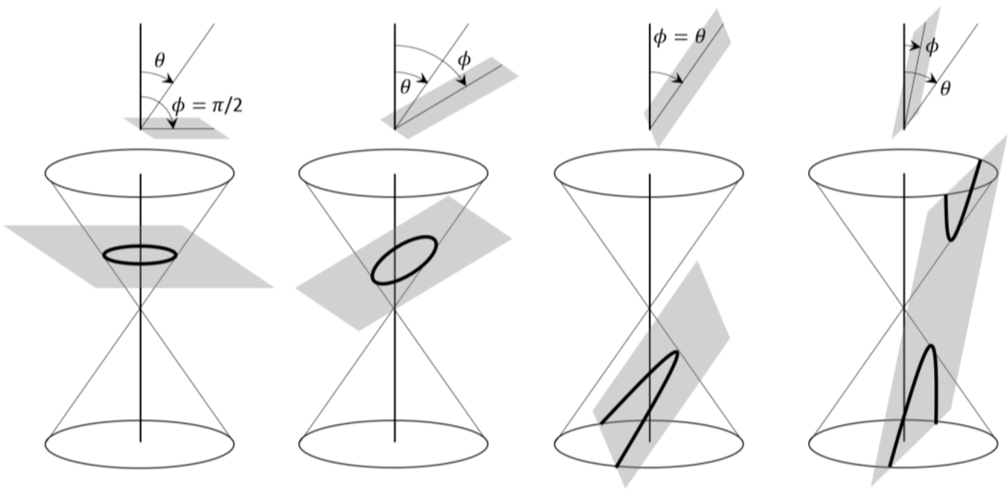
รูปที่ 1.1 ลักษณะของเส้นโค้งทั้งสี่ตามรูปแบบสมการ

การศึกษาดังกล่าวโดยมากจะเป็นการศึกษาในเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์ตามชื่อบทเรียน กล่าวคืออาศัยพิกัดในการอธิบายเส้นโค้งเหล่านี้ แต่ทว่าส่วนที่ *น่าสนใจ น่าสงสัย และเกี่ยวข้องกับชื่อหัวข้อที่เรียนเป็นอย่างมาก* คือ

1. *ภาคตัดกรวย (รอยตัดระหว่างกรวยกับระนาบ)* แท้จริงแล้วเป็น *“เส้นโค้งเหล่านี้”* จริงหรือไม่ ?
2. *เส้นโค้งเหล่านี้เป็น “ภาคตัดกรวย”* จริงหรือไม่ ?

ทั้งนี้ ระนาบที่ทำให้เกิดรอยตัดดังกล่าวจะพิจารณาเพียงระนาบที่*ไม่ผ่านจุดยอดของกรวย*เท่านั้น (กรณีที่ระนาบผ่านจุดยอดของกรวย รอยตัดที่เกิดขึ้นจะมีเพียง 3 รูปแบบ คือ จุด เส้นตรง และ เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน ซึ่งทั้งสามรูปแบบนี้ได้มีการศึกษาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น)

สำหรับคำถามข้างต้น เราจะพบว่าเนื้อหาที่ปรากฏในแบบเรียนมักเป็นภาพอธิบายที่ชวนให้เชื่อว่า *เส้นโค้งทั้งสี่และภาคตัดกรวยเป็นสิ่งเดียวกัน* (รูปที่ 1.2) โดยจะมีความแตกต่างกันตามความสัมพันธ์ของมุมระหว่างแกนของกรวยกับผิวข้างของกรวย (มุม θ ในรูปที่ 1.2) และมุมระหว่างแกนของกรวยกับระนาบตัดกรวย (มุม ϕ ในรูปที่ 2)



รูปที่ 1.2 ภาคตัดกรวยกรณีระนาบไม่ผ่านจุดยอดของกรวย

แม้ว่าภาพประกอบการอธิบายข้างต้นจะดูมีความเป็นไปได้ แต่ส่วนใหญ่ยัง*ไม่มีการแสดงให้เห็นโดยชัดแจ้ง*ว่าเป็นจริงในบทเรียน

วิธีการตอบคำถามข้างต้นทั้งสองข้อสามารถกระทำได้หลากหลายวิธี วิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมคือการแสดงโดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นเครื่องมือ อย่างไรก็ตามยังมีอีกวิธีที่สามารถใช้ตอบคำถามได้เช่นกัน แต่อาจจะไม่เป็นที่รู้จักในวงกว้างมากนัก นั่นคือ การแสดงโดยใช้*เรขาคณิตสังเคราะห์* (Synthetic Geometry – เรขาคณิตที่ไม่ใช้แนวคิดของระบบพิกัด) เป็นเครื่องมือ วิธีการนี้ได้รับการนำเสนอโดย เจอมินัล ปิแอร์ ดองเดอแลง (Germinal Pierre Dandelin) ใน ค.ศ. 1822 [4 - 6] แนวคิดหลักของวิธีการนี้ คือ การสร้างทรงกลมแนบในกรวยและสัมผัสกับระนาบตัด แล้วแสดงว่า

จุดสัมผัสระหว่างทรงกลมดังกล่าวกับระนาบตัดจะเป็นจุดโฟกัสของภาคตัดกรวย ด้วยเหตุนี้ทรงกลมที่สร้างจากวิธีการดังกล่าวจึงเรียกว่า *ทรงกลมดองเดอแลง (Dandelin Spheres)* [4, 6]

ในบทความนี้จะได้นำเสนอคำตอบของคำถามข้อ 1. โดยวิธีของดองเดอแลง

2. ภาคตัดกรวยกับเส้นโค้งทั้งสี่

เพื่อความสะดวก ตลอดหัวข้อนี้กำหนดให้ :

- C เป็นกรวยกลมซึ่งมี V เป็นจุดยอด และมีผิวข้างเอียงทำมุม θ กับแกนของกรวย เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- P เป็นระนาบซึ่ง*ไม่ผ่าน*จุดยอด V ของกรวย C โดยที่แกนของกรวยเอียงทำมุม ϕ กับระนาบ เมื่อ $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

บทนิยามของวงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา เป็นดังนี้

บทนิยาม 2.1 [1]

1. วงกลม (circle) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งเป็นระยะคงที่
2. วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดเหล่านี้แต่ละจุดไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดเป็นค่าคงตัว
3. พาราโบลา (parabola) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน
4. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดเหล่านี้แต่ละจุดไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดเป็นค่าคงตัว

ผลลัพธ์หลักของบทความนี้ คือ *ภาคตัดกรวยในกรณีที่ระนาบตัดไม่ผ่านจุดยอดของกรวย จะต้องเป็นเส้นโค้งใดเส้นโค้งหนึ่งจากบทนิยามข้างต้น ตามความสัมพันธ์ระหว่าง ϕ กับ θ* กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 2.2

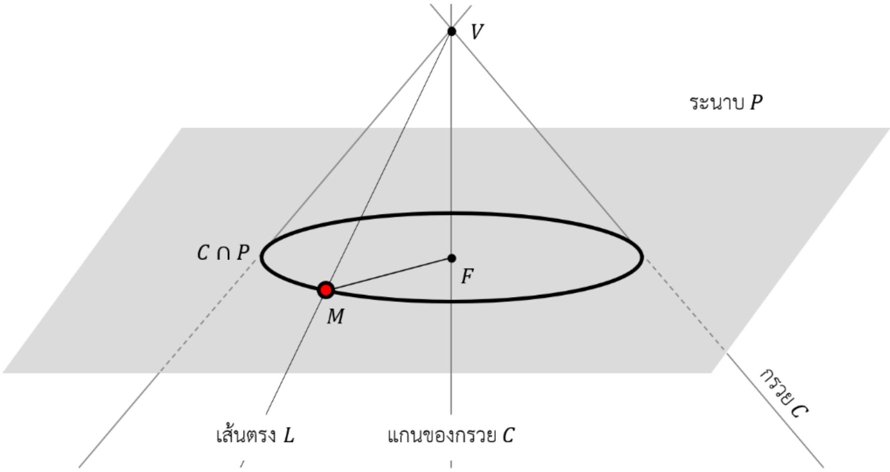
1. ถ้า $\phi = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นวงกลม
2. ถ้า $\theta < \phi < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นวงรี
3. ถ้า $\phi = \theta$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นพาราโบลา
4. ถ้า $\phi < \theta$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นไฮเพอร์โบลา

ในการแสดงว่าทฤษฎีบทข้างต้นเป็นจริง จะแบ่งการพิสูจน์ตามกรณี แต่จะสลับลำดับการแสดงระหว่างกรณี $\phi = \theta$ และกรณี $\phi < \theta$ เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ

บทพิสูจน์ กรณี $\boldsymbol{\phi = \frac{\pi}{2}}$

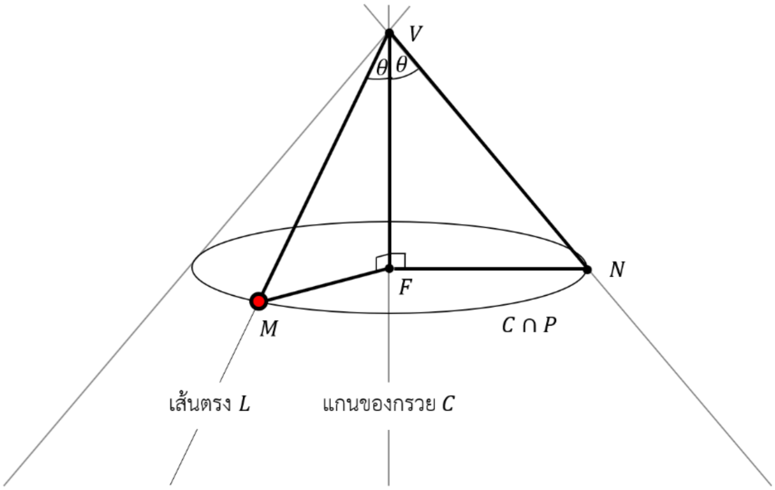
สมมติว่า $\phi = \frac{\pi}{2}$

กำหนดให้จุด M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$ และจุด F เป็นจุดตัดของระนาบ P และแกนของกรวย ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 จุด M และจุด F จากการสร้างข้างต้น

กำหนดให้จุด N เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$ เช่นเดียวกับจุด M (รูปที่ 2.2)

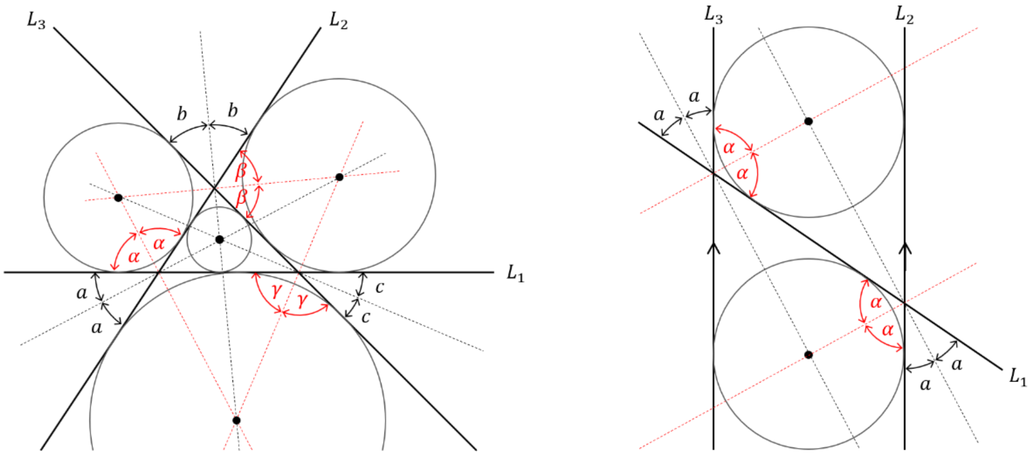


รูปที่ 2.2 จุด N และความสัมพันธ์ระหว่าง ΔMVF และ ΔNVF

เนื่องจากระนาบ P ตั้งฉากกับแกนของกรวย $\angle MVF = \theta = \angle NVF$ และ $|\overline{VF}| = |\overline{VF}|$ ทำให้ $\Delta MVF \cong \Delta NVF$ โดยความสัมพันธ์ มุม-ด้าน-มุม ดังนั้น $|\overline{MF}| = |\overline{NF}|$ จึงสรุปว่ารอยตัด $C \cap P$ เป็นรูปวงกลมซึ่งมีจุด F เป็นจุดศูนย์กลาง $\square$

บทพิสูจน์สำหรับกรณีที่เหลือจะอาศัยการสร้างทรงกลมแนบในกรวยและสัมผัสกับระนาบตัดซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวย (นั่นคือ ทรงกลมดองเดอแลง) ซึ่งนัยของทรงกลมแนบในดังกล่าวเป็นดังนี้

ทรงกลมแนบในกรวย C ซึ่งมีจุด V เป็นจุดยอดและสัมผัสกับระนาบ P เมื่อ $0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$ คือทรงกลมซึ่งสัมผัสทุกเส้นตรงบนผิวกรวยซึ่งผ่านจุด V และสัมผัสกับระนาบ P การมีอยู่ของทรงกลมนี้เป็นผลโดยตรงจากความสมมาตรภายใต้การหมุนของกรวย C รอบแกนของกรวย และการมีอยู่ของวงกลมสัมผัสเส้นตรงที่กำหนดให้ 3 เส้น โดยเส้นตรงเหล่านี้ขนานกันเองได้ไม่เกิน 1 คู่ ทั้งนี้จุดศูนย์กลางของวงกลมดังกล่าวจะอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นตรงที่กำหนดให้แต่ละคู่ (กรณีเส้นตรงทั้งสามไม่มีคู่ใดขนานกัน วงกลมสัมผัสนี้คือวงกลมแนบในและวงกลมแนบนอกของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรงแต่ละคู่ ดังรูปที่ 2.3(1))



(1) กรณีไม่มีเส้นตรงคู่ใดขนานกัน (2) กรณีมีเส้นตรงคู่หนึ่งขนานกัน

รูปที่ 2.3 วงกลมสัมผัสเส้นตรง L_1 เส้นตรง L_2 และเส้นตรง L_3 ที่กำหนดให้

การสร้างทรงกลมแนบในกรวย C และสัมผัสกับระนาบ P สามารถกระทำได้ดังนี้

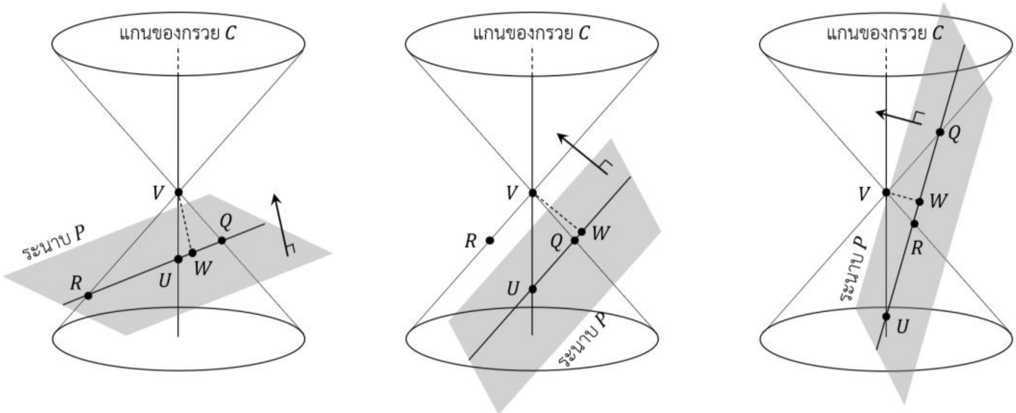
กำหนดให้จุด U เป็นจุดตัดระหว่างระนาบ P กับแกนของกรวย C และจุด W เป็นจุดเชิงตั้งฉากของจุด V บนระนาบ P (นั่นคือเส้นตรง $\overleftrightarrow{VW}$ ตั้งฉากกับระนาบ P) สร้างจุด Q และจุด R ดังนี้ (พิจารณารูปที่ 2.4 ประกอบ)

- <u>กรณี $\theta < \phi < \pi/2$ หรือ $\phi < \theta$</u>

  จุด Q และจุด R เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรง $\overleftrightarrow{UW}$ และกรวย C

- <u>กรณี $\phi = \theta$</u>

  จุด Q เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรง $\overleftrightarrow{UW}$ และกรวย C และจุด R เป็นจุดสะท้อนของจุด Q เทียบกับแกนของกรวย C ซึ่งจะได้ว่าจุด R อยู่บนผิวของกรวย C

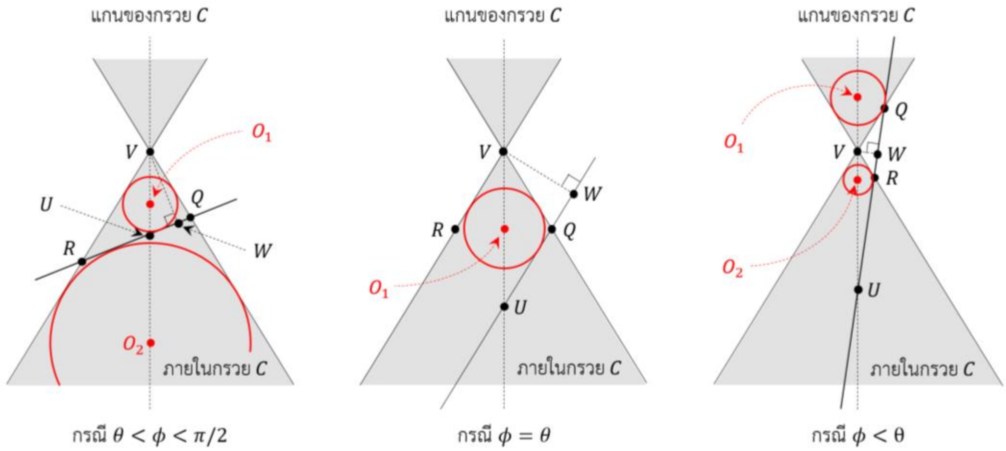


รูปที่ 2.4 จุด U จุด W จุด Q และจุด R จากการสร้างข้างต้น

สร้างวงกลม O_1 และวงกลม O_2 ภายในกรวย C และสัมผัสเส้นตรง $\overleftrightarrow{VQ}, \overleftrightarrow{VR}$ และ $\overleftrightarrow{QR}$ (กรณี $\phi = \theta$ จะแทนที่ $\overleftrightarrow{QR}$ ด้วย $\overleftrightarrow{QU}$ และจะปรากฏเพียงวงกลม O_1 เท่านั้น ดูรูปที่ 2.5 ประกอบ) จะได้ว่าวงกลมทั้งสองอยู่บนระนาบผ่าน ΔVUW สร้างทรงกลม O_1 และทรงกลม O_2 ซึ่งมีวงกลม O_1 และวงกลม O_2 เป็นวงกลมใหญ่ของทรงกลม (Great Circle of Sphere – วงกลมซึ่งเป็นรอยตัดระหว่างทรงกลมและระนาบซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม) ทั้งสองตามลำดับ (กรณี $\phi = \theta$ จะปรากฏเพียงทรงกลม O_1 เท่านั้น) จะได้ว่าทรงกลมทั้งสองสัมผัส $\overleftrightarrow{VQ}$ และ $\overleftrightarrow{VR}$ นอกจากนี้เนื่องจาก $\overleftrightarrow{VQ}$ และ $\overleftrightarrow{VR}$ อยู่บนระนาบผ่าน ΔVUW ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ P ดังนั้นทรงกลมทั้งสองสัมผัสกับระนาบ P

เนื่องจากวงกลม O_1 และวงกลม O_2 อยู่ภายในกรวยและสัมผัส $\overleftrightarrow{VQ}$ และ $\overleftrightarrow{VR}$ โดยที่ $\overleftrightarrow{VQ} \cap \overleftrightarrow{VR} = \{V\}$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่าง $\overleftrightarrow{VQ}$ และ $\overleftrightarrow{VR}$ ซึ่งลากผ่านจุด V และอยู่ภายในกรวย C ดังนั้นจุด O_1 และจุด O_2 อยู่บนแกนของกรวย C ทำให้ทรงกลม O_1 และทรงกลม O_2 สมมาตรภายใต้การหมุนรอบแกนของกรวย C เนื่องจากกรวย C สมมาตรภายใต้การหมุนรอบแกนของกรวยเช่นเดียวกับทรงกลมทั้งสอง ทำให้การสัมผัสกันระหว่าง

วงกลม O_1 และวงกลม O_2 กับ $\overleftrightarrow{VQ}$ และ $\overleftrightarrow{VR}$ นำไปสู่ข้อสรุปว่าทรงกลม O_1 และทรงกลม O_2 สัมผัสเส้นตรงทุกเส้นที่ผ่านจุด V และอยู่บนผิวของกรวย C นั่นคือทรงกลมทั้งสองเป็นทรงกลมแนบในกรวย C และสัมผัสกับระนาบ P ตามต้องการ



รูปที่ 2.5 วงกลม O_1 และวงกลม O_2 จากการสร้างข้างต้น

ด้วยเหตุนี้ตลอดบทพิสูจน์สำหรับกรณีที่เหลือ การสร้างทรงกลมแนบในกรวย C และสัมผัสกับระนาบ P จึงสามารถกระทำได้โดยอาศัยแนวคิดดังข้างต้น

บทพิสูจน์ : กรณี $\boldsymbol{\theta < \phi < \frac{\pi}{2}}$

สมมติว่า $\theta < \phi < \frac{\pi}{2}$

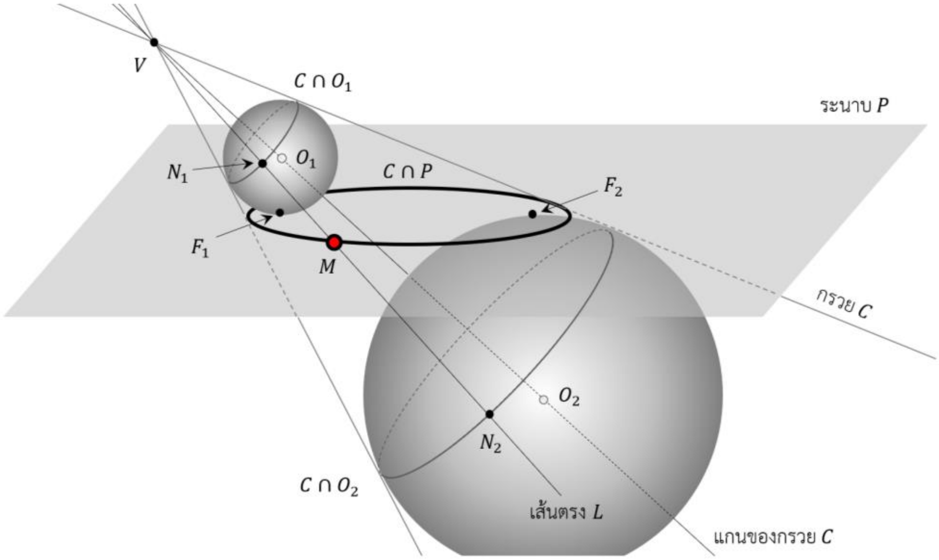
กำหนดให้จุด M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$

สร้าง

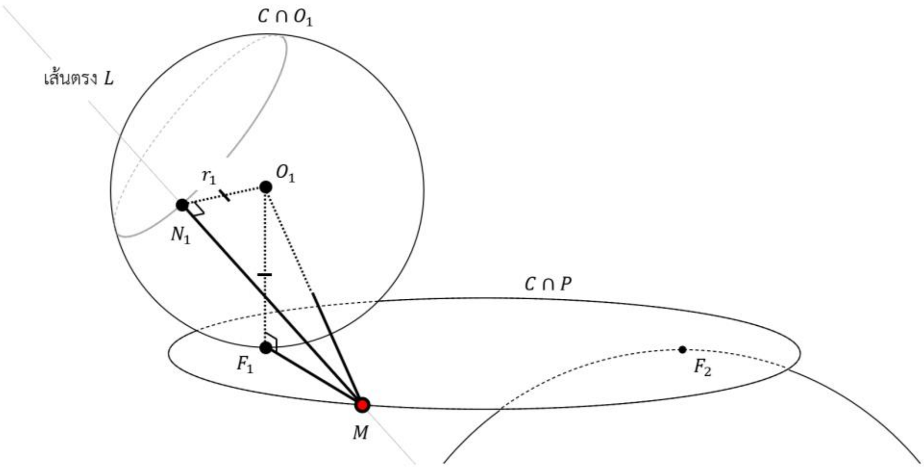
- ทรงกลม O_1 รัศมี r_1 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_1 และอยู่ด้านเดียวกับจุดยอด V เมื่อเทียบกับระนาบ P
- ทรงกลม O_2 รัศมี r_2 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_2 และอยู่ด้านตรงข้ามกับจุดยอด V เมื่อเทียบกับระนาบ P
- เส้นตรง $\overleftrightarrow{MV}$ ซึ่งจะเรียกว่าเส้นตรง L

สังเกตว่าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงบน C ทำให้เส้นตรง L สัมผัสทรงกลมทั้งสอง

กำหนดให้ $L \cap O_1 = \{N_1\}$ และ $L \cap O_2 = \{N_2\}$ นอกจากนี้ สังเกตเพิ่มเติมได้ว่า $C \cap O_1$ และ $C \cap O_2$ เป็นวงกลมซึ่งวางตัวบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยและมีจุดศูนย์กลางของวงกลมบนแกนของกรวยเหมือนกัน ดังนั้นระยะ $|\overline{N_1 N_2}|$ จะเป็นค่าคงตัวเสมอโดยไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุด M ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ทรงกลม O_1 ทรงกลม O_2 และเส้นตรง L พร้อมจุดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจากการสร้างข้างต้น



รูปที่ 2.7 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ ภายในทรงกลม O_1

พิจารณาทรงกลม O_1 (รูปที่ 2.7) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{MF_1}$ เป็นเส้นตรงบน P ซึ่งเป็นระนาบสัมผัสทรงกลม O_1 และ L เป็นเส้นสัมผัสทรงกลม O_1 จะได้ว่า

$$\angle O_1F_1M = \frac{\pi}{2} = \angle O_1N_1M$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $|\overline{O_1F_1}| = r_1 = |\overline{O_1N_1}|$ และ $\overline{O_1M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_1F_1M และ O_1N_1M ดังนั้นจึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสว่า $|\overline{F_1M}| = |\overline{N_1M}|$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาทรงกลม O_2 จะพบว่า

$$\angle O_2F_2M = \frac{\pi}{2} = \angle O_2N_2M \quad \text{และ} \quad |\overline{O_2F_2}| = r_2 = |\overline{O_2N_2}|$$

เนื่องจาก $\overline{O_2M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_2F_2M และ O_2N_2M จึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้เช่นกันว่า $|\overline{F_2M}| = |\overline{N_2M}|$

จากข้อสรุปทั้งสองข้างต้น ดังนั้น

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = |\overline{N_1M}| + |\overline{N_2M}| = |\overline{N_1N_2}| \text{ ซึ่งเป็นค่าคงตัว} \qquad \square$$

บทพิสูจน์ : กรณี $\boldsymbol{\phi < \theta}$

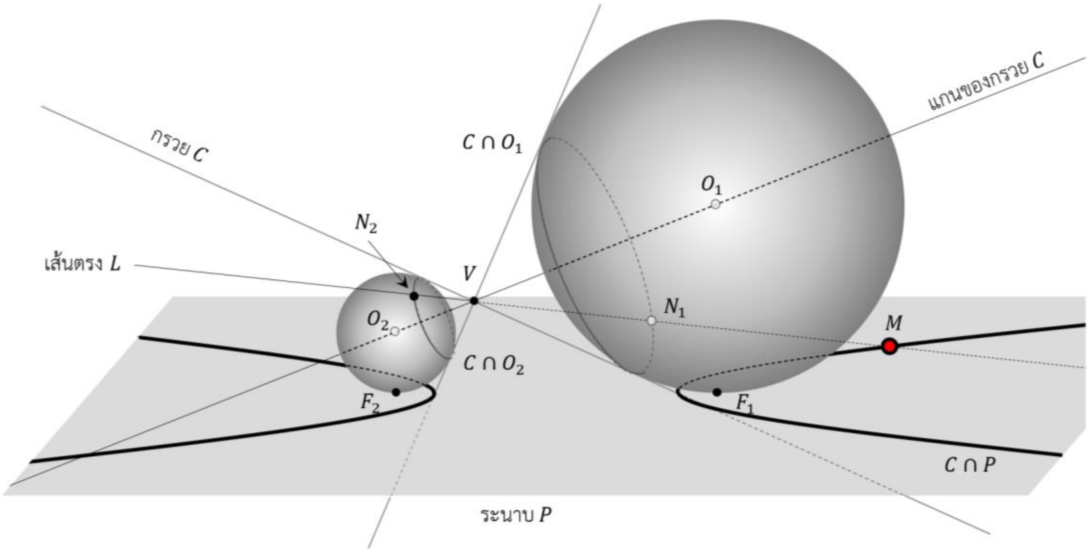
สมมติว่า $\phi < \theta$

กำหนดให้ M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$

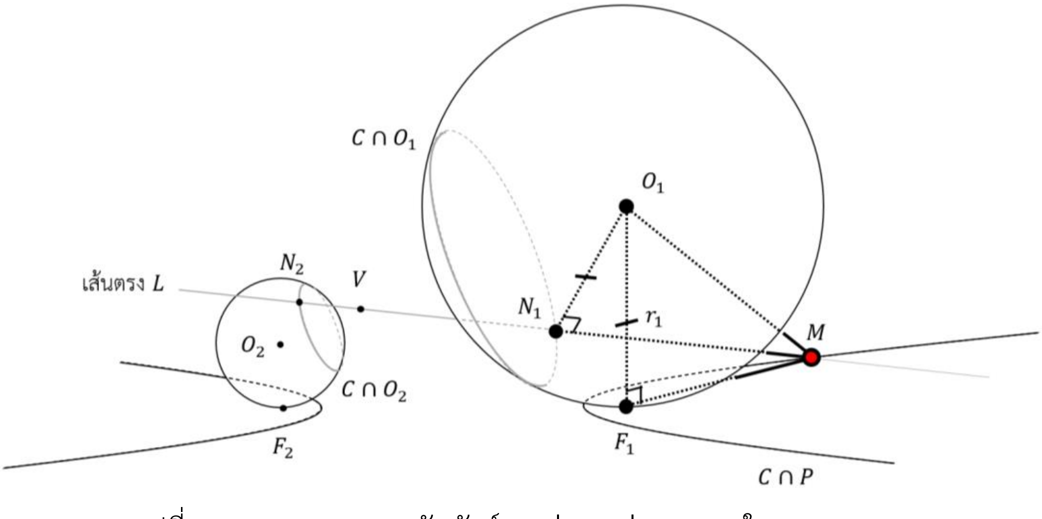
สร้าง

- ทรงกลม O_1 รัศมี r_1 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_1
- ทรงกลม O_2 รัศมี r_2 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_2 และอยู่ด้านตรงข้ามกับทรงกลม O_1 เมื่อเทียบกับจุดยอด V
- เส้นตรง $\overleftrightarrow{MV}$ ซึ่งจะเรียกว่าเส้นตรง L

สังเกตว่าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงบน C ทำให้เส้นตรง L สัมผัสทรงกลมทั้งสอง กำหนดให้ $L \cap O_1 = \{N_1\}$ และ $L \cap O_2 = \{N_2\}$ นอกจากนี้ สังเกตเพิ่มเติมว่า $C \cap O_1$ และ $C \cap O_2$ เป็นวงกลมซึ่งวางตัวบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยและมีจุดศูนย์กลางของวงกลมบนแกนของกรวยเหมือนกัน ดังนั้นระยะ $|\overline{N_1N_2}|$ จะเป็นค่าคงตัวเสมอโดยไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุด M ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ทรงกลม O_1 ทรงกลม O_2 และเส้นตรง L พร้อมจุดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจากการสร้างข้างต้น



รูปที่ 2.9 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ ภายในทรงกลม O_1

พิจารณาทรงกลม O_1 (รูปที่ 2.9) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{MF_1}$ เป็นเส้นตรงบน P ซึ่งเป็นระนาบสัมผัสทรงกลม O_1 และ L เป็นเส้นสัมผัสทรงกลม O_1 จะได้ว่า

$$\angle O_1F_1M = \frac{\pi}{2} = \angle O_1N_1M$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $|\overline{O_1F_1}| = r_1 = |\overline{O_1N_1}|$ และ $\overline{O_1M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_1F_1M และ O_1N_1M ดังนั้นจึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสว่า $|\overline{F_1M}| = |\overline{N_1M}|$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาทรงกลม O_2 จะพบว่า

$$\angle O_2F_2M = \frac{\pi}{2} = \angle O_2N_2M \text{ และ } |\overline{O_2F_2}| = r_2 = |\overline{O_2N_2}|$$

เนื่องจาก $\overline{O_2M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_2F_2M และ O_2N_2M จึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้เช่นกันว่า $|\overline{F_2M}| = |\overline{N_2M}|$

จากข้อสรุปทั้งสองข้างต้น ดังนั้น

$$\left||\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|\right| = \left||\overline{N_1M}| - |\overline{N_2M}|\right| = |\overline{N_1N_2}| \text{ ซึ่งเป็นค่าคงตัว} \qquad \square$$

บทพิสูจน์ : กรณี $\boldsymbol{\phi = \theta}$

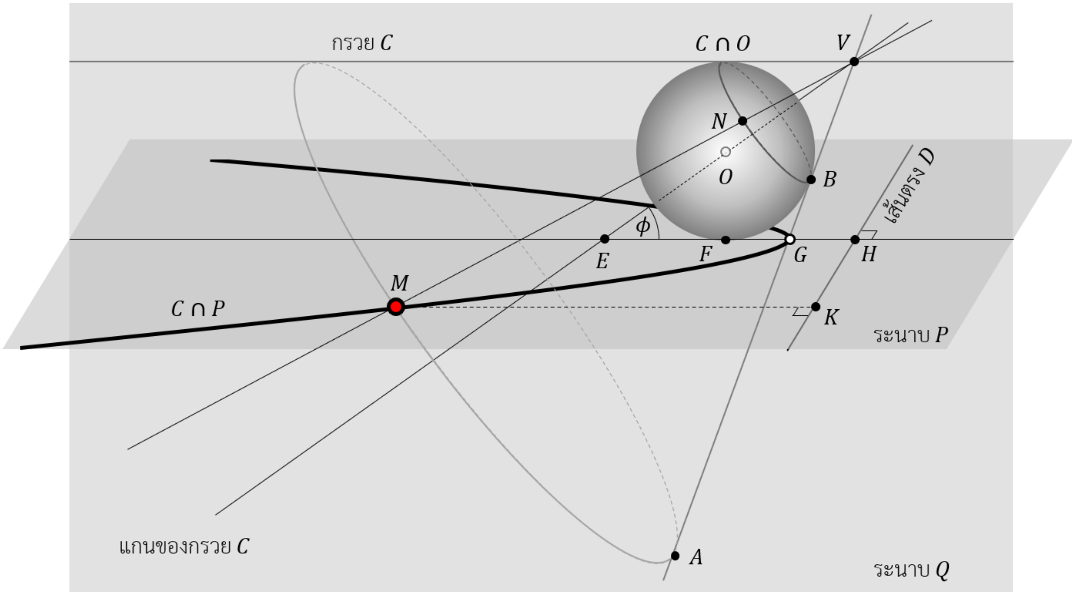
สมมติว่า $\phi = \theta$

กำหนดให้จุด M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$

สร้าง

- ทรงกลม O รัศมี r ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F
- จุด E เป็นจุดตัดระหว่างแกนของกรวย C กับระนาบ P ดังนั้น $\angle OEF = \phi = \theta$
- ระนาบ Q ซึ่งเป็นระนาบผ่านจุด V จุด O และจุด F
- จุด G บน $C \cap P$ ซึ่งอยู่บนระนาบ Q
- เส้นตรง D บนระนาบ P ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง $\overleftrightarrow{FG}$ และอยู่ห่างจากจุด G เป็นระยะ $|\overline{FG}|$
- จุด K บนเส้นตรง D ซึ่งเกิดจากการฉายจุด M ลงบนเส้นตรง D (นั่นคือ $\overleftrightarrow{MK} \perp D$)
- เส้นตรง $\overleftrightarrow{MV}$ บนกรวย C ซึ่งเส้นตรงนี้สัมผัสกับทรงกลม O ที่จุด N
- จุด A บนเส้นตรง $\overleftrightarrow{VG}$ ซึ่งมีระยะ $|\overline{AV}|$ สอดคล้องกับสมการ $|\overline{AV}| = |\overline{MV}|$

เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $\overleftrightarrow{FG} \cap D = \{H\}$ และ $\overleftrightarrow{VG} \cap (C \cap O) = \{B\}$ ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ทรงกลม O และเส้นตรง D พร้อมจุดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจากการสร้างข้างต้น

เนื่องจากระนาบ P สัมผัสทรงกลม O ที่จุด F ขณะที่เส้นตรง $\overleftrightarrow{MV}$ สัมผัสทรงกลม O ที่จุด N ทำให้

$$\angle OFM = \frac{\pi}{2} = \angle ONM$$

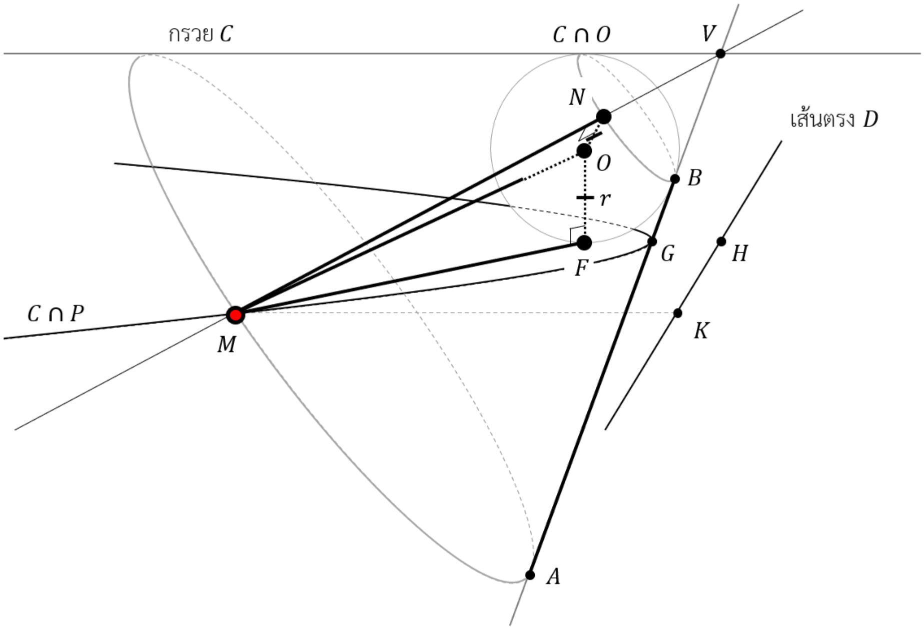
นอกจากนี้ สังเกตว่า $|\overline{OF}| = r = |\overline{ON}|$ และ $\overline{OM}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก OFM และ ONM ดังนั้นโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจึงสรุปว่า

$$|\overline{FM}| = |\overline{NM}|$$

สังเกตว่า $\overleftrightarrow{MV}$ และ $\overleftrightarrow{AV}$ ต่างเป็นเส้นสัมผัสทรงกลมบนกรวย C ซึ่ง $|\overline{MV}| = |\overline{AV}|$ ดังนั้น

$$|\overline{FM}| = |\overline{NM}| = |\overline{MV}| - |\overline{NV}| = |\overline{AV}| - |\overline{BV}| = |\overline{AB}|$$

(พิจารณารูปที่ 2.11 ประกอบ)



รูปที่ 2.11 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ ภายในทรงกลม O

สร้างจุด S บนกรวย C ซึ่งเกิดจากการสะท้อนจุด A กับแกนของกรวย จะได้ว่า S อยู่บน $C \cap Q$ ดังนั้น

$$|\overline{SV}| = |\overline{AV}| \text{ และ } \angle VSA = \angle VAS$$

นอกจากนี้จากการสร้างจุด E ความเอียงของผิวกรวย และสมมติฐาน $\phi = \theta$ จะได้ว่า

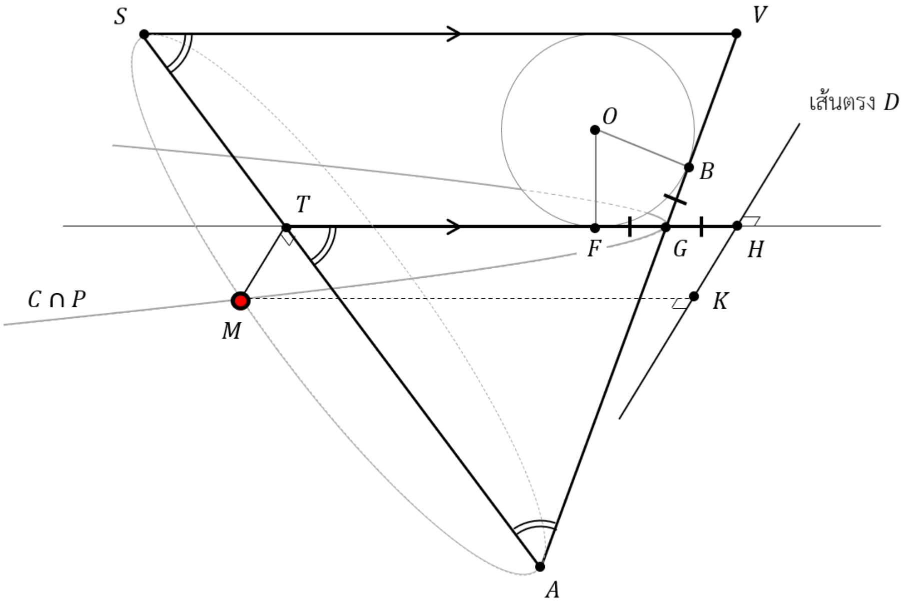
$$\angle OEF = \phi = \theta = \angle OVS$$

ดังนั้น $\overleftrightarrow{SV} // \overleftrightarrow{FG}$ เพราะ $\overleftrightarrow{FG}$ อยู่บนระนาบ Q เช่นกัน

กำหนดให้ T เป็นภาพฉายของจุด M บนเส้นตรง $\overleftrightarrow{SA}$ จะได้ว่า

$$|\overline{MK}| = |\overline{TH}| \text{ และ } \overleftrightarrow{FG} \cap \overleftrightarrow{SA} = \{T\}$$

ซึ่งทำให้ $\angle VAS = \angle VSA = \angle GTA$ ดังนั้น $|\overline{GT}| = |\overline{GA}|$ (พิจารณารูปที่ 2.12 ประกอบ)



รูปที่ 2.12 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ บนระนาบซึ่งผ่านจุด A, จุด V และ จุด S

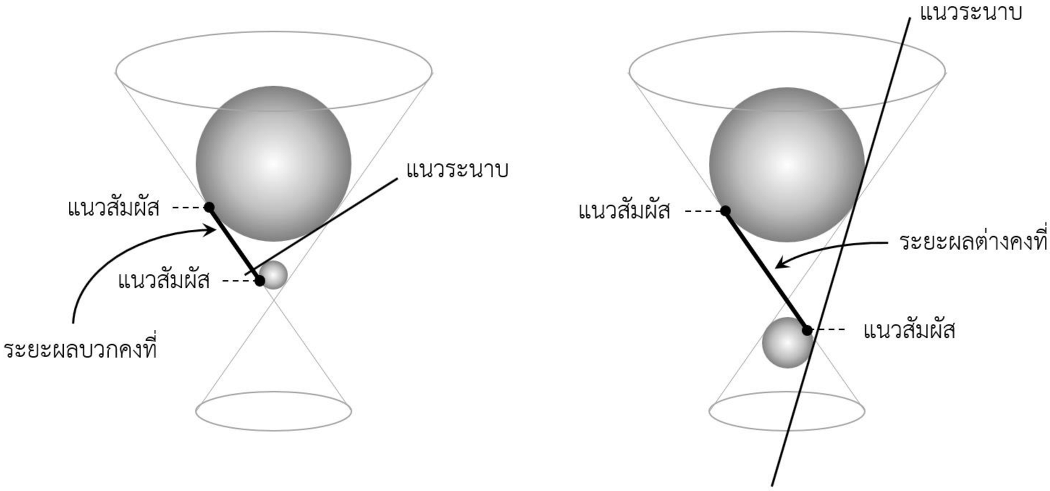
เนื่องจาก $\overleftrightarrow{FG}$ และ $\overleftrightarrow{AV}$ สัมผัสทรงกลม O ที่จุด F และจุด B ตามลำดับ และโดยสมบัติของจุด H ทำให้ทราบว่า $|\overline{HG}| = |\overline{FG}| = |\overline{BG}|$ ดังนั้น

$$|\overline{FM}| = |\overline{AB}| = |\overline{AG}| + |\overline{BG}| = |\overline{TG}| + |\overline{HG}| = |\overline{TH}| = |\overline{MK}| \qquad \square$$

3. สรุป

จากบทพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2 ทั้ง 4 กรณี พบว่า ภาคตัดกรวยซึ่งเกิดจากรอยตัดระหว่างกรวยกับระนาบซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวยจะเป็น วงกลม วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา โดยวิธีการพิสูจน์ดังกล่าวได้รับการนำเสนอโดย เจอมินัล ปิแอร์ ดองเดอแลง ซึ่งอาศัยเพียงแนวคิดของเรขาคณิตสังเคราะห์เท่านั้น นอกจากนี้ ข้อมูลที่น่าสนใจสองประการที่ได้จากการพิสูจน์ คือ

1. *จุดโฟกัสของเส้นโค้ง*ทั้งสี่กรณี แท้ที่จริงแล้ว คือ จุดสัมผัสระหว่างทรงกลมแนบในกรวยที่สัมผัสกับระนาบ
2. *ผลบวกคงที่ในบทนิยามของวงรี* และ *ผลต่างคงที่ในบทนิยามของไฮเพอร์โบลา* ที่ปรากฏในเนื้อหาตามแบบเรียนว่าเท่ากับ $2a$ แท้จริงแล้ว คือ ระยะห่างระหว่างรอยสัมผัสของทรงกลมทั้งสองกับผิวของกรวยเมื่อวัดตามผิวของกรวย นั่นเอง ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ภาพแสดงระยะผลบวกคงที่กรณีวงรี และ ระยะผลต่างคงที่กรณีไฮเพอร์โบลา

เอกสารอ้างอิง

[1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2* (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.

The Institute for The Promotion of Teaching Science and Technology, Ministry of Education. (2018). *Supplementary Mathematics for 10th Grade, No.2* (1st ed.). Bangkok: OTEP Press.

[2] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.

The Institute for The Promotion of Teaching Science and Technology, Ministry of Education. (2011). *Supplementary Mathematics for 10th - 12th Grade, No.2* (3rd ed.). Bangkok: OTEP Press.

[3] สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม. 4 เล่ม 2.* กรุงเทพมหานคร: แม็คเอ็ดดูเคชั่น.

Palawatchai, S. (2018). *Supplementary Mathematics for 10^{th} Grade, No. 2*. Bangkok: Mac Education.

[4] Bertrand, M. (2015). *Dandelin Spheres and The Conic Sections*. Retrieved 3 September 2020 from http://nonagon.org/ExLibris/dandelin-spheres-conic-sections

[5] Dandelin, G. P. (1822). Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables de la Focale Parabolique (Memoir on Some Remarkable Properties of The Focus of The Parabola). *Nouveaux Mémories de l'Académie Royale de Bruxelles, 2*, p. 171 - 202.

[6] Kendig, K. (2005). *Conics*. USA: The Mathematical Association of America.