



วารสารคณิตศาสตร์ **Mathematical Journal** 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: [MathThaiOrg@gmail.com](mailto:MathThaiOrg@gmail.com)

ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วย  
การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการ  
ทำให้บางทวินามลบ

The First Order Integer-Valued Autoregressive Models with  
The Two-Parameter Generalized Poisson-Lindley Distribution  
Based on The Negative Binomial Thinning Operator

สุชิราภรณ์ บุญยะริส<sup>1</sup> และ จิราพรรณ สุนทรโชติ<sup>2,\*</sup>

<sup>1,2</sup>ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
กรุงเทพมหานคร 10330

Suchiraporn Bunyaris<sup>1</sup> and Jiraphan Suntornchost<sup>2,\*</sup>

<sup>1,2</sup>Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,  
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: <sup>1</sup>framesuchiraporn@gmail.com <sup>2</sup>jiraphan.s@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 21 ตุลาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 24 ธันวาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 30 มีนาคม 2564

---

\* ผู้เขียนหลัก

### บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้นำเสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และศึกษาสมบัติที่สำคัญทางความน่าจะเป็นและสถิติ เช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิด ค่าคาดหวัง และ ความแปรปรวน โดยสุดท้ายได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบที่สร้างขึ้น

**คำสำคัญ:** การแจกแจงไม่ต่อเนื่อง การแจกแจงปัวซงแบบผสม การแจกแจงปัวซง-ลินด์เลย์  
ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

### ABSTRACT

In this study, we introduce the first order integer-valued autoregressive models for count data with the two-parameter generalized Poisson-Lindley distribution based on negative binomial thinning operator. Some important probabilistic and statistical properties such as generating function, expectation and variance are derived. Finally, parameter estimations are discussed.

**Keywords:** Discrete distributions, Mixed Poisson distributions, Poisson-Lindley distribution, Negative binomial thinning operator

### 1. บทนำ

ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series data) คือ ชุดของข้อมูลที่เก็บรวบรวมตามระยะเวลาเป็นช่วง ๆ อย่างต่อเนื่องกัน โดยการนับข้อมูลเกิดขึ้นในหลายบริบท เช่น จำนวนอุบัติเหตุ [9] จำนวนผู้ป่วย จำนวนข้อความ จำนวนการซื้อขายหุ้นรายวัน และจำนวนการเอาประกันของกรรมธรรม์ประกันชีวิต ดังนั้นตัวแบบอนุกรมเวลาสำหรับข้อมูลการนับ จึงมีความสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาและสร้างตัวแบบสำหรับปรากฏการณ์ต่าง ๆ กลุ่มของตัวแบบสำหรับข้อมูลการนับที่มีการศึกษาอย่างกว้างขวางในงานวิจัย คือ ตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม (INAR) ซึ่งถูกสร้างขึ้นครั้งแรกโดย McKenzie [12] จากนั้น Alzaid และ Al-Osh [3] ได้สร้างตัวแบบทั่วไปขึ้นตามการแจกแจงของปัวซง โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางทวินาม (binomial thinning operator) ที่ถูกแนะนำโดย Steutel และ Van-Harn [15] และตัวแบบนี้ได้ถูกนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางในหลายสถานการณ์ เช่น Marcelo และคณะ [11] ได้ประยุกต์ใช้ในการคาดการณ์การเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรายเดือน Xiang และคณะ

[16] ได้ประยุกต์ใช้ในการรวมความเสี่ยงตามตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซอง

ตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง (PINAR) นั้น ได้รับความนิยมน้อยมากในการศึกษาเชิงการนับ เพราะสูตรมีความซับซ้อนน้อยและเป็นการประยุกต์จากการแจกแจงปัวซองซึ่งเป็นการแจกแจงที่นิยมสำหรับข้อมูลเชิงการนับ อย่างไรก็ตามการแจกแจงปัวซองมีข้อจำกัดคือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนมีค่าเท่ากัน ซึ่งอาจไม่สามารถใช้ได้บางสถานการณ์ที่ข้อมูลไม่ได้อยู่ในสถานะสมดุล ดังนั้นจึงมีการศึกษาการแจกแจงทางเลือกสำหรับข้อมูลประเภทนี้อย่างกว้างขวางเพื่อลดข้อจำกัดนี้ในทศวรรษที่ผ่านมา เช่น กลุ่มการแจกแจงปัวซองน้อยทั่วไปถูกใช้โดย Alzaid และ Al-Osh [4] จากนั้น Aghababaei และคณะ [1] ได้แนะนำตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซองที่มีค่าศูนย์เพื่อ Bakouch และคณะ [6] ได้เสนอตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ในบรรดาตัวแบบที่กล่าวมานั้นสร้างบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ (negative binomial thinning operator)

การแจกแจงปัวซองน้อยทั่วไปที่ศึกษาอย่างกว้างขวางอย่างหนึ่ง คือ กลุ่มของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ ที่ถูกนำเสนอในบทความของ Sankaran [13] โดยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์เป็นการแจกแจงปัวซองผสมโดยมีพารามิเตอร์เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลินด์เลย์ จากนั้น Bakouch และคณะ [5] ได้ใช้การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์มาสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับการนับด้วยการแจกแจงน้อยทั่วไปของปัวซอง-ลินด์เลย์ และ Mahmoudi และคณะ [9] ได้เสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับการนับด้วยการแจกแจงน้อยทั่วไปของปัวซอง-ลินด์เลย์แบบใหม่ โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางแบบทวินามและทวินามลบ

การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ได้ถูกขยายอย่างแพร่หลายในทศวรรษที่ผ่านมา ตัวอย่างเช่น Ghitany และคณะ [8] ได้ทำการขยายตัวแบบโดยใช้การแจกแจงปัวซองที่ไม่เป็นศูนย์ จากนั้น Mahmoudi และคณะ [10] ได้ทำการขยายตัวแบบโดยใช้การแจกแจงปัวซองน้อยทั่วไปได้เป็นครั้งแรก เพื่อรองรับข้อมูลได้หลากหลายมากขึ้น

Bhati และคณะ [7] ได้นำเสนอการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์แบบสองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป โดยพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซองแบบผสมเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลินด์เลย์สองพารามิเตอร์ที่เสนอใน Shanker และ Sharma [14] ซึ่งเป็นการเพิ่มพารามิเตอร์อีกหนึ่งตัวเข้าไปในการแจกแจงลินด์เลย์ โดย Bhati และคณะ [7] แสดงให้เห็นว่า พฤติกรรมหางขวาของกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นที่

แสดงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปเข้าสู่ศูนย์ ในอัตราที่เร็วกว่าหรือช้ากว่าการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ แสดงให้เห็นถึงความยืดหยุ่น ดังนั้นการแจกแจงนี้จึงใช้งานได้ดีกับข้อมูลที่มีหางทางขวาของฟังก์ชันความหนาแน่นเข้าสู่ศูนย์ ซึ่งชุดข้อมูลดังกล่าวมักพบในอุตสาหกรรมประกันภัย และยิ่งกว่านั้นการจำลองเชิงตัวเลขของพวกเขาแสดงให้เห็นว่าการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป จะดีกว่าการแจกแจงอื่น ๆ สำหรับข้อมูลการนับ โดยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป ที่แสดงไว้ดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 1.1** [7] ตัวแปรสุ่ม  $X$  ที่มีการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์  $\theta$  และ  $\beta$  นัยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $X \sim NGPL(\theta, \beta)$  มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

$$P(X = x) = \frac{\theta^2}{(\theta + \beta)(1 + \theta)^{x+1}} \left(1 + \frac{\beta(x + 1)}{1 + \theta}\right)$$

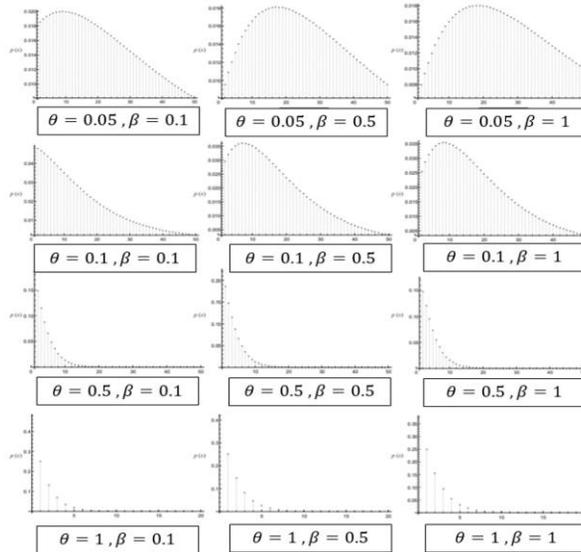
เมื่อ  $x = 0, 1, 2, \dots$  และ  $\beta, \theta > 0$

**ทฤษฎีบท 1.1** [7] คุณสมบัติของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์  $\theta$  และ  $\beta$  นัยทั่วไป ที่ระบุไว้ในบทนิยาม 1.1 มีดังนี้

1. ค่าคาดหวัง คือ  $E(X) = \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)}$
2. ความแปรปรวน คือ  $Var(X) = \frac{2\beta^2(1 + \theta) + \theta^2(1 + \theta) + \beta\theta(4 + 3\theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2}$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ  $\Phi_X(s) = \frac{\theta^2(\beta + \theta - s + 1)}{(\beta + \theta)(\theta - s + 1)^2}$  เมื่อ  $s \in \mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ คือ  $M_X(s) = \frac{\theta^2(\beta + \theta - e^s + 1)}{(\beta + \theta)(\theta - e^s + 1)^2}$  เมื่อ  $s \in \mathbb{R}$

ในบทความนี้ได้นำเสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์  $\theta$  และ  $\beta$  นัยทั่วไป โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ในหัวข้อที่ 2 ของบทความนี้คือ สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม สำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของกระบวนการนวัตกรรม จากนั้นในหัวข้อที่ 3 ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญทางสถิติและความน่าจะเป็นของตัวแบบ ได้แก่ ค่าคาดหวัง ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข ค่าความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ฟังก์ชันค่าสหสัมพันธ์ในตัว และฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัวของตัวแบบ และในหัวข้อที่ 4 ผู้วิจัยได้สร้างสูตรสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข และวิธียูล-วอล์กเกอร์ ซึ่งในส่วน

สุดท้ายคือข้อสรุปและอภิปรายการสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ



รูปที่ 1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป สำหรับค่าต่าง ๆ ของพารามิเตอร์  $\theta$  และ  $\beta$

## 2. การสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ( $NLINAR(1)$ ) ผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบและตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม นอกจากนั้นได้ทำการหากระบวนการนวัตกรรม (innovation process) ของตัวแบบเพื่อให้เป็นไปตามคุณสมบัติของตัวแบบอนุกรมเวลา

**บทนิยาม 2.1** กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ  $\alpha *$  นิยามดังนี้

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^X Z_i$$

เมื่อ  $0 < \alpha < 1$  และ  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันที่มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต โดยมีพารามิเตอร์เป็น  $\frac{1}{1+\alpha}$  และเป็นอิสระจาก  $X$

**ทฤษฎีบท 2.1** คุณสมบัติของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ  $\alpha *$  ที่ระบุไว้ในบทนิยาม 2.1 มีดังนี้

1. ค่าคาดหวัง คือ  $E(\alpha * X) = \alpha E(X)$
2. ความแปรปรวน คือ  $Var(\alpha * X) = \alpha(1 - \alpha)E(X) + \alpha^2 Var(X)$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ  $\Phi_{\alpha * X}(s) = \Phi_X((1 + \alpha - \alpha s)^{-1})$  เมื่อ  $s \in \mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ คือ  $M_{\alpha * X}(s) = M_X((1 + \alpha - \alpha e^s)^{-1})$  เมื่อ  $s \in \mathbb{R}$

**บทนิยาม 2.2** ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $NLINAR(1)$  โดย  $\{X_t\}_{t \geq 1}$  นิยามด้วยสมการดังนี้

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t$$

โดยที่  $\alpha *$  คือตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ซึ่งถูกนิยามไว้ในบทนิยาม 2.1 และ  $\{X_t\}_{t \geq 1}$  เป็นกระบวนการคงที่ (*stationary process*) โดย  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $X \sim NGPL(\theta, \beta)$  และกระบวนการนวัตกรรม  $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 1}$  เป็นลำดับที่เป็นอิสระ และมีการแจกแจงเดียวกันกับ  $\alpha * X_{t-1}$  และ  $\varepsilon_t$  เป็นอิสระต่อกัน

จากสมมติฐานทั่วไปของตัวแบบอนุกรมเวลา มักจะทำการสร้างตัวแบบคงที่ ดังนั้นในส่วนถัดไป ผู้วิจัยจะทำการพิจารณาการแจกแจงและคุณสมบัติของกระบวนการนวัตกรรม  $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 1}$  ที่ทำให้ตัวแบบ  $NLINAR(1)$  คงที่

**ทฤษฎีบท 2.2** จากบทนิยาม 2.2 เมื่อ  $\{X_t\}_{t \geq 1}$  เป็นกระบวนการที่คงที่ โดยมีการแจกแจง  $NGPL(\theta, \beta)$  ดังนั้นกระบวนการนวัตกรรม  $\{\varepsilon_t\}$  มีฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$\Phi_{\varepsilon_t}(s) = \frac{(\beta + \theta - s + 1)(\theta + \alpha\theta - \alpha\theta s + \alpha - \alpha s)^2}{(\theta - s + 1)^2(1 + \alpha - \alpha s)(\theta + \beta + \alpha + \alpha\theta + \alpha\beta - \alpha(\beta + \theta + 1)s)}$$

เมื่อ  $s \in \mathbb{R}$

**บทพิสูจน์** จาก  $\{X_t\}_{t \geq 1}$  คือกระบวนการคงที่ โดยมีการแจกแจง  $NGPL(\theta, \beta)$  จากบทนิยาม 2.2 คุณสมบัติที่  $\alpha * X_{t-1}$  และ  $\varepsilon_t$  อิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 2.1 (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Phi_{X_t}(s) &= E(s^{X_t}) \\ &= E(s^{\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t}) \\ &= E(s^{\alpha * X_{t-1}} s^{\varepsilon_t}) \\ &= E(s^{\alpha * X_{t-1}}) E(s^{\varepsilon_t}) \\ &= \Phi_{\alpha * X_{t-1}}(s) \Phi_{\varepsilon_t}(s) \\ &= \Phi_{X_t}((1 + \alpha - \alpha s)^{-1}) \Phi_{\varepsilon_t}(s) \end{aligned}$$

ดังนั้นกระบวนการนวัตกรรมมีฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon_t}(s) &= \frac{\Phi_{X_t}(s)}{\Phi_{X_t}((1+\alpha-\alpha s)^{-1})} \\ &= \frac{\theta^2(\beta+\theta-s+1)}{(\beta+\theta)(\theta-s+1)^2} \times \frac{(\beta+\theta)(\theta-(1+\alpha-\alpha s)^{-1}+1)^2}{\theta^2(\theta-(1+\alpha-\alpha s)^{-1}+1+\beta)} \\ &= \frac{\beta+\theta-s+1}{(\theta-s+1)^2} \times \frac{(\theta+\alpha\theta-\alpha\theta s-1+1+\alpha-\alpha s)^2}{(1+\alpha-\alpha s)(\beta+\alpha\beta-\alpha\beta s+\theta+\theta\alpha-\alpha\theta s-1+1+\alpha-\alpha s)} \\ &= \frac{(\beta+\theta-s+1)(\theta+\alpha\theta-\alpha\theta s+\alpha-\alpha s)^2}{(\theta-s+1)^2(1+\alpha-\alpha s)(\theta+\beta+\alpha+\alpha\theta+\alpha\beta-\alpha(\beta+\theta+1)s)}\end{aligned}$$

□

### 3. คุณสมบัติความน่าจะเป็นของตัวแบบ $NLINAR(1)$

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาคุณสมบัติบางประการของตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ค่าคาดหวัง และความแปรปรวน

**ทฤษฎีบท 3.1** ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว ( $\gamma_k$ ) และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ( $\rho_k$ ) ที่สอดคล้องกันกับตัวแบบ  $NLINAR(1)$  สำหรับ  $k$  ( $k \geq 1$ ) หน่วยเวลาถูกนิยามตามลำดับดังนี้

1.  $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = \alpha^k \gamma_0$  เมื่อ  $\gamma_0$  คือความแปรปรวนของ  $X_t$
2.  $\rho_k = \alpha^k$

**บทพิสูจน์** จากบทนิยาม 2.2 และคุณสมบัติของ  $\varepsilon_t$  และ  $X_{t-k}$  เป็นอิสระสำหรับ  $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= Cov(X_t, X_{t-k}) \\ &= Cov(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t, X_{t-k}) \\ &= Cov(\alpha * X_{t-1}, X_{t-k}) + Cov(\varepsilon_t, X_{t-k}) \\ &= \alpha Cov(X_{t-1}, X_{t-k}) \\ &= \alpha Cov(\alpha * X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, X_{t-k}) \\ &= \alpha^k Cov(\alpha * X_{t-k}, X_{t-k}) \\ &= \alpha^k \gamma_0\end{aligned}\tag{*}$$

จากบทนิยาม 2.2 เมื่อทำซ้ำจะได้ดังสมการ (\*)

ดังนั้น ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ( $\rho_k$ ) สามารถเขียนได้ว่า

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha^k$$

□

**ข้อสังเกต 3.1** จากทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว  $\rho_k$  จะลดลงแบบทวีคูณ เมื่อ  $k$  เข้าสู่อนันต์

ต่อไปจะพิจารณาคุณสมบัติที่มีเงื่อนไขบางอย่าง เช่น ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของกระบวนการนวัตกรรม  $\varepsilon_t$  และฟังก์ชันความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของตัวแบบคุณสมบัติเหล่านี้ได้มาจากการใช้นิพจน์ของ  $NLINAR(1)$  ที่กำหนดในบทนิยาม 2.2 ดังนั้นก่อนอื่นจะต้องพิจารณาค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ  $X_t$  สำหรับตัวแบบ  $NLINAR(1)$  ซึ่งได้ว่า

$$1. E(X_t) = \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)}$$

$$2. Var(X_t) = \frac{2\beta^2(1+\theta) + \theta^2(1+\theta) + \beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2}$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ  $\varepsilon_t$  จึงถูกกำหนดไว้ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.2** ค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ  $\varepsilon_t$  ที่นิยามไว้ในบทนิยาม 2.2 สำหรับ ตัวแบบ  $NLINAR(1)$  จะถูกนิยามตามลำดับโดย

$$1. E(\varepsilon_t) = (1 - \alpha) \left( \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)$$

$$2. Var(\varepsilon_t) = \frac{(1 - \alpha^2)(2\beta^2(1+\theta) + \theta^2(1+\theta) + \beta\theta(4+3\theta)) - \alpha\theta(1 - \alpha)(\beta + \theta)(2\beta + \theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2}$$

โดยที่  $E(X_t)$  นิยามดังข้างต้น

**บทพิสูจน์** จากบทนิยาม 2.2 จะได้ว่า  $\{X_t\}_{t \geq 1}$  เป็นกระบวนการคงที่โดยมีการแจกแจง  $NGPL(\theta, \beta)$  และจากคุณสมบัติว่า  $\alpha * X_{t-1}$  และ  $\varepsilon_t$  เป็นอิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 1.1 ข้อ 1. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha E(X_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\ &= \alpha \left( \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right) + E(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

ดังนั้น  $E(\varepsilon_t) = (1 - \alpha) \left( \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)$

พิจารณาค่าความแปรปรวนของ  $\varepsilon_t$  ในทำนองเดียวกันจากคุณสมบัติว่า  $\alpha * X_{t-1}$  และ  $\varepsilon_t$  เป็นอิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= Var(\alpha * X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \\ &= \alpha(1 - \alpha)E(X_{t-1}) + \alpha^2 Var(X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

จากนั้นจะได้ว่า  $(1 - \alpha^2)Var(X_t) = \alpha(1 - \alpha)E(X_t) + Var(\varepsilon_t)$  ดังนั้น

$$Var(\varepsilon_t) = (1 - \alpha^2)Var(X_t) - \alpha(1 - \alpha)E(X_t)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \alpha^2) \left( \frac{2\beta^2(1 + \theta) + \theta^2(1 + \theta) + \beta\theta(4 + 3\theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2} \right) - \alpha(1 - \alpha) \left( \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right) \\
&= \frac{(1 - \alpha^2)(2\beta^2(1 + \theta) + \theta^2(1 + \theta) + \beta\theta(4 + 3\theta)) - \alpha\theta(1 - \alpha)(\beta + \theta)(2\beta + \theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2}
\end{aligned}$$

□

**ทฤษฎีบท 3.3** ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของตัวแบบ  $NLINAR(1)$  ล่วงหน้า  $k + 1$  หน่วยเวลา คือ

$$E(X_{t+k} | X_{t-1} = x) = \alpha^{k+1} x + (1 - \alpha^{k+1}) \left( \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)$$

สำหรับ  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

**บทพิสูจน์** จาก  $E(X_{t+k} | X_{t-1} = x) = E(\alpha * X_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x)$

$$= E(\alpha * (\alpha * X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k-1}) + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x)$$

และจากบทนิยาม 2.2 เมื่อแทนค่า  $\{X_t\}_{t \geq 1}$  ซ้ำจนได้สมการสุดท้ายเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X_{t+k} | X_{t-1} = x) &= E(\alpha^{k+1} * X_{t-1} + \alpha^k * \varepsilon_t + \alpha^{k-1} * \varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= E(\alpha^{k+1} * X_{t-1} | X_{t-1} = x) + \sum_{h=0}^k E(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h} | X_{t-1} = x) \\
&= \alpha^{k+1} x + \sum_{h=0}^k \alpha^h E(\varepsilon_{t+k-h}) \\
&= \alpha^{k+1} x + \left( \frac{1 - \alpha^{k+1}}{1 - \alpha} \right) E(\varepsilon_t) \\
&= \alpha^{k+1} x + (1 - \alpha^{k+1}) \left( \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)
\end{aligned}$$

□

**ข้อสังเกต 3.2** ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข  $E(X_{t+k} | X_{t-1} = x)$  จะลู่เข้าหาค่าคาดหวังแบบไม่มีเงื่อนไข คือ  $\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)}$  เมื่อ  $k$  เข้าสู่อนันต์

**ทฤษฎีบท 3.4** ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของตัวแบบ  $NLINAR(1)$  ล่วงหน้า  $k + 1$  หน่วยเวลา คือ

$$\begin{aligned}
&Var(X_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= \alpha^{k+1} (1 - \alpha^{k+1}) x + \frac{1 - \alpha^{2(k+1)}}{1 - \alpha^2} Var(\varepsilon_t) + \frac{\alpha(1 - \alpha^k)(1 - \alpha^{k+1})}{1 - \alpha^2} E(\varepsilon_t)
\end{aligned}$$

สำหรับ  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

**บทพิสูจน์**

$$\begin{aligned}
&Var(X_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= Var(\alpha * X_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Var}(\alpha * (\alpha * X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k-1}) + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
 &= \text{Var}(\alpha^{k+1} * X_{t-1} + \alpha^k * \varepsilon_t + \alpha^{k-1} * \varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
 &= \text{Var}(\alpha^{k+1} * X_{t-1} | X_{t-1} = x) + \sum_{h=0}^k \text{Var}(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h} | X_{t-1} = x) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \sum_{h=0}^k \text{Var}(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h}) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \sum_{h=0}^k (\alpha^h(1 - \alpha^h)E(\varepsilon_{t+k-h}) + \alpha^{2h} \text{Var}(\varepsilon_{t+k-h})) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \text{Var}(\varepsilon_t) \sum_{h=0}^k \alpha^{2h} + E(\varepsilon_t) \sum_{h=0}^k \alpha^h (1 - \alpha^h) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \frac{1 - \alpha^{2(k+1)}}{1 - \alpha^2} \text{Var}(\varepsilon_t) + \frac{\alpha(1 - \alpha^k)(1 - \alpha^{k+1})}{1 - \alpha^2} E(\varepsilon_t)
 \end{aligned}$$

□

**ข้อสังเกต 3.3** ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข  $\text{Var}(X_{t+k} | X_{t-1} = x)$  อยู่เข้าหาความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไขคือ  $\frac{2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$  เมื่อ  $k$  เข้าสู่อนันต์

#### 4. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ $NLINAR(1)$

การประมาณค่าเป็นวิธีการใช้ค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างไปประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นการหาข้อสรุปที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ ในลักษณะของการประมาณ โดยจะนำพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ไปใช้ในตัวแบบเพื่อพยากรณ์แนวโน้มของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคต และในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะพิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบทั้ง 2 วิธี ซึ่งเป็นวิธีที่นิยม ได้แก่ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข (conditional least square: CLS) และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธียูลวอล์กเกอร์ (Yule-Walker: YW)

##### 4.1. การประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข

ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์  $\alpha$  และ  $\mu$  ของตัวแบบ  $NLINAR(1)$  ได้มาจากการแทนค่า  $k = 0$  ในทฤษฎีบท 3.3 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข คือ

$$E(X_t | X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + \mu(1 - \alpha)$$

โดยที่  $\mu = E(X_t)$

ดังนั้น สมการกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข คือ

$$Q_n = \sum_{t=2}^n (X_t - E(X_t | X_{t-1}))^2 = \sum_{t=2}^n (X_t - \alpha X_{t-1} - \mu(1 - \alpha))^2$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ  $Q_n$  เทียบกับพารามิเตอร์  $\mu$  และ  $\alpha$  และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\left. \frac{\partial Q_n}{\partial \mu} \right|_{\mu=\hat{\mu}, \alpha=\hat{\alpha}} = - \sum_{t=2}^n 2(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))(1 - \hat{\alpha}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial Q_n}{\partial \alpha} \right|_{\mu=\hat{\mu}, \alpha=\hat{\alpha}} = \sum_{t=2}^n 2(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))(\hat{\mu} - X_{t-1}) = 0 \quad (4.2)$$

จาก (4.1) จัดรูปได้ดังนี้

$$\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha} \sum_{t=2}^n X_{t-1} - \hat{\mu}(n-1)(1 - \hat{\alpha}) = 0$$

แก้สมการข้างต้นจะได้ค่าประมาณของ  $\hat{\mu}$  มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha} \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1)(1 - \hat{\alpha})}$$

จาก (4.2) จัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{\mu} \sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha} \hat{\mu} \sum_{t=2}^n X_{t-1} - \hat{\mu}^2(n-1)(1 - \hat{\alpha}) - \sum_{t=2}^n X_{t-1}X_t + \hat{\alpha} \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 \\ + (1 - \hat{\alpha})\hat{\mu} \sum_{t=2}^n X_{t-1} = 0 \end{aligned}$$

แก้สมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ  $\hat{\alpha}$  มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\alpha} = \frac{(1-n) \sum_{t=2}^n X_{t-1}X_t + \sum_{t=2}^n X_t \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1) \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^n X_{t-1})^2}$$

จากค่าคาดหมายของ  $X_t$  และสูตร  $\hat{\mu}$  ข้างต้น จะได้ว่า

$$\frac{2\hat{\beta}_{CLS} + \hat{\theta}_{CLS}}{\hat{\theta}_{CLS}(\hat{\beta}_{CLS} + \hat{\theta}_{CLS})} = \hat{\mu}_{CLS} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha}_{CLS} \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1)(1 - \hat{\alpha}_{CLS})}$$

พิจารณาตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์  $\sigma^2$

จากฟังก์ชันที่กำหนดไว้ใน Alzaid และคณะ [2] และการแทนค่า  $k = 0$  ในทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$\text{Var}(X_t | X_{t-1}) = \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \text{Var}(\varepsilon_t)$$

แทน  $\text{Var}(\varepsilon_t)$  จากทฤษฎีบท 3.2 ลงในสมการข้างต้น จะได้ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข คือ

$$Var(X_t | X_{t-1}) = \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + (1 - \alpha^2)\sigma^2 - \alpha(1 - \alpha)\mu$$

หาค่าประมาณของ  $\sigma^2$  โดยพิจารณาจากบทความของ Alzaid และคณะ [2] ซึ่งเริ่มจากสมการกำลังสองน้อยสุด ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{t=2}^n [(X_t - E(X_t | X_{t-1}))^2 - Var(X_t | X_{t-1})]^2 \\ &= \sum_{t=2}^n [(X_t - \alpha X_{t-1} - \mu(1 - \alpha))^2 - \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} - (1 - \alpha^2)\sigma^2 + \alpha(1 - \alpha)\mu]^2 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ  $S_n$  เทียบกับพารามิเตอร์  $\sigma^2$  และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma^2=\hat{\sigma}, \mu=\hat{\mu}, \alpha=\hat{\alpha}} &= \sum_{t=2}^n 2 [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} - (1 - \hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}]^2 (\hat{\alpha}^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

จัดรูปสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\sum_{t=2}^n [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} - (1 - \hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}] = 0$$

แก้สมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ  $\sigma^2$  มีสูตรดังนี้

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^n [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}]}{(1 - \hat{\alpha}^2)(n - 1)}$$

จากค่าคาดหวังของ  $X_t$  และสูตร  $\hat{\sigma}^2$  ข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{2\beta^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\theta}^2(1 + \hat{\theta}) + \beta\hat{\theta}(4 + 3\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2(\beta + \hat{\theta})^2} &= \hat{\sigma}_{CLS}^2 \\ &= \frac{\sum_{t=2}^n [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}]}{(1 - \hat{\alpha}^2)(n - 1)} \end{aligned}$$

## 4.2 การประมาณค่าแบบยูล-วอล์กเกอร์

ในส่วนนี้จะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\alpha$ ,  $\mu$  และ  $\sigma^2$  ของตัวแบบ  $NLINAR(1)$  ด้วยการประมาณค่าแบบยูล-วอล์กเกอร์ โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว ( $\gamma_k$ )

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$$

โดยที่  $0 \leq k < n$  และ  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$  คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

จากสมการยูล-วอล์กเกอร์ และสมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ  $\hat{\alpha}$  มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\alpha}_{YW} = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})^2}$$

ให้  $\hat{\mu} = E(X_t)$  และ  $\hat{\sigma}^2 = Var(X_t)$  นิยามตามในข้างต้นของหัวข้อที่ 3 โดยที่  $S^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{n-1}$

จะได้ค่าประมาณของ  $\hat{\mu}$  และ  $\hat{\sigma}^2$  ด้วยวิธีแบบยูล-วอล์กเกอร์ เป็นดังนี้

$$\hat{\mu}_{YW} = \bar{X} = \frac{2\hat{\beta} + \hat{\theta}}{\hat{\theta}(\hat{\beta} + \hat{\theta})}$$

$$\hat{\sigma}_{YW}^2 = S^2 = \frac{2\hat{\beta}^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\theta}^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\beta}\hat{\theta}(4 + 3\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2(\hat{\beta} + \hat{\theta})^2}$$

## 5. สรุป

ในบทความนี้ได้สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม สำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของกระบวนการนวัตกรรม  $\{e_t\}$  จากนั้นได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญทางสถิติและความน่าจะเป็นของตัวแบบ ได้แก่ ค่าคาดหวัง ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข ค่าความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ฟังก์ชันค่าสหสัมพันธ์ในตัว ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว ของตัวแบบ *NLINAR(1)* และสุดท้ายได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี วิธีแรก คือการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข ซึ่งเริ่มจากการหารูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์  $\alpha$  และ  $\mu$  จากการหาอนุพันธ์ของสมการกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขเทียบกับพารามิเตอร์ จากนั้นทำการหารูปแบบเฉพาะของ  $\sigma^2$  ซึ่งเงื่อนไขที่มีอยู่ไม่เพียงพอที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงศึกษาแนวคิดเพิ่มเติมจากบทความของ Alzaid และคณะ [2] ซึ่งได้รูปแบบเฉพาะของ  $\sigma^2$  แต่ไม่สามารถหารูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์  $\beta$  และ  $\theta$  ได้ และวิธีที่สอง คือการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธียูล-วอล์กเกอร์ โดยวิธีนี้จะใช้สมการยูล-วอล์กเกอร์ในการประมาณค่า  $\alpha$  โดยใช้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างในการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\mu$  และใช้ค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างในการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\sigma^2$  โดยจะได้นำรูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ที่ได้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อพยากรณ์แนวโน้มค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคตต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Aghababaei, J., Jones, M. and Lai, C.D. (2012). First-Order Integer Valued AR Processes with Zero Inflated Poisson Innovations. *Journal of Time Series Analysis*, 33 (6), p. 954 - 963.
- [2] Alzaid, A. A., Abdulhamid, A. and Omair, A. (2014). Poisson Difference Integer Valued Autoregressive Model of Order One. *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society*, 37 (2), p. 465 - 485.
- [3] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1988). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process: Distributional and Regression Properties. *Statistica Neerlandica*, 42, p. 53 - 61.
- [4] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1993). Some Autoregressive Moving Average Processes with Generalized Poisson Marginal Distributions. *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, 45, p. 223 - 232.
- [5] Bakouch, H. S., Mohammadpour, M. and Shirozhan, M. (2019). Poisson-Lindley INAR(1) Model with Applications. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 32, p. 262 - 280.
- [6] Bakouch, H. S. Ristic, M. M. and Nastic, A. S. (2009). A New Geometric First Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) Process. *Statistical Planning and Inference*, 139, p. 2218 - 2226.
- [7] Bhati, D., Sastry, D. and Qadri, P. (2015). New Generalized Poisson-Lindley Distribution: Applications and Properties. *Austrian Journal of Statistics*, 44 (4), p. 35 - 51.
- [8] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Nadarajah, S. (2008). Zero-Truncated Poisson-Lindley Distribution and Its Application. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, p. 279 - 287.
- [9] Mahmoudi, E., Rostami, A. and Roozegar, R. (2018). A New Integer-Valued AR(1) Process with Poisson-Lindley Innovation. *Statistics Applications*, ArXiv:1802.00994v1.

- [10] Mahmoudi, E. and Zakerzadeh, H. (2010). Generalized Poisson–Lindley Distribution. *Communications in Statistics*, 39 (10), p. 1785 - 1798.
- [11] Marcelo, B., Klaus, L. P. and Vasconcellos, V. (2016). A Poisson INAR(1) Process with A Seasonal Structure. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86 (2), p. 373-387.
- [12] McKenzie, E. (1985). Some Simple Models for Discrete Variate Time Series. *Journal of the American Water Resources Association*, 21, p. 645 - 650.
- [13] Sankaran, M. (1970). The Discrete Poisson-Lindley Distribution. *Biometrics*, 26, p. 145-149.
- [14] Shanker, R. and Sharma, S. (2013). A Two-Parameter Lindley Distribution for Modeling Waiting and Survival Times Data. *Applied Mathematics*, 4, p. 363 - 368.
- [15] Steutel, F. W. and Van-Harn, K. (1979). Discrete Analogues of Self-Decomposability and Stability. *The Annals of Probability*, 7 (5), p. 893 - 899.
- [16] Xiang, H., Nannan, Y. and Mi, C. (2018). Risk Aggregation Based on The Poisson INAR(1) Process with Periodic Structure. *Lithuanian Mathematical Journal*, 58, p. 505 - 515.