วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู
Mathematical Problem Posing Abilities of Preservice Teachers

วีรวัฒน์ ไทยขำ[1,*] และ ทรงชัย อักษรคิด[2]
[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ นครสวรรค์ 60000
[2]ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900

Weerawat Thaikam[1,*] and Songchai Ugsonkid[2]
[1]Division of Mathematics, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education,
Nakhon Sawan Rajabhat University, Nakhon Sawan, 60000
[2]Department of Education, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok, 10900

Email: [1]weerawattk29@gmail.com [2]feduscu@ku.ac.th

วันที่รับบทความ : 4 พฤษภาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 29 กรกฎาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 28 มกราคม 2564

บทคัดย่อ

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่สำคัญอีกความสามารถหนึ่งที่ ควรส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนในทุกระดับการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับนักศึกษาครู หากนักศึกษาครูมีความสามารถดังกล่าวแล้วจะตั้งปัญหาที่ส่งเสริมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนในอนาคต

---

* ผู้เขียนหลัก

ต่อไปได้ จากการศึกษาและรวบรวมงานวิจัยเกี่ยวกับความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู สามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภท ได้แก่ (1) ความสามารถในการตั้งปัญหาตามเทคนิคหรือยุทธวิธีการตั้งปัญหาที่กำหนดให้ (2) ความสามารถในการตั้งปัญหาให้สอดคล้องกับลักษณะของเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ (3) ความสามารถในการตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้ (4) ความสามารถในการตั้งปัญหาแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง และ (5) ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับผู้เรียน ผู้เขียนได้นำเสนอรายละเอียดและตัวอย่างประกอบของความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ในแต่ละประเภท และหวังว่าบทความนี้จะเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กับนักศึกษาครูต่อไป

คำสำคัญ: ความสามารถในการตั้งปัญหา การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาครู

ABSTRACT

Mathematical problem posing is another important ability that should be promoted to learners at all levels of education. Especially preservice teachers, if they have this ability, they can pose problems that will support mathematical learning for students in the future. From studying and collecting research on mathematical problem posing ability of preservice teachers can be divided into 5 categories which are (1) the ability to pose problems according to the techniques or strategies for problem posing (2) the ability to pose problems in accordance with the nature of the conditions or situations given (3) the ability to pose problems using the strategy to solve the given problems (4) the ability to pose problems integrated and connected to real contexts and (5) the ability to pose mathematical problems suitable for students. The author presents details and examples of the ability to pose mathematical problems in each category and hopes that this article can be a guideline to further develop the ability to pose mathematical problems for preservice teachers.

Keywords: Problem posing ability, Mathematical problem posing, Preservice teacher

1. บทนำ

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ไม่น้อยกว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกระบวนการทั้งสองเป็นกระบวนการที่ไม่สามารถแยกออกจากกันได้ การตั้งปัญหาสามารถทำได้ทั้งก่อน ระหว่าง และหลังการดำเนินการแก้ปัญหา การตั้งปัญหาก่อนการดำเนินการแก้ปัญหาจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจถึงปัญหา บริบท และเงื่อนไขที่กำหนดให้ หากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนที่ผู้เรียนไม่สามารถแก้ได้แล้ว การตั้งปัญหาย่อยระหว่างการดำเนินการแก้ปัญหาจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถวางแนวทางในการแก้ปัญหาได้ และหากผู้เรียนแก้ปัญหาได้สำเร็จแล้ว การตั้งปัญหาก็ยังช่วยให้ผู้เรียนได้ขยายแนวคิดของปัญหาเดิมเพื่อนำไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ต่อไปได้ [11] นอกจากการตั้งปัญหาจะช่วยส่งเสริมกระบวนการแก้ปัญหาของผู้เรียนแล้วยังช่วยพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และเสริมสร้างเจตคติที่ดีของผู้เรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ได้อีกด้วย

ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรได้รับการส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับครูผู้สอนด้วยไม่ใช่แค่ผู้เรียนเท่านั้น เนื่องจากเป็นหน้าที่หลักของครูที่ต้องสร้างสรรค์ปัญหาให้กับผู้เรียน [6] หากครูมีความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้วจะสามารถตั้งปัญหาให้เหมาะสมกับผู้เรียนได้ทั้งระดับความรู้ ความสามารถ และความสนใจของผู้เรียน โดยการเชื่อมโยงบริบทในชีวิตจริงของผู้เรียนให้เกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายและสามารถที่จะตรวจสอบ วินิจฉัยข้อผิดพลาด หรือความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน ตลอดจนส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มากกว่าการใช้ปัญหาที่มีลักษณะเหมือนแบบฝึกหัดที่เน้นให้ผู้เรียนได้ทำตามขั้นตอนวิธีเท่านั้น จากการศึกษาที่ผ่านมา [8] พบว่าครูที่ไม่มีประสบการณ์ในการตั้งปัญหาตั้งแต่ตอนเป็นนักเรียนหรือเป็นนักศึกษาครู มักจะหลีกเลี่ยงการตั้งปัญหาให้กับนักเรียนหรือเลือกปัญหาที่เป็นเพียงแค่แบบฝึกหัดให้กับนักเรียนเท่านั้น ดังนั้นการเตรียมความพร้อมโดยการจัดประสบการณ์ให้กับนักศึกษาครูให้มีความรู้ความเข้าใจ และมีความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นสิ่งสำคัญเพื่อที่จะนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างมีประสิทธิภาพให้กับนักเรียนต่อไปในอนาคต

2. ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู

ความสามารถในการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูเป็นความสามารถที่นักศึกษาครูจะแสดงออกมาผ่านปัญหาที่ตั้งขึ้น การพิจารณาว่านักศึกษาครูมีความสามารถในการตั้งปัญหาหรือไม่ จะพิจารณาจากปัญหาที่ตั้งขึ้นว่าเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือไม่ แก้ได้หรือไม่ ความซับซ้อนของปัญหามากน้อยเพียงใด หรือปัญหานั้นเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ ซึ่งล้วนขึ้นอยู่กับเกณฑ์ในการพิจารณาที่กำหนดขึ้นมา จากการศึกษาและการรวบรวมงานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวกับความสามารถในการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู สามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภท โดยในแต่ละประเภทจะขอนำเสนอรายละเอียด พร้อมกับยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งบางตัวอย่างได้มีการดัดแปลงเพื่อให้เข้ากับบริบทของไทยมากขึ้นแต่ยังคงลักษณะโครงสร้างของปัญหาไว้ ดังนี้

2.1 ความสามารถในการตั้งปัญหาตามเทคนิคหรือยุทธวิธีการตั้งปัญหาที่กำหนดให้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถทำได้ใน 2 ลักษณะคือ การตั้งปัญหาจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว (problem reformulation) และการตั้งปัญหาขึ้นมาใหม่จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ (problem generation) การจะตั้งปัญหาทั้งสองลักษณะได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นนักศึกษาครูจำเป็นจะต้องมีเทคนิคหรือยุทธวิธีที่จะนำไปใช้ในการตั้งปัญหา การตั้งปัญหาตามเทคนิคหรือยุทธวิธีที่กำหนดจึงถือว่าเป็นความสามารถเริ่มต้นที่นักศึกษาครูพึงมี การตั้งปัญหาประเภทนี้จะพิจารณาจากผลของการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูว่าสอดคล้องตามเทคนิคหรือยุทธวิธีในการตั้งปัญหาที่กำหนดหรือไม่ สำหรับเทคนิคแรกเป็นเทคนิคที่ใช้กับการตั้งปัญหาจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว ซึ่ง Grundmeier [4] ได้เสนอเทคนิคในการตั้งปัญหาไว้ 2 เทคนิค ได้แก่

1) *เทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูล (surface technique)* เป็นเทคนิคในการตั้งปัญหาที่จะยังคงบริบทและโครงสร้างของปัญหาเดิมไว้ ซึ่งประกอบด้วย (1) การเพิ่มข้อมูล (2) การเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (3) การเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และ (4) การเปลี่ยนข้อความใหม่

2) *เทคนิคการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของปัญหา (structure technique)* ซึ่งประกอบด้วย (1) การสลับระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยยังคงบริบทของปัญหาเดิมไว้ (2) การเปลี่ยนบริบท โดยยังคงโครงสร้างของปัญหาเดิมไว้ และ (3) การขยายปัญหาจากปัญหาเดิม

ผู้เขียนขอนำเสนอตัวอย่างของการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูทั้ง 2 เทคนิคนี้ โดยนำเสนอสถานการณ์ที่กำหนดและผลจากการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 การตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูลและโครงสร้างของปัญหา

สถานการณ์ที่กำหนด

"ลูกบอลยางตกจากด้านบนของกำแพงที่มีความสูง 16 ฟุต โดยแต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้นแล้ว ลูกบอลจะเด้งขึ้นด้วยระยะห่างที่เป็นครึ่งหนึ่งของระยะที่ตกลงมา และลูกบอลจะถูกคว้าไว้เมื่อลูกบอลเด้งขึ้นที่ระยะห่างจากพื้น 1 ฟุต อยากทราบว่าลูกบอลกระทบพื้นจำนวนกี่ครั้ง" จงแก้ปัญหาที่กำหนดให้หลังจากนั้นตั้งปัญหาจากปัญหาที่แก้ไปแล้ว

ผลการตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูล (การเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้)

ลูกบอลยางตกจากด้านบนของกำแพงที่มีความสูง 768 ฟุตโดยแต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้นแล้ว ลูกบอลจะเด้งขึ้นด้วยระยะที่เป็นหนึ่งในสี่ของระยะที่ตกลงมา และลูกบอลจะถูกคว้าไว้เมื่อลูกบอลเด้งขึ้นที่ระยะห่างจากพื้น 3 ฟุต อยากทราบว่าลูกบอลกระทบพื้นจำนวนกี่ครั้ง

ผลการตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของปัญหา (การสลับระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้)

ถ้าลูกบอลตกจากกำแพงโดยไม่ทราบความสูงของกำแพง ซึ่งกระทบกับพื้นจำนวน 4 ครั้ง และคว้าลูกบอลไว้ได้เมื่อกระทบกับพื้นครั้งที่ 4 ที่มีระยะห่างจากพื้น 2 ฟุต เมื่อเราทราบว่าในทุกครั้งที่ลูกบอลจะกระทบกับพื้นแล้ว ลูกบอลเด้งขึ้นมาด้วยระยะที่เป็นครึ่งหนึ่งของระยะเดิม อยากทราบว่าลูกบอลตกลงมาจากกำแพงที่มีความสูงกี่ฟุต

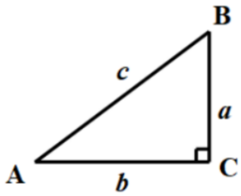
จากตัวอย่างปัญหาที่ตั้งด้วยเทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูล จะเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเปลี่ยนความสูงของกำแพง ระยะห่างจากพื้นกับลูกบอลในการเด้งแต่ละครั้ง และระยะของครั้งสุดท้ายก่อนที่จะคว้าลูกบอลไว้ แต่ยังคงคำถามไว้เหมือนเดิม คือการหาจำนวนครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้น ส่วนปัญหาที่ตั้งด้วยเทคนิคการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของปัญหาโดยการสลับระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือโจทย์เดิมกำหนดความสูงของกำแพง ระยะห่างจากพื้นกับลูกบอลในการเด้งแต่ละครั้ง และระยะของครั้งสุดท้ายก่อนที่จะคว้าลูกบอลไว้มาให้ แล้วให้หาจำนวนครั้งของลูกบอลที่กระทบกับพื้น แต่โจทย์ที่ตั้งขึ้นใหม่กำหนดจำนวนครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้น ระยะของครั้งสุดท้ายก่อนที่จะคว้าลูกบอลไว้ ระยะห่างจากพื้นกับลูกบอลในการเด้งแต่ละครั้ง แล้วถามความสูงของกำแพง

นอกจากเทคนิคการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอไปข้างต้นแล้วยังมียุทธวิธีการตั้งปัญหาที่สามารถนำมาใช้ได้ทั้งกับการตั้งปัญหาจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว และการตั้งปัญหาขึ้นมาใหม่ โดย

Brown และ Walter [1] ได้เสนอยุทธวิธีการเปลี่ยนเงื่อนไข (what if not) ในการตั้งปัญหา ซึ่งมีขั้นตอน 5 ขั้นตอน ผู้เขียนขอนำเสนอขั้นตอนของยุทธวิธีดังกล่าวพร้อมยกตัวอย่างซึ่งเป็นการตั้งปัญหาขึ้นมาใหม่จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.2 การตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีการเปลี่ยนเงื่อนไข

ขั้นตอนที่ 1 เลือกประเด็นเริ่มต้นเพื่อให้ได้มาซึ่งปัญหา เช่น ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



กำหนดให้ $\Delta \mathbf{ABC}$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\mathbf{ACB}$ เป็นมุมฉาก โดยที่ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน

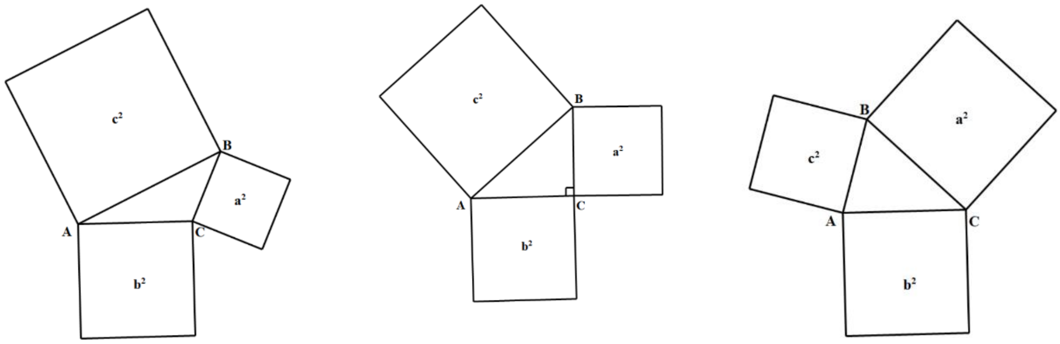
จะเห็นว่า $c^2 = a^2 + b^2$

ขั้นตอนที่ 2 เขียนสมบัติหรือข้อสังเกตที่ได้จากประเด็นที่เลือกมา เช่น ทฤษฎีนี้เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีนี้เกี่ยวกับพื้นที่ มีการใช้เครื่องหมายบวกระหว่างสองตัวแปร ตัวแปรที่ใช้เกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ

ขั้นตอนที่ 3 เขียนประโยคในลักษณะ อะไรจะเกิดขึ้น ถ้าไม่เป็นไปตามสมบัติหรือข้อสังเกตต่าง ๆ เช่น ถ้ารูปสามเหลี่ยมนี้ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน หรือรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ถ้าเป็นเรื่องที่สัมพันธ์กับปริมาตร ถ้าไม่ใช่เครื่องหมายบวกระหว่างตัวแปรสองตัวแปร เช่น $c^2 = a^2 - b^2$ หรือ $c^2 = a^2 \times b^2$ ถ้าไม่ใช่เครื่องหมายเท่ากับ เช่น $c^2 > a^2 + b^2$ หรือ $c^2 < a^2 + b^2$

ขั้นตอนที่ 4 ถามคำถามหรือตั้งปัญหา เช่น มีรูปเรขาคณิตใดที่สอดคล้องกับ $c^2 > a^2 + b^2$ หรือ $c^2 < a^2 + b^2$

ขั้นตอนที่ 5 วิเคราะห์ปัญหาจากปัญหาที่ตั้งขึ้นในขั้นตอนที่ 4 เป็นการวิเคราะห์ความเป็นไปได้ของปัญหาว่าจะสามารถหาคำตอบได้หรือไม่ มีแนวทางหรือวิธีการใดที่จะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบ เช่น จากปัญหาข้อดังกล่าวพบว่า $\Delta \mathbf{ABC}$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน เมื่อ $c^2 > a^2 + b^2$ และเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม เมื่อ $c^2 < a^2 + b^2$ แสดงดังรูปที่ 2.1 ต่อไปนี้



(ก) $\mathbf{ACB} > 90^{\circ}$ และ $c^2 > a^2 + b^2$

(ข) $\mathbf{ACB} = 90^{\circ}$ และ $c^2 = a^2 + b^2$

(ค) $\mathbf{ACB} < 90^{\circ}$ และ $c^2 < a^2 + b^2$

รูปที่ 2.1 การวิเคราะห์ปัญหาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

การฝึกตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนเงื่อนไข นอกจากจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจในมโนทัศน์ของเรื่องนั้น ๆ แล้วยังสามารถส่งเสริมความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งจะนำไปสู่ข้อค้นพบ แนวคิด หรือทฤษฎีใหม่ สามารถต่อยอดทำเป็นโครงงานคณิตศาสตร์ต่อไปได้อีกด้วย

2.2 ความสามารถในการตั้งปัญหาให้สอดคล้องกับลักษณะของเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ประเภทนี้จะกำหนดเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่แตกต่างกันให้กับนักศึกษาครูแล้วพิจารณาผลจากการตั้งปัญหาด้วยเกณฑ์การประเมินที่ผู้วิจัยกำหนด การตั้งปัญหาตามลักษณะของสถานการณ์ที่กำหนดสามารถแบ่งเป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ (1) การตั้งปัญหาแบบโครงสร้าง (structured problem) เป็นการตั้งปัญหาโดยการกำหนดสถานการณ์ปัญหาที่มีโครงสร้างให้หรือจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว (2) การตั้งปัญหาแบบกึ่งโครงสร้าง (semi-structured problem) เป็นการตั้งปัญหาโดยกำหนดสถานการณ์ปลายเปิดมาให้ เช่น การกำหนดรูปภาพ กราฟ ตาราง หรือสมการ แล้วให้ผู้เรียนตั้งปัญหา และ (3) การตั้งปัญหาแบบอิสระ (free problem) เป็นการตั้งปัญหาโดยกำหนดเรื่องหรือหัวข้อให้ผู้เรียนตั้งได้อย่างอิสระ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างจากงานวิจัยของ Silber และ Cai [12] ที่ได้ให้นักศึกษาครูตั้งปัญหาใน 2 ลักษณะ คือ การตั้งปัญหาแบบมีโครงสร้างและการตั้งปัญหาแบบอิสระ โดยใช้สถานการณ์ปัญหาเดียวกัน และเกณฑ์ในการประเมินผลการตั้งปัญหาโดยพิจารณาจากความซับซ้อนของปัญหา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.3 การตั้งปัญหาให้สอดคล้องกับลักษณะของเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้

สถานการณ์ที่กำหนด

"เจม อิน และอาร์ท ขับรถกลับบ้านจากการไปเที่ยว โดยอาร์ทขับระยะทางน้อยกว่าอิน 120 กิโลเมตร ส่วนอินขับเป็นระยะทาง 12 เท่าของเจม ซึ่งเจมขับได้ระยะทาง 50 กิโลเมตร" จงตั้งปัญหาจากข้อมูลที่กำหนดให้

จากตัวอย่าง กลุ่มที่ตั้งปัญหาแบบอิสระจะตั้งปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้เลยจำนวน 3 ข้อ ส่วนกลุ่มที่ตั้งปัญหาแบบมีโครงสร้างจะเพิ่มขั้นตอนก่อนการตั้งปัญหา โดยให้ตั้งปัญหาที่มีผลลัพธ์เท่ากับ 1,130 กิโลเมตร ก่อน จากนั้นค่อยตั้งปัญหาอีก 2 ข้อ ซึ่ง 1,130 กิโลเมตร เกิดจากผลรวมของระยะทางทั้งหมดในการขับรถของทั้งสามคน การกำหนดผลลัพธ์ให้กับนักศึกษาครูได้ตั้งปัญหาในข้อนี้ เพื่อที่จะให้นักศึกษาครูได้คำนวณระยะทางของแต่ละคนแล้วใช้การดำเนินการเพื่อจะหาผลลัพธ์ให้ได้ตามที่กำหนด หลังจากที่นักศึกษาครูหาระยะทางของแต่ละคนได้แล้วนักศึกษาครูก็จะสามารถตั้งปัญหาโดยใช้ข้อมูลของระยะทางการขับรถของแต่ละคนในการตั้งปัญหาต่อไปได้

เกณฑ์ในการประเมินผลการตั้งปัญหา พิจารณาจากความซับซ้อนของปัญหา หากจำนวนความสัมพันธ์ของปัญหามากแสดงว่าปัญหานั้นมีความซับซ้อนมาก โดยความสัมพันธ์ในปัญหาที่ตั้งขึ้น (semantic structural relation) พิจารณาได้ 4 ลักษณะ ได้แก่ ความสัมพันธ์แบบกลุ่ม (group) ความสัมพันธ์แบบเปรียบเทียบ (compare) ความสัมพันธ์แบบเพิ่มเติมข้อมูล (restate) และความสัมพันธ์แบบเปลี่ยนเงื่อนไข (vary) โดยมีรายละเอียดและตัวอย่างประกอบดังตารางที่ 2.1 และ 2.2

ตารางที่ 2.1 การพิจารณาความสัมพันธ์ของปัญหาที่ตั้งขึ้น

ความสัมพันธ์	คำอธิบาย	ตัวอย่างปัญหา
แบบไม่มีความสัมพันธ์	ถามโดยใช้ข้อมูลที่กำหนดให้	อินขับได้ระยะทางมากกว่าอาร์ทกี่กิโลเมตร
แบบกลุ่ม	รวมข้อมูลสองข้อมูลด้วยกัน	ระยะทางรวมของเจม อิน และอาร์ทเป็นเท่าไร
แบบเปรียบเทียบ	เปรียบเทียบข้อมูลสองข้อมูล	อาร์ทขับได้ระยะทางมากกว่าเจมกี่กิโลเมตร

ความสัมพันธ์	คำอธิบาย	ตัวอย่างปัญหา
แบบเพิ่มเติมข้อมูล	การเพิ่มข้อมูลที่ไม่ได้กำหนดให้	อินขับได้ระยะทางกี่กิโลเมตร
แบบเปลี่ยนเงื่อนไข	เปลี่ยนเงื่อนไขที่กำหนดให้	ถ้าเจม อิน และอาร์ท ต้องการขับรถในระยะทางที่เท่ากัน พวกเขาจะต้องขับด้วยระยะทางคนละกี่กิโลเมตร

ตารางที่ 2.2 การพิจารณาความซับซ้อนของปัญหาจากจำนวนความสัมพันธ์

จำนวนของความสัมพันธ์	ตัวอย่างปัญหา	คำอธิบาย
0	อินขับได้ระยะทางมากกว่าอาร์ทกี่กิโลเมตร (แบบไม่มีความสัมพันธ์)	ถามโดยใช้ข้อมูลที่กำหนดให้
1	อินขับได้ระยะทางกี่กิโลเมตร (แบบเพิ่มเติมข้อมูล)	ระยะทางของอินไม่ได้กำหนดไว้ในโจทย์จะต้องหาโดยอาศัยข้อมูลของระยะทางของเจม
2	อินขับได้ระยะทางมากกว่าเจมกี่กิโลเมตร (แบบเปรียบเทียบ และแบบเพิ่มเติมข้อมูล)	หาระยะทางของอิน (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) เปรียบเทียบกับระยะทางของเจม (แบบเปรียบเทียบ)
3	ระยะทางรวมของเจม อินและอาร์ทเป็นเท่าไร (แบบกลุ่ม และแบบเพิ่มเติมข้อมูล)	หาระยะทางของอิน (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) หาระยะทางของอาร์ท (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) หาระยะทางรวม (แบบกลุ่ม)
4	พวกเขาจะต้องเติมแก๊สกี่ครั้งถ้าพวกเขาต้องเติมแก๊สทุก 60 กิโลเมตร (แบบเปลี่ยนเงื่อนไข แบบกลุ่ม และแบบเพิ่มเติมข้อมูล)	หาระยะทางของอิน (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) หาระยะทางของอาร์ท (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) หาระยะทางรวม (แบบกลุ่ม) คำนวณการเติมแก๊สซึ่งมีเงื่อนไขที่เปลี่ยนไป (แบบเปลี่ยนเงื่อนไข)

2.3 ความสามารถในการตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ประเภทนี้ มุ่งส่งเสริมให้ผู้เรียนแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาให้เหมาะสม ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาจะนำมาใช้ในการวางแผนการแก้ปัญหา ทำให้สามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้สำเร็จ ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา ประกอบด้วย การลองผิดลองถูก การวาดภาพ การสร้างแบบจำลอง การค้นหาแบบรูป การสร้างรายการ ตาราง และแผนภูมิ การทำงานย้อนกลับ การใช้ปัญหาที่คุ้นเคยและง่ายกว่า การใช้เหตุผลเชิงตรรกะ การแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด การเปลี่ยนมุมมอง และการให้เหตุผลทางอ้อม จากงานวิจัยของ Kiliç [5] ได้ให้นักศึกษาครูได้ตั้งปัญหาที่สามารถแก้ด้วยยุทธวิธีการค้นหาแบบรูป ผู้เขียนขอนำเสนอตัวอย่าง สถานการณ์ที่กำหนด และผลการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู ดังนี้

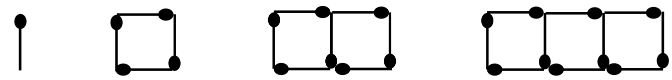
ตัวอย่างที่ 2.4 การตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้

สถานการณ์ที่กำหนด

จงตั้งปัญหาที่ใช้ยุทธวิธีการค้นหาแบบรูปในการแก้ปัญหา

ผลการตั้งปัญหา

1)



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4

จากรูปแสดงการต่อก้านไม้ขีด โดยรูปที่ 1 มีก้านไม้ขีด จำนวน 1 ก้าน รูปที่ 2 มีก้านไม้ขีด จำนวน 4 ก้าน รูปที่ 3 มีก้านไม้ขีด จำนวน 7 ก้าน และ รูปที่ 4 มีก้านไม้ขีด จำนวน 10 ก้าน

ถ้าต่อแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาจำนวนก้านไม้ขีดที่ต่อกันในรูปที่ 40

2) ทหารคนหนึ่งประจำการที่ค่ายทหาร โดยอีก 57 วัน เขาจะได้กลับบ้าน ถ้าหากวันนี้เป็นวันอาทิตย์ อยากทราบว่าวันที่เขาจะได้กลับบ้านตรงกับวันใดในสัปดาห์

จากตัวอย่างที่ 2.4 ปัญหาในข้อที่ 1) เป็นปัญหาแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้น (growing pattern) โดยจำนวนก้านไม้ขีดจะเพิ่มขึ้นทีละ 3 ก้าน เท่า ๆ กัน ส่วนปัญหาในข้อที่ 2) เป็นปัญหาแบบรูปซ้ำ (repeating pattern) โดยทุก 7 วัน จะเวียนบรรจบมายังวันเดิม นั่นคือวันอาทิตย์ ปัญหาทั้งสองข้อที่นักศึกษาครูตั้งขึ้นจะต้องใช้ยุทธวิธีการค้นหาแบบรูปในการหาคำตอบ การตั้งปัญหาเรื่องแบบรูปทั้งสองลักษณะ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้เข้าใจในมโนทัศน์เรื่องแบบรูปและฝึกการใช้ยุทธวิธีการค้นหาแบบรูปในการแก้ปัญหา

2.4 ความสามารถในการตั้งปัญหาแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง

การตั้งปัญหาสำหรับผู้เรียนแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง จะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย ผู้ตั้งปัญหาจะต้องเข้าใจถึงบริบทที่ใกล้ชิดกับผู้เรียน สิ่งที่ผู้เรียนพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน หรือสิ่งที่อยู่ในความสนใจของผู้เรียน จากการศึกษางานวิจัย [9, 13] พบว่า การตั้งปัญหาของนักศึกษาครูมีอยู่ใน 2 ลักษณะ คือปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical modelling) ซึ่งจะนำไปสู่การแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไป และปัญหาที่นำบริบทจริงมาใช้เป็นเพียงสถานการณ์ในการตั้งปัญหาเท่านั้น ไม่ได้นำไปสู่กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่มาจากบริบทจริงที่ผู้เรียนสามารถพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน ลักษณะของปัญหาจะมีความคลุมเครือ ข้อมูลที่กำหนดมาให้ไม่ชัดเจน จึงจำเป็นต้องใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการแก้ปัญหา เริ่มจากการทำความเข้าใจปัญหาในบริบทของชีวิตจริง เพื่อเชื่อมโยงข้อมูลที่มีอยู่มาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หาความสัมพันธ์และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากนั้นอนุมานผลลัพธ์ที่ได้ ตีความกลับไปยังบริบทของชีวิตจริง และทำการตรวจสอบผล ผู้เขียนขอยกตัวอย่างปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาครูตั้งขึ้นให้กับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น [13] ดังนี้

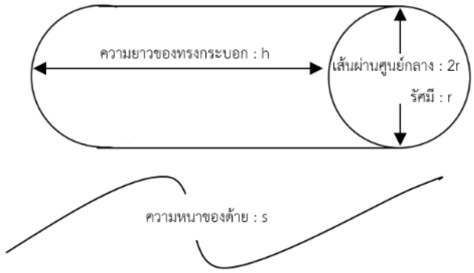
ตัวอย่างที่ 2.5 การตั้งปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สถานการณ์ที่กำหนด

จงตั้งปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยสามารถเลือกเนื้อหาใดก็ได้

ผลการตั้งปัญหา

หลอดด้ายเป็นวัสดุสำคัญในอุตสาหกรรมสิ่งทอ จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงจำนวนชั้นของด้ายที่ใช้ในการพันหลอดด้ายเหล่านี้ จากชั้นในถึงชั้นนอกสุด และแก้ปัญหาจากแบบจำลองที่สร้างขึ้น



รูปที่ 2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

จากตัวอย่างที่ 2.5 นักเรียนต้องใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งสามารถสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังรูปที่ 2.2 โดยที่ h แทนความยาวของทรงกระบอก r แทนรัศมี s แทนความหนาของด้าย และ n แทนจำนวนชั้นของด้ายที่ใช้ในการพันหลอด

ปัญหาในอีกลักษณะหนึ่งเป็นการนำบริบทจริงมาใช้ แต่ไม่ได้นำไปสู่กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ปัญหาลักษณะนี้ข้อมูลหรือเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มีความชัดเจน สามารถนำไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาได้ ผู้เขียนขอนำเสนอตัวอย่างเป็นปัญหาปลายเปิดที่ใช้ภาพถ่ายของรั้วมาเป็นบริบทของปัญหา [9] ปัญหาข้อนี้นักศึกษาครูได้ตั้งขึ้นสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.6 การตั้งปัญหาแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง

สถานการณ์กำหนด

จงตั้งปัญหาปลายเปิดจากภาพถ่ายที่กำหนดให้สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา

ผลการตั้งปัญหา

1) จงเขียนแบบรูปของถุงมือที่สังเกตได้จากภาพที่กำหนดให้ พร้อมทั้งอธิบายประกอบ

2) เชือกที่เชื่อมระหว่างแผงกั้นรั้วโรงเรียนมีความยาวรวมทั้งหมด 300 เมตร หากต้องการนำเชือกดังกล่าวมาล้อมทำเป็นรั้วของสนามโรงเรียนสามารถล้อมสนามที่มีรูปร่างลักษณะใดได้บ้าง โดยวาดภาพประกอบ พร้อมทั้งระบุความยาวแต่ละด้าน และคำนวณหาความยาวรอบรูป

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะเห็นความแตกต่างของปัญหาทั้งสองข้อที่สร้างขึ้น โดยปัญหาข้อที่ 1) เป็นปัญหาที่บริบทมีความสำคัญในการแก้ปัญหา นั่นคือ ข้อมูลที่อยู่ในภาพถ่ายจะต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องสังเกตถุงมือที่ติดอยู่กับรั้วที่มีสีต่างกันเพื่อให้ได้แบบรูป ส่วนปัญหาข้อที่ 2) เป็นปัญหาที่บริบทช่วยกระตุ้นความสนใจหรือทำให้นักเรียนเห็นภาพ แต่ไม่มีส่วนสำคัญในการแก้ปัญหา โดยรั้วจากภาพนำมาเป็นบริบท แต่ไม่ได้ใช้ข้อมูลจากในภาพเพื่อแก้ปัญหา

2.5 ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับผู้เรียน

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ข้อเดียวกัน อาจจะไม่ใช่ปัญหาสำหรับผู้เรียนทุกคน เนื่องจากผู้เรียนบางคนอาจมีประสบการณ์เกี่ยวกับปัญหาที่กำหนดให้มาแล้ว จึงสามารถแก้ปัญหานั้นได้ในทันที ดังนั้น การตั้งปัญหาจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาถึงผู้แก้ปัญหาหรือผู้เรียนว่า ปัญหานั้นเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ จากการศึกษางานวิจัย [2 - 3 ,7] พบว่า มีการพิจารณาการตั้งปัญหาที่เหมาะสมกับผู้เรียนจากเกณฑ์การประเมินของผู้วิจัย จากผู้ตั้งปัญหา หรือจากผู้แก้ปัญหา

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับผู้เรียนในมุมมองของผู้ตั้งปัญหานั้น จะพิจารณาว่าปัญหาที่ตั้งขึ้นนั้นเป็นปัญหาที่มีคุณค่า (worthwhile problems) สำหรับผู้แก้ปัญหาหรือไม่ ปัญหาที่มีคุณค่า [7] เป็นปัญหาที่ต้องใช้ขั้นตอนหลายขั้นตอนในการแก้ปัญหา หรือเป็นปัญหาที่มีคำตอบหลายคำตอบ หรือเป็นปัญหาที่มีการเพิ่มข้อมูลที่ให้มา แต่ไม่ได้นำมาใช้ในการแก้ปัญหา (extraneous information) เพื่อทดสอบดูว่าผู้เรียนเข้าใจปัญหาหรือไม่ และสามารถเลือกข้อมูลมาใช้ในการแก้ปัญหาได้หรือไม่ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างปัญหาที่นักศึกษาครูตั้งขึ้นสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 4 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.7 การตั้งปัญหาที่มีคุณค่า

สถานการณ์กำหนด

จงตั้งปัญหาที่มีคุณค่าให้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 4

ผลจากการตั้งปัญหา

1) โชคชัยเป็นเจ้าของฟาร์มแห่งหนึ่ง เขาเลี้ยงวัวและไก่ไว้จำนวนหนึ่ง เมื่อนับขาของวัวและไก่รวมกันได้ 30 ขา โดยเลี้ยงวัวและไก่อย่างน้อยชนิดละ 4 ตัว จงหาจำนวนวัวและไก่ที่โชคชัยเลี้ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

2) ชาญอายุ 11 ปี เป็นพี่ชายของบาส เขาจัดงานเลี้ยงฉลองวันเกิดครบรอบ 8 ปี ให้กับบาส โดยเป่าลูกโป่งเพื่อตกแต่งสถานที่จำนวน 22 ลูก แต่ลูกโป่งแตกไปครึ่งหนึ่ง อยากทราบว่าเหลือลูกโป่งกี่ลูก

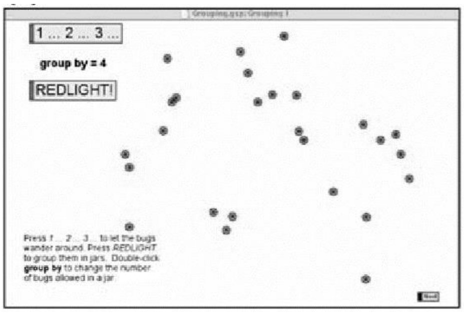
จากผลการตั้งปัญหา ในตัวอย่างที่ 2.7 พบว่า ปัญหาข้อที่ 1) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ขั้นตอนหลายขั้นตอนในการแก้ปัญหา นั่นคือขั้นตอนแรกจะต้องหาจำนวนขาของวัวและไก่ ซึ่งจากจำนวนวัวและไก่อย่างน้อยชนิดละ 4 ตัว จะสามารถหาจำนวนขาของวัว 4 ตัวได้ 16 ขา และขาของไก่ 4 ตัว ได้ 8 ขา จากนั้นในขั้นตอนต่อไปจะนำขาทั้งหมดที่นับรวมได้ของสัตว์ทั้งสองชนิดมาหักออกจาก 30 ขา ก็จะเหลือ 6 ขา เกิดขึ้นได้ 2 กรณี คือ กรณีที่ขาที่เหลือทั้งหมดเป็นขาของไก่ ซึ่งจะคิดเป็นไก่ 3 ตัว ทำให้ได้ว่า จะมีวัว 4 ตัว และไก่ 7 ตัว หรือกรณีที่ขาที่เหลือเป็นขาของวัวและของไก่ ซึ่งจะว่าเป็นขาของวัวได้ 4 ขา หรือคือวัว 1 ตัว และเป็นขาของไก่ได้ 2 ขา หรือคือไก่ 1 ตัว ทำให้ได้ว่า จะมีวัวและไก่อย่างละ 5 ตัว ส่วนปัญหาข้อที่ 2) เป็นปัญหาที่มีการเพิ่มข้อมูลที่ให้มา แต่ไม่ได้นำมาใช้ในการแก้ปัญหา คือ อายุของชาญและบาส แต่เพื่อเป็นการตรวจสอบว่าผู้เรียนเข้าใจในปัญหาและสามารถเลือกข้อมูลที่กำหนดให้มาใช้ในการแก้ปัญหาได้หรือไม่ นอกจากนี้ยังสามารถใช้วิธีในการแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธี เช่น การวาดรูปลูกโป่ง จำนวน 22 ลูก แล้วขีดทับครึ่งหนึ่งแทนจำนวนลูกโป่งที่แตก ก็จะได้จำนวนลูกโป่งที่เหลือ การหาจำนวนครึ่งหนึ่งของ 22 การหาจำนวนที่เป็นสองเท่าของตัวมันเองแล้วได้ผลลัพธ์เป็น 22 การแบ่งจำนวนโดยคิดว่าครึ่งหนึ่งของ 20 คือ 10 และครึ่งหนึ่งของ 2 คือ 1 แล้วนำทั้งสองจำนวนมารวมกัน นั่นคือ 10 มาบวกกับ 1

การตั้งปัญหาเปรียบเสมือนดั่งอาหาร นั่นคือ **ปัญหาที่ดีมีคุณค่า** เปรียบเสมือนกับอาหารที่มีคุณค่าทางโภชนาการ ดังตัวอย่างปัญหาที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น แต่ **ปัญหาที่น่าสนใจ** เปรียบเสมือนดั่งอาหารที่มีรสชาติอร่อย ซึ่งจะเป็นการมองปัญหาให้เหมาะสมกับผู้เรียนในมิติของความงาม หรือความน่าสนใจของปัญหา ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการตั้งปัญหาที่พิจารณาถึงความน่าสนใจของปัญหา ดังนี้

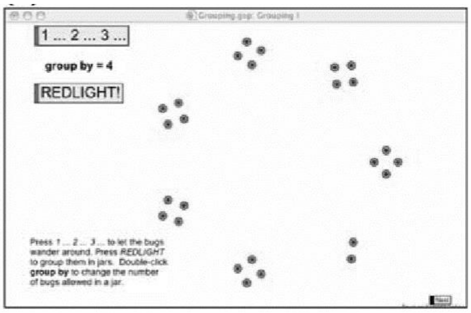
ตัวอย่างที่ 2.8 การตั้งปัญหาที่น่าสนใจ

สถานการณ์ที่กำหนด

ให้สำรวจจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เมื่อแทนแมลง จำนวน 26 ตัว ด้วยจุด 26 จุด ดังภาพ (ก) สามารถกดปุ่มเพื่อเลือกจำนวนสมาชิกของแมลงในแต่ละกลุ่ม และกดปุ่ม REDLIGHT! แมลงก็จะจัดกลุ่มตามจำนวนที่เลือกดังภาพ (ข) จากนั้นตั้งปัญหาที่น่าสนใจ



(ก)



(ข)

ผลการตั้งปัญหา

1) ถ้านักเรียนเพิ่มหรือลดจำนวนสมาชิกในกลุ่มของแมลงแล้ว ผลที่ได้จะเป็นอย่างไร

2) นักเรียนสามารถจัดกลุ่มแมลงอย่างไรได้บ้าง เพื่อไม่ให้เหลือจำนวนแมลงเป็นจำนวนคี่

จากผลการตั้งปัญหา ในตัวอย่างที่ 2.8 พบว่า ปัญหาข้อที่ 1) เป็นปัญหาการเพิ่มหรือลดจำนวนสมาชิกในกลุ่มของการจัดกลุ่มแมลง ซึ่งการจัดกลุ่มที่มีจำนวนสมาชิกเป็น 1 2 13 หรือ 26 นั้น จะสามารถจัดกลุ่มได้พอดี แต่ถ้าจัดกลุ่มเป็นจำนวนอื่นจะมีแมลงเหลืออยู่ ปัญหาที่ตั้งขึ้นนี้เป็นปัญหาที่แปลกใหม่ (novelty) สามารถนำไปสู่ความเข้าใจในการหารลงตัว การหารไม่ลงตัว และการหาตัวประกอบได้ และอาจจะได้คำตอบที่ไม่คาดคิด จากการเพิ่มหรือลดจำนวนสมาชิกของการจัดกลุ่มแมลง ส่วนปัญหาข้อที่ 2) เป็นปัญหาการหาวิธีในการจัดกลุ่มแมลง เพื่อไม่ให้เหลือแมลงเป็นจำนวนคี่ ซึ่งเป็นปัญหาที่มีความน่าสนใจ เนื่องจากเป็นปัญหาที่นำไปสู่การทำความเข้าใจกับประเภทของจำนวน นั่นคือ จำนวนคู่ จำนวนคี่ ก่อนจึงจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่พิจารณาความเหมาะสมกับผู้เรียนว่าเป็นปัญหาที่ดีมีคุณค่าและน่าสนใจจากมุมมองของผู้ตั้งปัญหานั้น อาจจะไม่ตรงกับมุมมองของผู้แก้ปัญหาเอง มีงานวิจัยที่เปรียบเทียบมุมมองระหว่างนักเรียนกับนักศึกษาครูเกี่ยวกับความน่าสนใจของปัญหา [10] โดยนำปัญหาไปให้นักเรียนได้แก้และพิจารณาว่าปัญหาใดเป็นปัญหาที่ตนสนใจ แล้วนำมาเปรียบเทียบกับ

คำตอบของนักศึกษาครูที่พิจารณาปัญหาว่าปัญหาใดเป็นปัญหาที่นักเรียนสนใจ ผลการวิจัยพบว่ามีมุมมองที่แตกต่างกัน โดยนักศึกษาครูคิดว่าปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาที่นักเรียนสนใจ แต่ความเป็นจริงแล้วนักเรียนไม่ได้สนใจที่จะแก้ปัญหาประเภทดังกล่าว ดังนั้นการตั้งปัญหาโดยให้ตรงกับผู้แก้ปัญหา จะทำให้ได้เรียนรู้ว่าปัญหานั้นมีความเหมาะสมกับผู้เรียนจริงหรือไม่ ซึ่ง Crespo [2] ได้ให้นักศึกษาครูตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยมีการเขียนจดหมายโต้ตอบกันระหว่างนักเรียนและนักศึกษาครู สิ่งที่พบในการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูผ่านจดหมายฉบับแรก ๆ พบว่า นักศึกษาครูตั้งปัญหาใน 3 ลักษณะ ได้แก่ 1) การตั้งปัญหาให้ง่ายต่อการแก้ มีการแบ่งข้อคำถามย่อย ๆ เพื่อเป็นแนวทางในการหาคำตอบ 2) การตั้งปัญหาที่คุ้นเคยเหมือนกับแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน และ 3) การตั้งปัญหาที่ผู้ตั้งปัญหาไม่ได้ตรวจสอบคำตอบของปัญหา หลังจากมีการส่งจดหมายไปกลับหลายฉบับ ในจดหมายฉบับท้าย ๆ ได้เห็นการเปลี่ยนแปลงของการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู โดยมีการตั้งปัญหาใน 3 ลักษณะ ได้แก่ 1) การตั้งปัญหาที่ไม่คุ้นเคย คือเป็นปัญหาหลายขั้นตอน หรือเป็นปัญหาปลายเปิด 2) การตั้งปัญหาที่ท้าทายและกระตุ้นการคิดของนักเรียน และ 3) การตั้งปัญหาเพื่อเรียนรู้วิธีการคิดของนักเรียน ผู้เขียนขอยกตัวอย่างปัญหาทั้ง 3 ลักษณะ ดังนี้

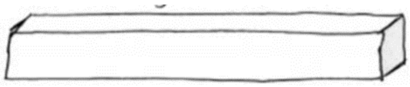
ตัวอย่างที่ 2.9 การตั้งปัญหาที่ไม่คุ้นเคย

กาลครั้งหนึ่งนานมาแล้ว มีราชินี 2 องค์ คือ เอลซ่า และอันนา โดย เอลซ่า ปกครองประเทศขนาดเล็ก แต่ร่ำรวย เธอจึงให้ออกแบบธงที่มีเส้นรอบรูปยาว 20 เมตร แต่ให้มีขนาดเล็กที่สุด เพื่อที่จะไม่ให้ประเทศอื่น ๆ รับรู้ว่าประเทศของตนนั้นร่ำรวย ส่วน อันนา ปกครองประเทศขนาดใหญ่แต่ประเทศยากจน เธอจึงให้ออกแบบธงที่มีเส้นรอบรูปเท่ากับประเทศของเอลซ่า แต่ให้มีขนาดใหญ่ที่สุด เพื่อที่จะให้ประเทศอื่น ๆ รับรู้ว่าประเทศของตนนั้นเป็นประเทศมหาอำนาจ จงหารูปร่างของธงทั้งสองประเทศ โดยมีเชือกยาว 20 เซนติเมตร ให้นักเรียนได้ทดลองออกแบบธงทั้งสองขนาดและติดเชือกดังกล่าวลงบนตารางกริด พร้อมทั้งอธิบายประกอบ

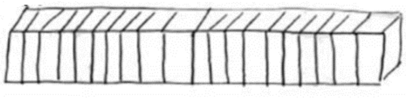
ตัวอย่างที่ 2.10 การตั้งปัญหาที่ท้าทายและกระตุ้นการคิดของนักเรียน

ขยะที่มาจากกระดาษบรรจุภัณฑ์ที่ใช้ในการห่อหุ้มสินค้าทำให้เกิดปัญหาสิ่งแวดล้อม ซึ่งหากบริษัทหรือโรงงานในการผลิตสินค้าสามารถที่จะลดปริมาณของการใช้กระดาษบรรจุภัณฑ์ แต่ยังคงสามารถบรรจุสินค้าที่มีปริมาณเท่าเดิมได้ ก็จะช่วยลดปัญหาสิ่งแวดล้อม โรงงานน้ำตาลแห่งหนึ่ง

ต้องการบรรจุน้ำตาลก้อนทรงลูกบาศก์จำนวน 20 ก้อนใน 1 กล่อง ดังรูป (ก) โดยน้ำตาลทั้ง 20 ก้อน ได้มีการจัดเรียงเป็นแถวเดียวดังรูป (ข)



(ก)



(ข)

นักเรียนจะมีวิธีการจัดเรียงน้ำตาลก้อนอย่างไร เพื่อให้มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด โดยพื้นที่ผิวหาได้จากจำนวนหน้าของลูกบาศก์ที่มองเห็น เช่น น้ำตาล 1 ก้อน มีพื้นที่ผิวที่มองเห็น 6 หน้า นั่นคือการจัดเรียงในลักษณะใดจะทำให้มองเห็นหน้าได้จำนวนน้อยที่สุด พร้อมทั้งอธิบายว่าโจทย์นี้ยากหรือง่ายอย่างไร และคิดว่าควรทำอย่างไรให้โจทย์นี้ท้าทายมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.11 การตั้งปัญหาเพื่อเรียนรู้วิธีการคิดของนักเรียน

จิงโจ้ตัวหนึ่งยืนอยู่ข้างต้นไม้ต้องการกระโดดไปหากระต่ายซึ่งยืนอยู่ไม่ไกลจากจิงโจ้ แต่จิงโจ้สามารถกระโดดได้แต่ละครั้งเป็นระยะทางครึ่งหนึ่งของระยะทางของครั้งก่อนหน้า อยากทราบตำแหน่งในการกระโดดของจิงโจ้ในครั้งที่ 1 ครั้งที่ 2 และครั้งที่ 7 และจิงโจ้สามารถไปถึงที่กระต่ายยืนอยู่ได้หรือไม่

1) นักเรียนคิดอย่างไรเมื่อได้อ่านปัญหานี้

2) นักเรียนทราบหรือไม่ว่าจะเริ่มต้นในการแก้ปัญหานี้อย่างไร และคิดหาวิธีการแก้ในทันทีหรือไม่

3) นักเรียนสามารถคิดในใจได้ทันที หรือมีการทดเพื่อแก้ปัญหานี้

4) นักเรียนได้เรียนรู้อะไรจากการแก้ปัญหานี้

ตัวอย่างที่ 2.9 เป็นตัวอย่างของการตั้งปัญหาที่ไม่คุ้นเคย เนื่องจากนักเรียนจะคุ้นเคยกับธงที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งปัญหาข้อนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนได้พิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวรอบรูปกับพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ส่วนตัวอย่างที่ 2.10 เป็นตัวอย่างของการตั้งปัญหาที่ท้าทายและกระตุ้นการคิดของนักเรียน โดยจะต้องหาวิธีการจัดเรียงน้ำตาลก้อนทั้ง 20 ก้อนให้มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด และตัวอย่างที่ 2.11 เป็นการตั้งปัญหาเพื่อเรียนรู้วิธีการคิดของนักเรียนโดยมีคำถามต่อจากปัญหาที่นักศึกษาครูได้ตั้งให้กับนักเรียน โดยถามถึงวิธีการคิดเพื่อที่จะแก้ปัญหานี้ตลอดจนสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้หลังจากที่แก้ปัญหานี้แล้ว

3. สรุป

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถหนึ่งที่มีความสำคัญและควรส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับนักศึกษาครู การตั้งปัญหาเป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักศึกษาครูสามารถที่จะสร้างสรรค์ปัญหาให้กับนักเรียนของตนเองในอนาคตต่อไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ การพัฒนาความสามารถในการตั้งปัญหาควรให้นักศึกษาครูได้มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับเทคนิคและยุทธวิธีในการตั้งปัญหา และมีโอกาสในการฝึกตั้งปัญหาตามเทคนิคและยุทธวิธีที่กำหนด ผ่านสถานการณ์หรือเงื่อนไขที่หลากหลาย ซึ่งจะช่วยให้นักศึกษาครูได้ประยุกต์ใช้เทคนิคและยุทธวิธีต่าง ๆ ตลอดจนสามารถมองเห็นแนวทางในการตั้งปัญหาของตนเองได้ นอกจากนี้ควรให้นักศึกษาครูได้ตระหนักถึงคุณค่าของปัญหาที่ตนเองตั้งขึ้นและสามารถตั้งปัญหาที่จะช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ให้กับนักเรียนได้ อันได้แก่ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเจตคติที่ดีต่อรายวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เขียนได้ศึกษาและรวบรวมมาทั้ง 5 ประเภทนี้ ความสามารถแต่ละประเภทที่เกิดขึ้นนั้นเปรียบเสมือนความสำเร็จของการก้าวบันไดในแต่ละขั้น โดยเริ่มต้นก้าวแรกจากการฝึกฝนความสามารถในตัวของนักศึกษาครูด้วยเทคนิคและยุทธวิธีการตั้งปัญหาก่อนจนไปถึงปลายทางก้าวสุดท้ายที่เป็นความสามารถในการตั้งปัญหาที่เหมาะสม มีคุณค่าและน่าสนใจสำหรับตัวผู้เรียน ผู้อ่านสามารถนำไปเป็นแนวทางในการส่งเสริมและพัฒนานักศึกษาครูตลอดจนการฝึกอบรมครู ให้สามารถตั้งปัญหาที่ส่งเสริมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนต่อไปได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Brown, S. I., and Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing*. Psychology Press.

[2] Crespo, S. (2003). Learning to Pose Mathematical Problems: Exploring Changes in Preservice Teachers' Practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), p. 243 - 270.

[3] Crespo, S., and Sinclair, N. (2008). What Makes A Problem Mathematically Interesting? Inviting Prospective Teachers to Pose Better Problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (5), p. 395 - 415.

[4] Grundmeier, T. A. (2015). Developing The Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. *Mathematical Problem Posing* (p. 411 - 431). Springer, New York.

[5] Kılıç, Ç. (2017). A New Problem-Posing Approach Based on Problem-Solving Strategy: Analyzing Pre-service Primary School Teachers' Performance. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 17 (3), p. 771 – 789.

[6] Lappan, G. (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. *Reston (Virginia): National Council for Teachers of Mathematics*. Houston.

[7] Leavy, A., and Hourigan, M. (2020). Posing Mathematically Worthwhile Problems: Developing The Problem-Posing Skills of Prospective Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, p. 1 - 21.

[8] Lee, Y., Capraro, R. M., and Capraro, M. M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13 (2), p. 75 - 90.

[9] Nicol, C., and Bragg, L. (2009). Designing Problems: What Kinds of Open-Ended Problems Do Preservice Teachers Pose?. *Proceedings of 33rd Annual Meeting of The International Group for The Psychology of Mathematics Education* (p. 225 - 232). Thessaloniki, Greece.

[10] Rellensmann, J., and Schukajlow, S. (2017). Does Students' Interest in A Mathematical Problem Depend on The Problem's Connection to Reality? An Analysis of Students' Interest and Pre-service Teachers' Judgments of Students' Interest in Problems With and Without A Connection to Reality. *ZDM – Mathematics Education*, 49 (3), p. 367 - 378.

[11] Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For The Learning of Mathematics*, 14 (1), p. 19 - 28.

[12] Silber, S., and Cai, J. (2017). Pre-service Teachers' Free and Structured Mathematical Problem Posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48 (2), p. 163 - 184.

[13] Unver, S. K., Hidiroglu, C. N., Dede, A. T., and Guzel, E. B. (2018). Factors Revealed while Posing Mathematical Modelling Problems by Mathematics Student Teachers. *European Journal of Educational Research*, 7 (4), p. 941 - 952.