วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟที่เกิดจากการลบจุดยอดบนกราฟโคมบ์

Edge-Odd Graceful Labeling of Graph Obtained from A Vertex Deletion on A Comb Graph

ศิวพร แซ่วัน[1,*] และ จิตสุภา หนูสิริ[2]
[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210
[2]โรงเรียนบ้านหนองจูด กระบี่ 81120
Siwaporn Saewan[1,*] and Jitsupa Hnusiri[2]
[1]Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University, Phatthalung 93210
[2]Bannongjud School, Krabi 81120
Email: [1]si_wa_pon@hotmail.com [2]jesupa8@gmail.com

วันที่รับบทความ : 19 กรกฎาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 22 ตุลาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 7 สิงหาคม 2564

บทคัดย่อ

การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ G ซึ่งมีเส้นเชื่อม q เส้น คือ ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง f จากเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G ไปยังเซต $\{1, 3, 5, \ldots, 2q-1\}$ โดยที่จุดยอดแต่ละจุดกำกับด้วยผลรวมของการกำกับเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอดนั้น มอดุโล $2q$ และผลลัพธ์ของการกำกับจุดยอดต้องแตกต่างกัน ถ้ากราฟ G มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล f ของกราฟ G แล้วจะเรียก

---

* ผู้เขียนหลัก

กราฟ G ว่า กราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล ในงานวิจัยนี้จะแสดงว่า กราฟใหม่ที่ได้จากการลบจุดยอดเพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล

คำสำคัญ: กราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล การลบจุดยอด กราฟโคมบ์

Abstract

An edge-odd graceful labeling of a graph G with q edges is a bijection f from the set of edges of the graph to the set $\{1, 3, 5, ..., 2q-1\}$ such that each vertex is assigned the sum of labels of all edges incident to it modulo $2q$ and the resulting vertex labels must be distinct. A graph G is called an edge-odd graceful graph if it admits an edge-odd graceful labeling f. In this paper, we show that the new graphs obtained by deleting a pendant vertex of the comb graph are edge-odd graceful graphs.

Keywords: Edge-odd graceful graph, Vertex deletion, Comb graph

1. บทนำ

กราฟจำกัดเชิงเดียว $G=\big(V(G),E(G)\big)$ ประกอบด้วยเซตจำกัดของจุดยอด $V(G)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของคู่ไม่เป็นอันดับของสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ เพื่อความสะดวกจะเขียนแทนกราฟ $G=(V(G),E(G))$ ด้วยกราฟ G สำหรับจุดยอด u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ G และเส้นเชื่อม e เชื่อมระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v จะเขียนแทนด้วย $e=uv$ ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดยอด p จุด แล้วจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|V(G)|=p$ ถ้ากราฟ G มีจำนวนเส้นเชื่อม q เส้น แล้วจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|E(G)|=q$ ถ้าจุดยอด u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ G และ $e=uv$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า

1) จุดยอด u ประชิด (adjacent) กับจุดยอด v

2) เส้นเชื่อม e กระทบ (incident) กับจุดยอด u (หรือจุดยอด v) และกล่าวว่า จุดยอด u (หรือจุดยอด v) กระทบกับเส้นเชื่อม e

3) เส้นเชื่อม e เชื่อมจุดยอด u และจุดยอด v

4) จุดยอด u และ v เป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม e

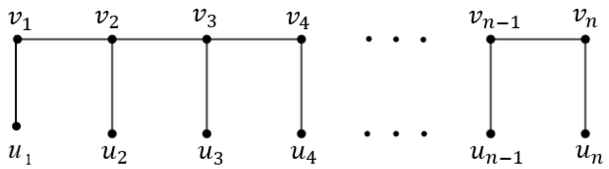
ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ G คือจำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด v สำหรับจุดยอดที่มีดีกรี 1 จะเรียกว่า จุดยอดเพนแดนต์ (pendant vertex) เส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด

เพนแดนต์ เรียกว่า เส้นเชื่อมเพนแดนต์ (pendant edge) วิถีในกราฟ G (path in the graph G) คือลำดับของจุดยอดและเส้นเชื่อมที่สลับกันในกราฟ G ซึ่งจุดยอดทุกจุดต้องแตกต่างกัน

สำหรับจุดยอด u และ v ในกราฟ G ถ้าวิถีเริ่มต้นจากจุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v แล้ว เขียนแทนวิถีด้วยสัญลักษณ์ วิถี $u-v$ ถ้ามีวิถี $u-v$ ในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า จุดยอด u เชื่อมโยง (connect) กับจุดยอด v หรือกล่าวว่า จุดยอด u และ จุดยอด v เชื่อมโยงกัน ถ้าจุดยอดสองจุดใด ๆ ในกราฟ G เชื่อมโยงกัน แล้วจะเรียกกราฟ G ว่า กราฟเชื่อมโยง (connected graph) วิถีปิดในกราฟ G คือวิถีที่มีจุดยอดเริ่มต้นและจุดยอดสิ้นสุดในวิถีเป็นจุดยอดเดียวกัน วงในกราฟ G (cycle in the graph G) คือวิถีปิดในกราฟ G

กราฟต้นไม้ (tree) คือกราฟเชื่อมโยงและไม่มีวงในกราฟ กราฟวิถี (path graph) คือกราฟเชื่อมโยงที่จุดยอดแต่ละจุดในกราฟมีดีกรีอย่างมากที่สุดคือ 2 กราฟวิถีที่มีจุดยอดจำนวน n จุด จะมีเส้นเชื่อมจำนวน $n-1$ เส้น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P_n กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) คือกราฟที่จุดยอดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกันในกราฟเป็นจุดยอดประชิดกัน เขียนแทนกราฟแบบบริบูรณ์ที่มีจุดยอด n จุดด้วยสัญลักษณ์ K_n กราฟโคมบ์ (comb graph) คือกราฟที่สร้างโดยการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวิถี P_n ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ เขียนแทนกราฟโคมบ์ด้วยสัญลักษณ์ $P_n \odot K_1$ ดังนั้นกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ เป็นกราฟต้นไม้

ให้ $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ เป็นจุดยอดที่เรียงลำดับกันของกราฟวิถี P_n และ $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ เป็นจุดยอดซึ่งเชื่อมกับจุดยอด $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ ตามลำดับ กราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ แสดงดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 กราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$

สำหรับจุดยอด u ในกราฟ G กราฟ $G-u$ หมายถึงกราฟ G ที่ลบจุดยอด u และลบเส้นเชื่อมทั้งหมดซึ่งกระทบกับจุดยอด u

สำหรับกราฟเชื่อมโยง G ที่มีเส้นเชื่อมจำนวน q เส้น การกำกับ (labeling) บนกราฟ G คือการกำหนดชื่อให้จุดยอด หรือเส้นเชื่อม หรือทั้งจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟ G ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด Rosa [8] ได้นำเสนอแนวคิดการกำกับกราฟเรียกว่า การกำกับ $-\beta$ ($\beta-$ labeling) ต่อมา

Golomb [5] ได้เรียกการกำกับดังกล่าวว่า การกำกับเกรซฟูล (graceful labeling) โดยกำกับจุดยอดในกราฟ G ด้วยจำนวนเต็มที่แตกต่างกันภายใน $\{0, 1, 2, ..., q\}$ และกำกับเส้นเชื่อมในกราฟ G ด้วยจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันใน $\{1, 2, 3, ..., q\}$ ซึ่งการกำกับเส้นเชื่อมแต่ละเส้น คือค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของการกำกับจุดยอดซึ่งเป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อมนั้น มีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาการกำกับเกรซฟูลของกราฟ G เช่น Cattell [3] ศึกษาการกำกับเกรซฟูลบนกราฟซึ่งสร้างขึ้นใหม่ และหาการกำกับเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปสำหรับกราฟวิถี P_n Kaneria และ คณะ [6] ได้ศึกษาการกำกับเกรซฟูลบนกราฟใหม่ที่ได้จากการดำเนินการบนกราฟวง (cycle graph) และการดำเนินการบนกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (complete bipartite graph) Boxwala และ Vashishta [2] ศึกษาการกำกับเกรซฟูลบนกราฟใหม่โดยกราฟใหม่สร้างจากการดำเนินการบนกราฟวง Koh และคณะ [7] ศึกษาการกำกับเกรซฟูลบนกราฟใหม่ที่ได้จากการเชื่อมกราฟแบบบริบูรณ์ กราฟว่าง และกราฟวง ศิวพร และคณะ [1] ได้ศึกษาการกำกับเกรซฟูลในบริบทการทำซ้ำสมาชิกของกราฟวิถี และใน ค.ศ. 2009 Solairaju และ Chithra [12] ได้นำเสนอแนวคิดการกำกับกราฟแบบใหม่เรียกว่า การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล (edge-odd graceful labeling) ดังนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้กราฟ G มีเส้นเชื่อม $q > 0$ เส้น ถ้ามีฟังก์ชันกำกับเส้นเชื่อมซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : E(G) \to \{1, 3, 5, \ldots, 2q-1\}$ และฟังก์ชันกำกับจุดยอด $f^+ : V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots, 2q-1\}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f^+(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \left(\bmod 2q\right)$$

สำหรับจุดยอด u ทุกจุดซึ่งประชิดกับจุดยอด v ในกราฟ G และผลลัพธ์ของการกำกับจุดยอดต้องแตกต่างกัน แล้วเรียก f ว่าการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ G และเรียกกราฟ G พร้อมด้วยการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล f ว่ากราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล (edge-odd graceful graph)

Solairaju และ Chithra [12] ได้แสดงว่ากราฟต้นไม้ฮอฟแมน (hoffman tree) หรือกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ กราฟไบสตาร์ (bistar) $B_{n,n}$ กราฟ $n-$ไบสตาร์ ($n-$bistar) $\langle K_{1,n} : 2 \rangle$ มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล มีนักวิจัยทางทฤษฎีกราฟหลายท่านได้ศึกษาการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ เช่น Singhun [10] ได้แสดงว่ากราฟวงล้อ W_{n+1} เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล Tirasuwanwasee [14] ได้แสดงว่ากราฟคล้ายปริซึมมีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล Seoud และ Salim [9] ได้แสดงว่ากราฟวงล้อ W_n เมื่อ $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล

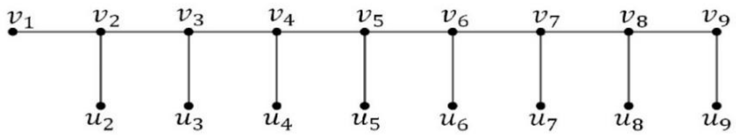
Daoud [4] ได้แสดงว่ากราฟเฟรนด์ชิป (friendship graph) กราฟเฮล์ม (helm graph) กราฟเว็บ (web graph) กราฟดับเบิลแฟน (double fan) มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล Solairaju และคณะ [11] ได้แสดงว่ากราฟ $P_m + P_n$ เมื่อ $m = 2,3,4,5,6$ มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล Tamilarasan และคณะ [13] ได้แสดงว่ากราฟดัตช์วินด์มิลล์ (dutch windmill) D_5^m และ D_4^m และกราฟเซอคิวลาร์แลดเดอร์ (circular ladder) CL_n มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล

สำหรับในงานวิจัยนี้จะสร้างกราฟใหม่ด้วยการดำเนินการทางทฤษฎีกราฟด้วยการลบจุดยอดเพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ ซึ่งกราฟใหม่ประกอบด้วย 1) การลบจุดยอดเพนแดนต์ u_1 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ จะได้กราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ 2) การลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ จะได้กราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ หลังจากนั้นหาการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปของกราฟใหม่ พร้อมพิสูจน์ว่าการกำกับที่ได้เป็นการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟใหม่

2. การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล

จากการศึกษาวิธีดำเนินการทางทฤษฎีกราฟเพื่อสร้างกราฟใหม่ โดยการลบจุดยอดเพนแดนต์ออกจำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ และหาการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลสำหรับกราฟใหม่ ทำให้ได้ทฤษฎีบทใหม่ 2 ทฤษฎีบท

ทฤษฎีบทแรกจะแสดงว่ากราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ ที่สร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_1 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล ตัวอย่างกราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$ แสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 กราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$

ทฤษฎีบท 2.1 กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล

บทพิสูจน์ ให้ $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ เป็นจุดยอดที่เรียงลำดับกันของกราฟวิถี P_n และ $u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n$ เป็นจุดยอดเพนแดนต์ที่เชื่อมกับจุดยอด $v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n$ ตามลำดับ

จะได้ว่าจำนวนจุดยอดของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ คือ $\left|V(G)\right| = 2n-1$ และจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G คือ $q = \left|E(G)\right| = 2n-2$

กำหนดการกำกับ $f: E(G) \to \{1, 3, 5, \ldots, 2q-1 = 4n-5\}$ ดังนี้

$$f(u_i v_i) = 2i-3 \qquad \text{สำหรับ } i = 2, 3, 4, \ldots, n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 4n-2i-3 \qquad \text{สำหรับ } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>กรณี 1</u> สมมติให้ $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \ldots, n$ และ $j = 2, 3, 4, \ldots, n$

จะได้ว่า $2i-3 = 2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_i v_i = u_j v_j$

<u>กรณี 2</u> สมมติให้ $f(v_i v_{i+1}) = f(v_j v_{j+1})$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

จะได้ว่า $4n-2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

<u>กรณี 3</u> สมมติให้ $f(u_i v_i) = f(v_j v_{j+1})$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

จะได้ว่า $2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i + j = 2n$

แต่เนื่องจาก $i \le n$ และ $j \le n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(u_i v_i) \ne f(v_j v_{j+1})$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_i v_i \mid i = 2, 3, 4, \ldots, n\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_j v_{j+1} \mid j = 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจากกราฟ G มีจำนวนเส้นเชื่อม $2n-2$ เส้น และจำนวนเต็มบวกที่กำกับให้กับเส้นเชื่อมมี $2n-2$ จำนวน และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากการกำหนดการกำกับ f จะได้การกำกับ $f^+: V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots, 2q-1 = 4n-5\}$ ดังนี้

$$f^+(u_i) = f(u_i v_i)(\bmod\ 4n-4) = (2i-3)(\bmod\ 4n-4) = 2i-3 \text{ สำหรับ } i = 2, 3, 4, \ldots, n$$

$$f^+(v_1) = f(v_1 v_2)(\bmod\ 4n-4) = (4n-2(1)-3)(\bmod\ 4n-4) = 4n-5$$

$$\begin{aligned} f^+(v_i) &= \left(f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(u_i v_i)\right)(\bmod\ 4n-4) \\ &= \left((4n-2(i-1)-3) + (4n-2i-3) + (2i-3)\right)(\bmod\ 4n-4) \\ &= 4n-2i-3 \quad \text{สำหรับ } i = 2, 3, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^{+}(v_n) &= \big(f(u_n v_n) + f(v_{n-1} v_n) \big) \big(\bmod\ 4n-4\big) \\
&= \big((2n-3) + (4n-2(n-1)-3) \big) \big(\bmod\ 4n-4\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\left\{ f^{+}(u_i) \mid i = 2, 3, 4, \dots, n \right\} &= \left\{ 2i-3 \mid i = 2, 3, 4, \dots, n \right\} = \left\{ 1, 3, 5, ..., 2n-3 \right\} \\
\left\{ f^{+}(v_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \right\} &= \left\{ 4n-2i-3 \mid i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \right\} \\
&= \left\{ 4n-5, 4n-7, 4n-9, ..., 2n+3, 2n+1, 2n-1 \right\}
\end{aligned}
$$

ต่อไปจะแสดงว่าการกำกับ f^{+} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

<u>กรณี 1</u> สมมติให้ $f^{+}(u_i) = f^{+}(u_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n$

จะได้ว่า $2i-3 = 2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_i = u_j$

<u>กรณี 2</u> สมมติให้ $f^{+}(v_i) = f^{+}(v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$

จะได้ว่า $4n-2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $v_i = v_j$

<u>กรณี 3</u> สมมติให้ $f^{+}(u_i) = f^{+}(v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$

จะได้ว่า $2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i + j = 2n$

แต่เนื่องจาก $i \le n$ และ $j \le n-1$ ทำให้ได้ว่า $2n = i + j \le 2n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^{+}(u_i) \ne f^{+}(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^{+} ทั้งหมดบน $\left\{ u_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n \right\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^{+} ทั้งหมดบน $\left\{ v_j \mid j = 2, 3, 4, \dots, n-1 \right\}$

<u>กรณี 4</u> สมมติให้ $f^{+}(u_i) = f^{+}(v_n)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$

จะได้ว่า $2i-3 = 0$ ดังนั้น $i = \frac{3}{2}$ เกิดข้อขัดแย้งกับการกำหนด $i = 2, 3, 4, \dots, n$

ดังนั้น $f^{+}(u_i) \ne f^{+}(v_n)$ นั่นคือการกำกับ f^{+} ทั้งหมดบน $\left\{ u_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n \right\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^{+} บน $\{v_n\}$

<u>กรณี 5</u> สมมติให้ $f^{+}(v_i) = f^{+}(v_n)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$

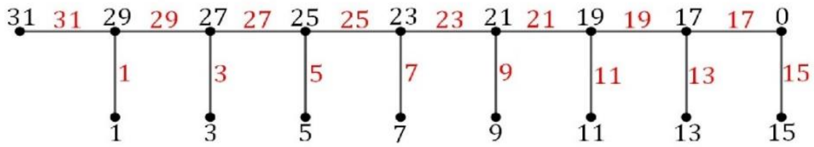
จะได้ว่า $4n-2i-3 = 0$ ดังนั้น $2n - \frac{3}{2} = i$ เกิดข้อขัดแย้งเนื่องจาก $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$

ดังนั้น $f^{+}(v_i) \ne f^{+}(v_n)$ นั่นคือการกำกับ f^{+} ทั้งหมดบน $\left\{ v_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \right\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^{+} บน $\{v_n\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 4 และ กรณี 5 สามารถแสดงได้ว่าการกำกับ f^+ บน $\{v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i = 2, 3, 4, \ldots, n-1\}$ และการกำกับ f^+ บน $\{v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i = 2, 3, 4, \ldots, n\}$

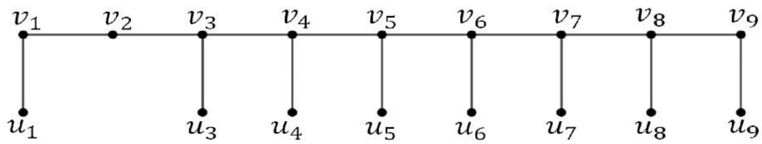
เพราะฉะนั้นการกำกับจุดยอด f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทำให้ได้ว่าการกำกับจุดยอดแตกต่างกัน ดังนั้นการกำกับ f เป็นการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ นั่นคือ กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ เป็นกราฟกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล □

ตัวอย่าง 2.1 การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$ โดยใช้การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล ตามทฤษฎีบท 2.1 แสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 กราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$ พร้อมการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล

ทฤษฎีบทถัดไปจะแสดงว่ากราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ ซึ่งสร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล ตัวอย่างกราฟซึ่งสร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_9 \odot K_1$ แสดงดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 กราฟ $P_9 \odot K_1 - u_2$

พบว่าการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลในทฤษฎีบทที่ 2.1 ไม่สามารถใช้กับกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ ได้ ดังนั้นเราต้องหาการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลสำหรับ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ ใหม่ซึ่งเป็นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล

บทพิสูจน์ ให้ $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ เป็นจุดยอดที่เรียงลำดับกันของกราฟวิถี P_n และ $u_1, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$ เป็นจุดยอดเพนแดนต์ที่ประชิดกับ $v_1, v_3, v_4, v_5, \ldots, v_n$ ตามลำดับ

จะได้จำนวนจุดยอดของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ คือ $|V(G)| = 2n-1$ และจำนวนเส้นเชื่อม คือ $q = |E(G)| = 2n-2$

กำหนดการกำกับ $f : E(G) \to \{1, 3, 5, \ldots, 2q-1 = 4n-5\}$ ดังนี้

$f(v_1v_2) = 1$

$f(u_1v_1) = 2n+1$

กรณี n เป็นจำนวนคู่

$f(u_nv_n) = 4n-5$

$f(u_iv_i) = 2n+2i-3$ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \ldots, n-2$

$f(u_iv_i) = 2n+2i-7$ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \ldots, n-1$

$f(v_iv_{i+1}) = 2n-2i+1$ สำหรับ $i = 2, 3, 4, \ldots, n-1$

กรณี n เป็นจำนวนคี่

$f(u_nv_n) = 4n-7$

$f(u_iv_i) = 2n+2i-3$ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \ldots, n-1$

$f(u_iv_i) = 2n+2i-7$ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \ldots, n-2$

$f(v_iv_{i+1}) = 2n-2i+1$ สำหรับ $i = 2, 3, 4, \ldots, n-1$

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

<u>กรณี 1</u> สมมติให้ $f(v_iv_{i+1}) = f(v_jv_{j+1})$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \ldots, n-1$ และ $j = 2, 3, 4, \ldots, n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+1 = 2n-2j+1$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $v_iv_{i+1} = v_jv_{j+1}$

<u>กรณี 2</u> สมมติให้ $f(u_iv_i) = f(u_jv_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le j \le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3 = 2n+2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_iv_i = u_jv_j$

<u>กรณี 3</u> สมมติให้ $f(u_iv_i) = f(u_jv_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \le j \le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7 = 2n+2j-7$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_iv_i = u_jv_j$

<u>กรณี 4</u> สมมติให้ $f(u_iv_i) = f(u_jv_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \le j \le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3 = 2n+2j-7$ ดังนั้น $j-i = 2$

เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ จึงเป็นไปไม่ได้ว่า $j-i=2$
นั่นคือ $f(u_iv_i)\neq f(u_jv_j)$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_iv_i \mid 3\leq i\leq n-1\}$ แตกต่างกันสำหรับ i เป็นจำนวนคู่ และ i เป็นจำนวนคี่

<u>กรณี 5</u> สมมติให้ $f(v_iv_{i+1})=f(u_jv_j)$ เมื่อ $i=2, 3, 4, \ldots, n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\leq j\leq n-1$
ดังนั้น $2n-2i+1=2n+2j-7$ ทำให้ได้ว่า $j+i=4$ แต่เนื่องจาก $i=2, 3, 4, \ldots, n-1$ และ $j=3, 5, 7, \ldots, n-2$ ทำให้ได้ว่า $j+i>4$ เกิดข้อขัดแย้ง
นั่นคือ $f(v_iv_{i+1})\neq f(u_jv_j)$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_iv_{i+1} \mid i=2, 3, 4, ..., n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน { u_jv_j | j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\leq j\leq n-1$}

<u>กรณี 6</u> สมมติให้ $f(v_iv_{i+1})=f(u_jv_j)$ เมื่อ $i=2,3,4,\ldots,n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\leq j\leq n-2$
จะได้ว่า $2n-2i+1=2n+2j-3$ ดังนั้น $j+i=2$ แต่เนื่องจาก $i=2, 3, 4, \ldots, n-1$ และ $j=4, 6, 8, \ldots, n-2$ จะได้ว่า $j+i>2$ เกิดข้อขัดแย้ง
นั่นคือ $f(v_iv_{i+1})\neq f(u_jv_j)$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_iv_{i+1} \mid i=2, 3, 4, ..., n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน { u_jv_j | j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\leq j\leq n-1$}

<u>กรณี 7</u> สมมติให้ $f(v_1v_2)=f(v_iv_{i+1})$ เมื่อ $i=2, 3, 4, \ldots, n-1$
จะได้ว่า $1=2n-2i+1$ ดังนั้น $0=2n-2i$ หรือ $2n=2i$
แต่เนื่องจาก $i=2, 3, 4, \ldots, n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง
นั่นคือ $f(v_1v_2)\neq f(v_iv_{i+1})$ เมื่อ $i=2, 3, 4, \ldots, n-1$ หรือการกำกับ f บน $\{v_1v_2\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_iv_{i+1} \mid i=2, 3, 4, ..., n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 7 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f บน $\{u_1v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_iv_{i+1} \mid i=2, 3, 4, \ldots, n-1\}$ การกำกับ f บน $\{u_nv_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_iv_{i+1} \mid i=2, 3, 4, \ldots, n-1\}$ และการกำกับ f บน $\{u_nv_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_iv_{i+1} \mid i=2, 3, 4, \ldots, n-1\}$

<u>กรณี 8</u> สมมติให้ $f(v_1v_2)=f(u_iv_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\leq i\leq n-1$
จะได้ว่า $1=2n+2i-3$ ดังนั้น $2=n+i$ แต่เนื่องจาก $3\leq i\leq n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(v_1v_2) \neq f(u_iv_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$ หรือการกำกับ f บน $\{v_1v_2\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{\, u_iv_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 8 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f บน $\{u_1v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\left\{ u_iv_i \mid i = 4, 6, 8, \ldots, n-2 \right\}$ การกำกับ f บน $\{u_nv_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\left\{ u_iv_i \mid i = 4, 6, 8, \ldots, n-2 \right\}$ และ การกำกับ f บน $\{u_nv_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\left\{ u_iv_i \mid i = 4, 6, 8, \ldots, n-2 \right\}$

จาก $f(v_1v_2) = 1$ $f(u_1v_1) = 2n+1$ $f(u_nv_n) = 4n-5$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $f(u_nv_n) = 4n-7$ เมื่อ n เมื่อเป็นจำนวนคี่ จะเห็นว่าการกำกับ f แตกต่างกันทั้งหมดบนเซต $\left\{ v_1v_2, u_1v_1, u_nv_n \right\}$

เพราะฉะนั้นการกำกับ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจากกราฟ G มีเส้นเชื่อมจำนวน $2n-2$ เส้น และจำนวนเต็มบวกที่กำกับให้กับเส้นเชื่อมมี $2n-2$ จำนวน และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากการกำหนดการกำกับ f จะได้การกำกับ $f^+ : V(G) \to \left\{ 0, 1, 2, \ldots, 2q-1 = 4n-5 \right\}$ ดังนี้

$$f^+(u_1) = f(u_1v_1) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 2n+1$$

$$f^+(v_1) = \left(f(u_1v_1) + f(v_1v_2) \right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = \left((2n+1)+1\right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 2n+2$$

$$f^+(v_2) = \left(f(v_1v_2) + f(v_2v_3) \right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = \left(1+(2n-3)\right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 2n-2$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ จะได้

$$f^+(u_n) = f(u_nv_n) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 4n-7$$

$$f^+(v_n) = \left(f(v_{n-1}v_n) + f(u_nv_n) \right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = \left(3+(4n-7)\right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 0$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$f^+(u_n) = f(u_nv_n) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 4n-5$$

$$f^+(v_n) = \left(f(v_{n-1}v_n) + f(u_nv_n) \right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = \left(3+(4n-5)\right) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 2$$

สำหรับ $3 \le i \le n-1$ จะได้

เมื่อ i เป็นจำนวนคู่

$$f^+(u_i) = f(u_iv_i) \left(\text{mod } 4n-4\right) = 2n+2i-3$$

$$\begin{aligned} f^+(v_i) &= \left(f(v_{i-1}v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(u_iv_i) \right) \left(\mathrm{mod}\ 4n-4\right) \\ &= \left((2n+2(i-1)+1)+(2n+2i+1)+(2n+2i-3)\right)\left(\mathrm{mod}\ 4n-4\right) \\ &= 2n-2i+5 \end{aligned}$$

เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

$$f^+(u_i) = f(u_iv_i)\left(\mathrm{mod}\ 4n-4\right) = 2n+2i-7$$

$$\begin{aligned} f^+(v_i) &= \left(f(v_{i-1}v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(u_nv_n) \right) \left(\mathrm{mod}\ 4n-4\right) \\ &= \left((2n-2(i-1)+1)+(2n-2i+1)+(2n+2i-7)\right)\left(\mathrm{mod}\ 4n-4\right) \\ &= 2n-2i+1 \end{aligned}$$

จากการกำกับจุดยอด f^+ จะได้ว่า

เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$$\left\{ f^+(u_i) \mid i=4,6,8,....,n-1 \right\} = \left\{ 2n+5, 2n+9, 2n+13, \ldots, 4n-9, 4n-5 \right\}$$

$$\left\{ f^+(v_i) \mid i=4,6,8,...,n-1 \right\} = \left\{ 2n-3, 2n-7, 2n-11, \ldots, 11, 7 \right\}$$

$$\left\{ f^+(u_i) \mid i=3,5,7,...,n-2 \right\} = \left\{ 2n-1, 2n+3, 2n+7, \ldots, 4n-15, 4n-11 \right\}$$

$$\left\{ f^+(v_i) \mid i=3,5,7,...,n-2 \right\} = \left\{ 2n-5, 2n-9, 2n-13, \ldots, 9, 5 \right\}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

$$\left\{ f^+(u_i) \mid i=4,6,8,....,n-2 \right\} = \left\{ 2n+5, 2n+9, 2n+13, \ldots, 4n-11, 4n-7 \right\}$$

$$\left\{ f^+(v_i) \mid i=4,6,8,...,n-2 \right\} = \left\{ 2n-3, 2n-7, 2n-11, \ldots, 13, 9 \right\}$$

$$\left\{ f^+(u_i) \mid i=3,5,7,...,n-1 \right\} = \left\{ 2n-1, 2n+3, 2n+7, \ldots, 4n-13, 4n-9 \right\}$$

$$\left\{ f^+(v_i) \mid i=3,5,7,...,n-1 \right\} = \left\{ 2n-5, 2n-9, 2n-13, \ldots, 7, 3 \right\}$$

ต่อไปจะแสดงว่าการกำกับ f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>กรณี 1</u> สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(u_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le j \le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3 = 2n+2j-3$ ดังนั้น $i=j$ นั่นคือ $u_i = u_j$

<u>กรณี 2</u> สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(u_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \le j \le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7 = 2n+2j-7$ ดังนั้น $i=j$ นั่นคือ $u_i = u_j$

<u>กรณี 3</u> สมมติให้ $f^+(v_i) = f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le j \le n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+5=2n-2j+5$ ดังนั้น $i=j$ นั่นคือ $v_i=v_j$

กรณี 4 สมมติให้ $f^+(v_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+1=2n-2j+1$ ดังนั้น $i=j$ นั่นคือ $v_i=v_j$

กรณี 5 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(u_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3=2n+2j-7$ ดังนั้น $j-i=2$

แต่เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i)\ne f^+(u_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$

แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_j \mid j$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1\}$

กรณี 6 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3=2n-2j+5$ ดังนั้น $i+j=4$

แต่เนื่องจาก $4\le i$ และ $4\le j$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i)\ne f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$

แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j$ เป็นจำนวนคู่ซึ่ง $3\le j\le n-1\}$

กรณี 7 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3=2n-2j+1$ ดังนั้น $i+j=2$

แต่เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i)\ne f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$

แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1\}$

กรณี 8 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7=2n-2j+5$ ดังนั้น $i+j=6$

เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i)\ne f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$

แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j$ เป็นจำนวนคู่ซึ่ง $3\le j\le n-1\}$

<u>กรณี 9</u> สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7=2n-2j+1$ ดังนั้น $i+j=4$

แต่เนื่องจาก $i\ge 3$ และ $j\ge 3$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i)\ne f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1\}$

<u>กรณี 10</u> สมมติให้ $f^+(v_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+5=2n-2j+1$ ดังนั้น $i-j=2$

แต่เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(v_i)\ne f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le j\le n-1\}$

<u>กรณี 11</u> สมมติให้ $f^+(u_1)=f^+(v_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$

จะได้ว่า $2n+1=2n-2i+5$ ดังนั้น $1=5-2i$

เนื่องจาก $3\le i\le n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_1)\ne f^+(v_i)$ นั่นคือการกำกับ f^+ บน $\{v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 11 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$ และการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_1, u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$

<u>กรณี 12</u> สมมติให้ $f^+(u_1)=f^+(u_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1$

จะได้ว่า $2n+1=2n+2i-3$ ดังนั้น $4=2i$

แต่เนื่องจาก $3\le i\le n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

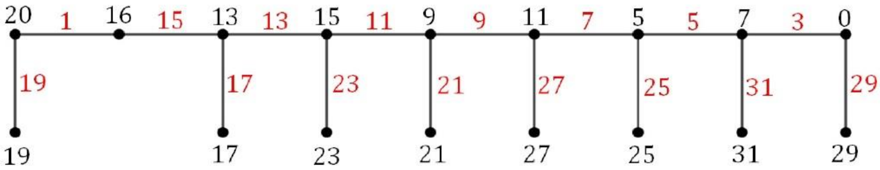
ดังนั้น $f^+(u_1)\ne f^+(u_i)$ นั่นคือการกำกับ f^+ บน $\{u_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3\le i\le n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 12 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$ และการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i$ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \le i \le n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_1, u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$

เนื่องจาก เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ $f^+(u_1) = 2n+1$ $f^+(v_1) = 2n+2$ $f^+(v_2) = 2n-2$ $f^+(u_n) = 4n-7$ $f^+(v_n) = 0$ และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ $f^+(u_n) = 4n-5$ $f^+(v_n) = 2$ จะเห็นว่าการกำกับ f^+ แตกต่างกันทั้งหมดบนเซต $\{u_1, u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$

จากการแสดงข้างต้น จะได้ว่า f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือการกำกับจุดยอดแตกต่างกัน ดังนั้น f เป็นการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$
นั่นคือ กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล □

ตัวอย่าง 2.2 การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_2$ โดยใช้การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลตามทฤษฎีบท 2.2 แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 กราฟ $P_9 \odot K_1 - u_2$ พร้อมด้วยการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล

3. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างทฤษฎีบทใหม่จำนวน 2 ทฤษฎีบท ซึ่งบทกล่าวถึงการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปของกราฟใหม่ซึ่งสร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ พบว่าการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_1 และการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ ทำให้กราฟ $P_n \odot K_1 - u_1$ และกราฟ $P_n \odot K_1 - u_2$ มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล โดยการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของทั้งสองกราฟแตกต่างกัน

เอกสารอ้างอิง

[1] ศิวพร แซ่วัน, ธนาภา ขาวมัน, วราภรณ์ แดงนภาพรกุล และสุมิตา แก้วทอง. (2563). การกำกับแบบเกรซฟูลในบริบทการทำซ้ำองค์ประกอบของกราฟ. *วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ*, 23 (1), หน้า 11 – 19.

Saewan, S., Khawman, T., Dangnapaponkul, W. and Kaewthong, S. (2020). Graceful Labeling in The Context of Duplication of Graph Element. *Thaksin Journal*, 23 (1), p. 11 – 19.

[2] Boxwala, S. A. and Vashishta, P. (2015). Some New Families of Graceful Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 48, p. 127 – 133.

[3] Cattell, R. (2007). Graceful Labellings of Paths. *Discrete Mathematics*, 307 (24), p. 3161 – 3176.

[4] Daoud, S. N. (2017). Edge-Odd Graceful Labeling of Some Path and Cycle Related Graph. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics,* 14, p. 178 – 203.

[5] Golomb, S. W. (1972). How to Number A Graph. In R. C. Read (Ed.). *Graph Theory and Computing.* p. 23 – 37. New York, U. S. A. Academic Press.

[6] Kaneria, V. J., Makadia, H. M. and Jariya, M. M. (2014). Graceful Labeling for Cycle of Graph. *International Journal of Mathematics Research,* 6 (2), p. 173 – 178.

[7] Koh, K. M., Phoon, L. Y. and Soh, K. W. (2015). The Gracefulness of The Join of Graphs (II). *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics,* 12 (2 – 3), p. 180 – 185.

[8] Rosa, A. (1967). *On Certain Valuations of The Vertices of A Graph*. (In Theory of Graphs, International Symposium, Rome, July, 1966), New York: Gordon and Breach.

[9] Seoud, M. and Salim, M. (2016). Further Results on Edge-Odd Graceful Graphs. *Turkish Journal of Mathematics, 40*, p. 647 – 656.

[10] Singhun, S. (2013). Graphs with Edge-Odd Graceful Labelings. International Mathematical Forum, 8 (12), p. 577 – 582.

[11] Solairaju, A., Balasubramanian, G. and Ambika, B. (2017). Edge-Odd Graceful Labeling for Sum of A Path and A Finite Path. *Global Journal of Mathematical Science: Theory and Practical,* 9 (3), p. 323 – 335.

[12] Solairaju, A. and Chithra, K. (2009). Edge-Odd Graceful Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 33, p. 15 – 20.

[13] Tamilarasan, T., Rajeswari, V. and Thiagarajan. (2018). Edge-Odd Graceful Labeling of Some Special Graphs. *International Journal of Mathematics Trends and Technology,* 56 (2). p. 109 – 112

[14] Tirasuwanwasee, A. (2015). *Edge-Odd Graceful Labelings of Prism-Like Graphs of Cycles*. (Master's thesis). Chulalongkorn University. Faculty of Science. Retrieved from: http://cuir.car.chula.ac.th/handle/123456789/61639.