ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

ปริญญา

วิศวกรรมเครื่องกล | วิศวกรรมเครื่องกล

สาขา | **ภาควิชา**

เรื่อง การควบคุมลูกตุ้มนาฬิกาหัวกลับสองแกนด้วยวิธีการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด

Balancing of Two-Stage Inverted Pendulum by Optimal Control Method

นามผู้วิจัย นายฐกัด เบญจเลิศยานนท์

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก .....

(อาจารย์วิทิต ฉัตรรัตนกุลชัย, Ph.D.)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม .....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ทวีเดช ศิริธนาพิพัฒน์, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา .....

(รองศาสตราจารย์ชวลิต กิตติชัยการ, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

.....

(รองศาสตราจารย์กัญจนา ธีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ ..... **เดือน** ..... **พ.ศ.** .....

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การควบคุมลูกตุ้มนาฬิกาหัวกลับสองแกนด้วยวิธีการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด

Balancing of Two-Stage Inverted Pendulum by Optimal Control Method

โดย

นายฐกัด เบญจเลิศยานนท์

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

พ.ศ. 2553

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ฐกัด เบญจเลิศยานนท์ 2553: การควบคุมลูกตุ้มนาฬิกาหัวกลับสองแกนด้วยวิธีการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: อาจารย์วิทิต ฉัตรรัตนกุลชัย, Ph.D. 90 หน้า

ระบบลูกตุ้มหัวกลับเป็นระบบที่ประกอบด้วย มวล ก้านลูกตุ้ม ตัวรถ มอเตอร์ไฟฟ้าในการควบคุมตำแหน่งของรถ และอุปกรณ์อื่นๆ การควบคุมลูกตุ้มหัวกลับให้มีเสถียรภาพนั้นทำได้ยาก เนื่องจากระบบลูกตุ้มหัวกลับเป็นระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น และจำนวนสัญญาณป้อนเข้าน้อยกว่าจำนวนองศาอิสระ

งานวิจัยนี้นำเสนอการออกแบบระบบควบคุมลูกตุ้มหัวกลับสองแกน โดยอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองเชิงเส้น การออกแบบจะทำโดยการสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปใช้หาค่าอัตราขยายที่เหมาะสมโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ และทำการทดสอบอัตราขยายที่ได้โดยการจำลองระบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ร่วมกับการทดสอบระบบจริง

ผลการทดลองพบว่าประสิทธิภาพในการควบคุมระบบขึ้นอยู่กับการเลือกตัวแปรค่าน้ำหนักที่เหมาะสม ซึ่งผลการทดลองสามารถยอมรับได้ในประสิทธิภาพของการออกแบบระบบควบคุม โดยสามารถรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้มหัวกลับทั้งสองได้จริง และการเพิ่มตัวอินทิกรัลให้กับระบบช่วยเพิ่มความสามารถในการรักษาตำแหน่งของตัวรถได้ดีขึ้น อย่างไรก็ตามการทดสอบระบบจริงพบว่ามีข้อจำกัดในด้านอุปกรณ์ต่างๆทำให้ระบบไม่สามารถทนต่อสิ่งรบกวนได้มากนัก เนื่องจากจะทำให้เกินขีดจำกัดการทำงานของอุปกรณ์ดังกล่าว

_____ _____ ___ / ___ / ___

ลายมือชื่อนิสิต ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Takat Benjalersyarnon 2010: Balancing of Two-Stage Inverted Pendulum by Optimal Control Method. Master of Engineering (Mechanical Engineering), Major Field: Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering. Thesis Advisor: Mr. Withit Chatlatanagulchai, Ph.D. 90 pages.

Inverted pendulum system is a system that consists of a mass, a rod, a cart, and a direct-current motor, for controlling the position of the cart and the other parts. Balancing the inverted pendulum is a difficult problem because the inverted pendulum has non-linear model, is unstable, and has fewer number of input signals than its degrees of freedom.

This research presents controller design of a two-stage inverted pendulum by using the linear quadratic regulator (LQR) technique. To design the controller, a mathematical model of the pendulum is created. The model is used in finding suitable gains via computer programming. Then, the resulting gains are validated by computer simulation and real hardware implementation.

The results show that the performance of the control system depends on the selection of weighted variables. The experimental results confirm that the performance of the control system is acceptable. The two-stage inverted pendulum can actually be balanced. Adding an integral to the system improves the ability in controlling the cart position. However, there are some limitations on the actual experimental equipments. As a result, the system cannot tolerate much disturbances because they exceed the limitation of the equipments.

_____ _____ ___ / ___ / ___

Student's signature Thesis Advisor's signature

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ อ.ดร. วิทิต ฉัตรรัตนกุลชัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ได้ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือในการทำวิจัยนี้ให้สามารถสำเร็จไปได้ด้วยดี ขอขอบพระคุณ ผศ. ดร.ทวีเดช ศิริธนาพิพัฒน์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม สำหรับคำแนะนำต่างๆเพื่อนำไปปรับปรุงวิทยานิพนธ์ให้ดียิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.วิชัย ศิวะโกศิษฐ ดร.กฤษฎา วรรณทอง สำหรับคำแนะนำต่างๆเพิ่มเติมเพื่อการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ให้ดียิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ตลอดจนอาจารย์และคุณครู ทุกท่านที่ได้สั่งสอน อบรม และถ่ายทอดความรู้จนได้เป็นผลงานชิ้นนี้ ขอขอบคุณสถาบันค้นคว้าและพัฒนาเทคโนโลยีการผลิตทางอุตสาหกรรมที่เอื้อเฟื้อสถานที่ในการทำงานวิจัย ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ สำหรับกำลังใจและคำแนะนำต่าง และขอขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ ที่เป็นกำลังใจและสนันสนุนเป็น อย่างดีเสมอมา

ฐกัด เบญจเลิศยานนท์

เมษายน 2553

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(7)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	4
อุปกรณ์และวิธีการ	14
อุปกรณ์	14
วิธีการ	20
ผลและวิจารณ์	59
ผล	59
วิจารณ์	77
สรุปและข้อเสนอแนะ	78
สรุป	78
ข้อเสนอแนะ	79
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	80
ภาคผนวก	82
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	90

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	พารามิเตอร์ของระบบ	22
2	ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการแกว่งอย่างอิสระของก้านลูกตุ้มก้านที่หนึ่ง	25
3	ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการแกว่งอย่างอิสระของก้านลูกตุ้มก้านที่สอง	27
4	ค่าน้ำหนักและอัตราขยายที่ใช้ในการออกแบบ	38
5	เปรียบเทียบตัวแปรระหว่างตัวสังเกตอันดับเต็มและตัวสังเกตลดอันดับ	48
6	ค่าน้ำหนักและอัตราขยายที่ใช้ในการทดสอบการควบคุม	65

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	ระบบลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่าย (simple inverted pendulum)	1
2	3D inverted pendulum	5
3	แบบจำลองการยืนของหุ่นยนต์ PTIP	5
4	PillCam® capsule robot ที่มีการใช้จริงในทางการแพทย์ในปัจจุบัน	6
5	ระบบลูกตุ้มหัวกลับถูกใช้ในการจำลองการควบคุมทิศทางของจรวดหรือขีปนาวุธ	7
6	Segway	8
7	U3-X	8
8	เส้นทางเดินของราก (root locus) ของลูกตุ้มหัวกลับ ของระบบวงเปิด (open-loop)	9
9	เส้นทางเดินของราก (root locus) ของระบบวงปิด (closed-loop) โดยใช้ PID	10
10	บล็อกไดอะแกรมการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับด้วยตัวควบคุม PID 2 ตัว	10
11	บล็อกไดอะแกรมของระบบป้อนกลับ	12
12	ลูกตุ้มชิ้นที่ 1	14
13	ลูกตุ้มชิ้นที่ 2	14
14	monocarrier ที่ถูกนำมาใช้เป็นอุปกรณ์เปลี่ยนการหมุนเป็นการเคลื่อนที่ของรถ	15
15	รายละเอียดของอุปกรณ์ที่ใช้งาน (MCM06040H20K00)	15
16	rotary encoder	16
17	มอเตอร์กระแสตรง	16
18	NI DAQ PCI-6221	17
19	วงจรขยายสัญญาณ Sabertooth 2X20	18
20	DC power supply	18
21	ชุดการทดลองระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนภายในห้องปฏิบัติการ	19
22	ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน	21
23	free body diagram ของก้านลูกตุ้มที่หนึ่ง	23
24	การทดลองทดสอบหาค่าพารามิเตอร์ c_1, J_1	24
25	ผลตอบสนองจากปล่อยก้านลูกตุ้มก้านที่ 1 อย่างอิสระ ที่จุดเริ่มต้น 15 องศา	24

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
26	free body diagram ของก้านลูกตุ้มที่สอง	27
27	การทดลองทดสอบหาค่าพารามิเตอร์	26
28	ผลตอบสนองจากปล่อยก้านลูกตุ้มก้านที่2 อย่างอิสระ ที่จุดเริ่มต้น 15 องศา	28
29	free body diagram ของตัวรถ	29
30	การต่ออุปกรณ์การทดลองหาค่าพารามิเตอร์ที่จำเป็นของตัวขยายสัญญาณ มอเตอร์ และ monocarrier (open-loop)	31
31	แสดงสัญญาณไฟฟ้าป้อนเข้ามอเตอร์กระแสตรง(บน) และผลตอบสนองของตัวรถ(ล่าง)	30
32	การทดลองการหาค่าพารามิเตอร์ของ DC servo motor และ monocarier	31
33	เปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบที่ได้จากการจำลองและผลตอบสนองจริง	32
34	แผนภาพแสดงการควบคุมป้อนกลับรักษาเสถียรภาพ (stabilization feedback control)	35
35	ผลการจำลองระบบด้วย MATLAB ที่ค่าน้ำหนัก Q, R ต่างๆ ตามตารางที่ 1	39
36	บล็อกไดอะแกรมของระบบที่มีตัวสังเกตสถานะอันดับเต็ม	40
37	การจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวสังเกตอันดับเต็ม	46
38	บล็อกไดอะแกรมของระบบที่มีตัวสังเกตสถานะลดอันดับ	50
39	ระบบป้อนกลับที่มีตัวสังเกตสถานะลดอันดับ	54
40	การจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวสังเกตลดอันดับ	58
41	บล็อกไดอะแกรมของระบบที่มีตัวสังเกตสถานะลดอันดับและมีตัวอินทิกรัล	54
42	การจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวสังเกตลดอันดับที่มีตัวอินทิกรัล	56
43	ขอบเขตการทำงานของอุปกรณ์ขยายสัญญาณ (amplifier)	61
44	การรบกวนลูกตุ้มที่ตำแหน่งต่างๆ	62

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
45	ผลตอบสนองของระบบเมื่อไม่มีสัญญาณควบคุม โดยมีค่าเริ่มต้น x5 = 0.1 เรเดียน	63
46	ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าตำแหน่ง เริ่มต้นที่ x3 = 0.1 เรเดียน)	61
47	ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าตำแหน่ง เริ่มต้นที่ x5 = 0.1 เรเดียน)	62
48	ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าตำแหน่ง เริ่มต้นที่ x3 = 0.1 เรเดียน, x5 = -0.1 เรเดียน)	63
49	ระบบเมื่อไม่มีการควบคุม	64
50	ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q1 และ R1	66
51	ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q1 และ R1 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5	67
52	ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q2 และ R2	68
53	ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q2 และ R2 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5	69
54	การรบกวนระบบที่วินาทีที่ 30 (theta1) และ วินาทีที่ 40 (theta2) เมื่อระบบควบคุมโดยใช้ ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q2 และ R2 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5	70
55	ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q3 และ R3	71
56	ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q3 และ R3 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5	72

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

57 การรบกวนระบบที่วินาทีที่ 30 (theta1) และ วินาทีที่ 40 (theta2) เมื่อระบบควบคุมโดยใช้ ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q3 และ R3 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5 73

58 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q4 และ R 74

59 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q4 และ R4 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5 75

60 การรบกวนระบบที่วินาทีที่ 30 (theta1) และ วินาทีที่ 40 (theta2) เมื่อระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q4 และ R4 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5 76

ภาพผนวกที่

1 free body diagram ของระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน 83

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

c	=	ค่าคงที่ความเสียดทาน
DAQ	=	data acquisition
FBD	=	free body diagram
LTI	=	linear time invariant
LQR	=	linear quadratic regulator
MIMO	=	multi input multi output
PID	=	proportional integral derivative
SISO	=	single input single output

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การควบคุมลูกตุ้มนาฬิกาหัวกลับสองแกนด้วยวิธีการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด

Balancing of Two-Stage Inverted Pendulum by Optimal Control Method

คำนำ

ระบบลูกตุ้มหัวกลับ (inverted pendulum) เป็นระบบที่สำคัญในการศึกษาทางด้านวิศวกรรมควบคุม และเป็นตัวอย่างที่ดีในการศึกษาทฤษฎีระบบควบคุมสมัยใหม่ที่มีความซับซ้อนและยากยิ่งขึ้น เนื่องจากการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับจัดเป็นระบบที่แสดงให้เห็นถึงการควบคุมระบบที่ไม่มีเสถียรภาพในตัวเอง ให้สามารถทำให้มีเสถียรภาพได้ นอกจากนี้ระบบยังต้องการการควบคุมเอาท์พุทที่มากกว่าหนึ่งตัว ซึ่งเป็นไปได้ยากที่จะอาศัยทฤษฎีการควบคุมดั้งเดิมแบบทั่วไป อย่างเช่น P, PI หรือ PID ได้

ระบบลูกตุ้มหัวกลับจัดเป็นตัวอย่างที่ดีในการศึกษาลักษณะการเคลื่อนที่และการควบคุมของระบบอื่นๆ เช่น ระบบขับเคลื่อนของจรวด หรือดาวเทียม ระบบลงจอดอัตโนมัติในอากาศยาน การควบคุมการทรงตัวของอากาศยานในสภาพการไหลของอากาศแบบปั่นป่วน การทรงตัวของเรือ หรือระบบขนาดเล็กอย่างเช่นหุ่นยนต์แคปซูลเพื่อใช้ในทางการแพทย์ เป็นต้น

สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งที่ระบบลูกตุ้มหัวกลับถูกนำมาใช้ในการจำลองระบบต่างๆ เนื่องจากลูกตุ้มหัวกลับเป็นระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง ทำให้ยากที่จะใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นกับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ จึงจำเป็นต้องทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization) ก่อนที่จะใช้เทคนิคการควบคุมแบบเชิงเส้นได้ ในที่นี้ได้ทำการนำทฤษฎีการควบคุมเหมาะสมที่สุด (optimal control theory) มาใช้ในการควบคุม โดยนำการควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น (LQR) มาใช้ในการออกแบบ เนื่องจากมีความเหมาะสมต่อการใช้งาน และเนื่องจากการควบคุม LQR เป็นทฤษฎีการควบคุมเชิงเส้น ที่ต้องอาศัยสมการทางคณิตศาสตร์ จึงนับเป็นความท้าทายอย่างหนึ่งในการหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อให้สมการทางคณิตศาสตร์ที่ได้มีความแม่นยำเพื่อให้สามารถควบคุมระบบได้

ในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน ซึ่งเป็นระบบที่มีความซับซ้อนมากขึ้นจากระบบลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่าย เนื่องจากเป็นระบบที่มีจำนวนตัวแปรที่จำเป็นต้องควบคุมมากขึ้น ซึ่งต้องอาศัยตัวควบคุมที่เหมาะสม รวมถึงอุปกรณ์ต่างๆที่สามารถรองรับข้อจำกัดที่เกิดขึ้นได้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สืบเนื่องจากการพัฒนาทางด้านเทคโนโลยี มีการพัฒนาทั้งทางด้านฮาร์ดแวร์และซอฟท์แวร์ ทำให้ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์เข้ามีบทบาทอย่างมากในงานทางด้านการควบคุม งานวิจัยนี้จึงได้อาศัยซอฟท์แวร์ต่างๆที่ช่วยในการออกแบบ จำลอง การควบคุม เช่น Mathworks MATLAB, National Instruments LabVIEW เป็นต้น ซึ่งจะช่วยอำนวยความสะดวกในการทดลองและแสดงผลการทดลองมากขึ้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

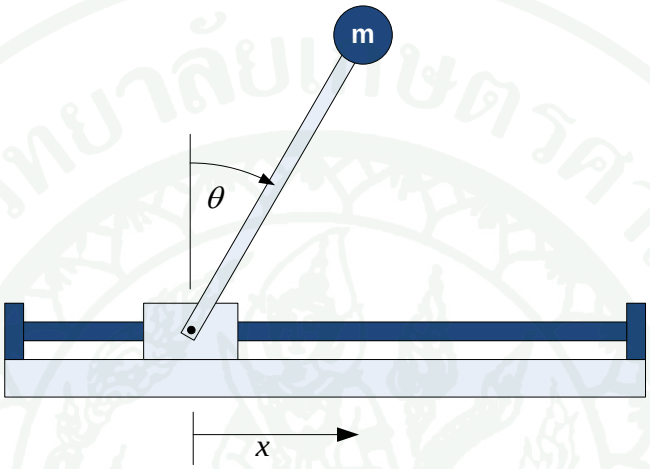
วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ในการทำงานวิจัยนี้ เพื่อศึกษาพฤติกรรมของลูกตุ้มหัวกลับ และออกแบบระบบควบคุมลูกตุ้มหัวกลับชนิดสองแกน โดยสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน ออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีกำลังสองเชิงเส้น ศึกษาผลจากการปรับปรุงระบบด้วยการเพิ่มตัวตัวอินทิกรัล สร้างชุดทดลองระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน และนำตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบไปทำการควบคุมกับชุดทดลองระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การตรวจเอกสาร

ระบบลูกตุ้มหัวกลับ (inverted pendulum) จัดเป็นระบบหนึ่งที่มีความท้าทายในการศึกษาการควบคุมระบบทางด้านวิศวกรรมควบคุม เนื่องจากความเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ จึงต้องอาศัยตัวควบคุมที่เหมาะสมในการควบคุม



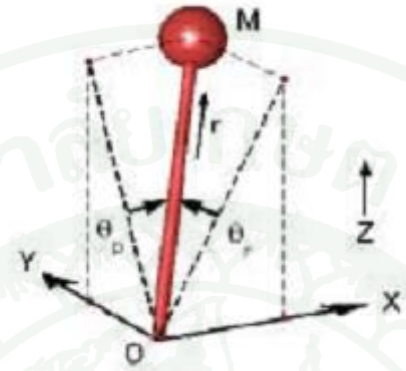
ภาพที่ 1 ระบบลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่าย (simple inverted pendulum)

ภาพที่ 1 แสดงระบบลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่าย เป็นระบบที่ถือเป็นตัวอย่างของระบบลูกตุ้มหัวกลับ ซึ่งถูกใช้เป็นตัวอย่างการเรียนการสอนและตัวอย่างในหนังสือวิชาการควบคุมอย่างกว้างขวาง เนื่องจากเป็นตัวอย่างของระบบที่แสดงให้เห็นถึงระบบที่มีความไม่มีเสถียรภาพ และไม่เป็นเชิงเส้นได้เป็นอย่างดี จากภาพลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่ายประกอบด้วยส่วนสำคัญคือ ตัวรถ (cart) หรือบางครั้งจะถูกเรียกว่า ฐานเคลื่อนที่ (moving base) เชื่อมต่อกับ ก้านลูกตุ้ม (rod) ที่สามารถหมุนได้โดยอิสระ และมีมวล (mass) ที่ปลายของก้านลูกตุ้ม ลักษณะคล้ายคลึงกับการเลี้ยงไม้ในแนวดิ่ง (broom balancing) โดยพยายามให้แกนไม้ตั้งตรง โดยให้มือและแกนไม้เคลื่อนที่น้อยที่สุด

ระบบแขนกลหุ่นยนต์ที่มีจุดศูนย์กลางแรงดันต่ำกว่าจุดศูนย์กลางมวล ทำให้เป็นระบบไม่มีเสถียรภาพ เช่นในการควบคุมการทรงตัวหรือการเดินของหุ่นยนต์สองขา ซึ่งเมื่อเราเข้าใจในลักษณะทางพลศาสตร์และสามารถควบคุมได้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ก็จะทำให้เราสามารถควบคุมลักษณะการเคลื่อนไหวที่ใกล้เคียงมนุษย์มากยิ่งขึ้นตามไปด้วย โดยแนวโน้มในอนาคตจำเป็นที่จะต้องสามารถควบคุมระบบหลายองศาอิสระมากยิ่งขึ้น

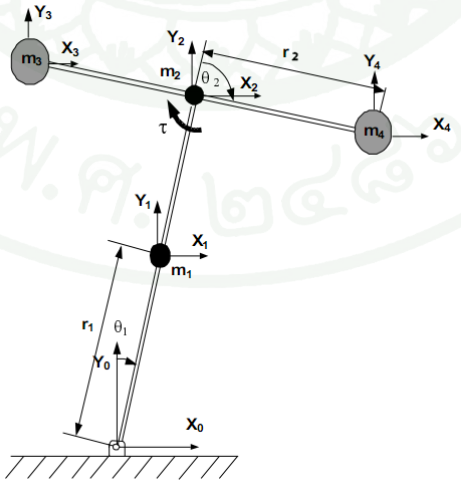
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Kajita *et al.* (2001) ได้ทำการวิเคราะห์และจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สองขา ชนิด 12 องศาอิสระ ในพื้นที่ 3 มิติ โดยใช้แบบจำลองลูกตุ้มหัวกลับ 3 มิติ (three-dimensional inverted pendulum model)



ภาพที่ 2 3D inverted pendulum

ชิต และคณะ (2545) ได้เสนอการวิเคราะห์โครงสร้างของหุ่นยนต์สองขา (humanoid robot) โดยผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ลักษณะท่าทางการเดินในแต่ละช่วงของหุ่นยนต์สองขา และวิเคราะห์เสถียรภาพในแต่ละช่วงของการก้าวขา และได้ทำการสร้างแบบจำลองของการทรงตัวบนหนึ่งขาบนระนาบ PTIP (a planar two degree of freedom inverted pendulum) ในการจำลองและการทดลองพบว่าสามารถรักษาเสถียรภาพและทนต่อสิ่งรบกวนได้ดี



ภาพที่ 3 แบบจำลองการยืนของหุ่นยนต์ PTIP

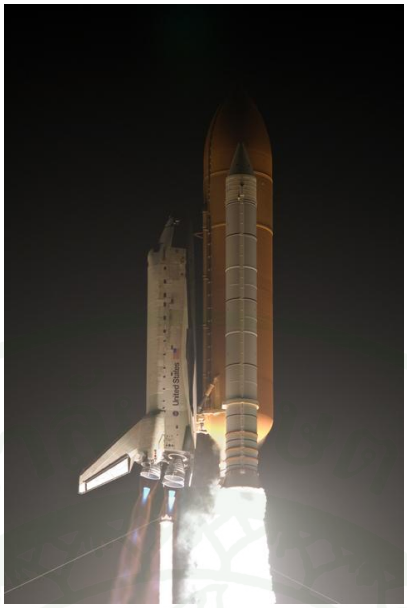
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Wane *et al.* (2007) ได้ทำการศึกษาการเคลื่อนที่ของ capsule robot ภายในระบบทางเดินอาหารซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่มีการใช้งานในทางการแพทย์ โดย capsule robot จะอาศัยการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมภายในตัว capsule เพื่อทำให้ capsule สามารถเคลื่อนที่ไปเก็บภาพถ่ายภายในเส้นทางเดินอาหาร ซึ่งทำให้แพทย์สามารถวินิจฉัยโรคได้ง่ายมากขึ้น

ภาพที่ 4 PillCam® capsule robot ที่มีการใช้จริงในทางการแพทย์ในปัจจุบัน

ระบบนำทางของอากาศยานภายใต้สภาวะการไหลของอากาศแบบปั่นป่วน ก็เป็นอีกระบบหนึ่งที่มีการนำมาจำลองระบบด้วยลูกตุ้มหัวกลับ เช่นการเคลื่อนที่ของจรวดหรือขีปนาวุธขณะปล่อยจากแท่นยิงที่ต้องทำการควบคุมเครื่องยนต์หลายเครื่องให้สามารถรักษาทิศทางได้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 5 ระบบลูกตุ้มหัวกลับถูกใช้ในการจำลองการควบคุมทิศทางของจรวดหรือขีปนาวุธ

การพัฒนาการควบคุมลูกตุ้มหัวกลับยังนำไปสู่การนำเสนอผลิตภัณฑ์ใหม่ๆให้กับผู้บริโภคมากยิ่งขึ้นดังเช่น ยานพาหนะเอนกประสงค์สองล้อ ซึ่งได้มี Segway เข้ามาทำตลาดเชิงพาณิชย์เป็นรายต้นๆ และมีหลายภาคส่วนเริ่มมาสนใจในผลิตภัณฑ์ประเภทนี้มากขึ้น ซึ่งในปัจจุบันได้ก้าวหน้าไปมากยิ่งขึ้นดังที่เห็นได้จากการเปิดตัวยานพาหนะล้อเดียว (Unicycle) U3-X ในปี 2552 โดย Honda R&D Center ประเทศญี่ปุ่น โดยการออกแบบล้อด้วยระบบ Honda Omni Traction (HOT) ทำให้ยานพาหนะสามารถทรงตัวได้ในทุกทิศทาง (Honda Motor Co., Ltd., 2009)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

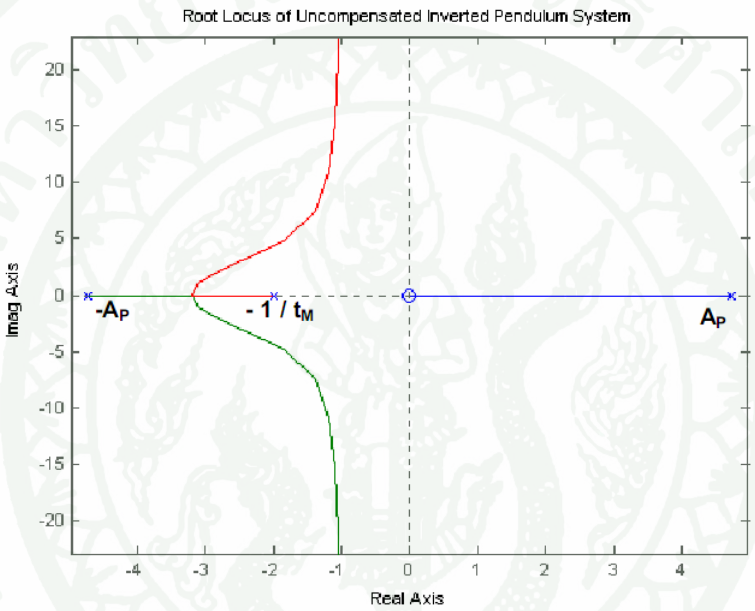
ภาพที่ 6 Segway

ภาพที่ 7 U3-X

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

งานวิจัยในอดีต

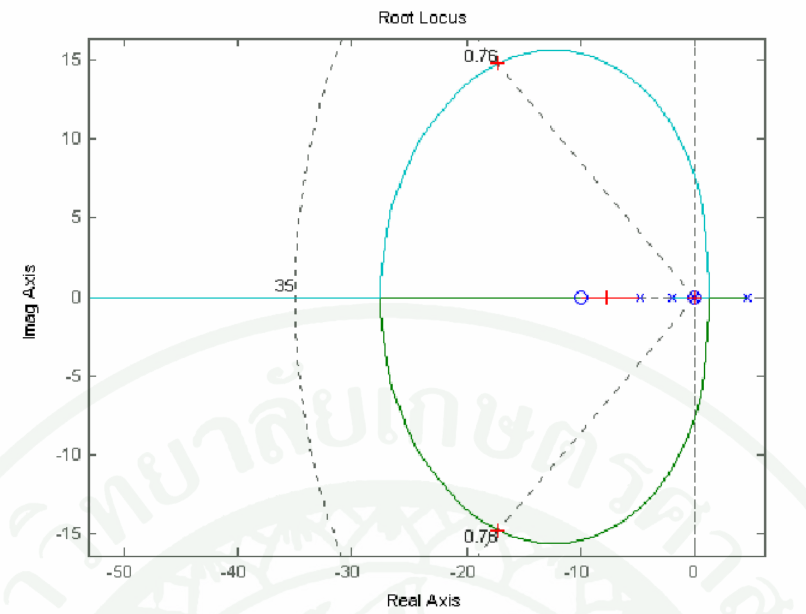
Sultan (2003) ได้ทำการศึกษาระบบลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่าย โดยการศึกษาได้ทำการสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทำการวิเคราะห์ผลตอบสนองของระบบด้วยโปรแกรม Matlab และ Simulink โดยการแสดงเส้นทางเดินของรากแสดงให้เห็นว่าระบบที่ยังไม่ทำการควบคุม จะประกอบด้วยโพลบน RHP ซึ่งเป็นทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ หลังจากที่ได้ทำการชดเชยโดยการเพิ่มตัวควบคุม PID สามารถทำให้ลูกตุ้มสามารถรักษาเสถียรภาพได้



ภาพที่ 8 เส้นทางเดินของราก (root locus) ของลูกตุ้มหัวกลับ ของระบบวงเปิด (open-loop)

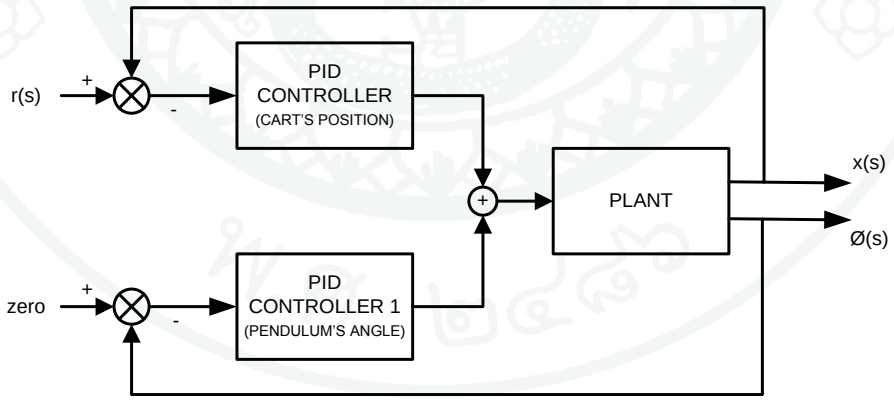
อย่างไรก็ตามการควบคุมระบบด้วยตัวควบคุม PID สามารถรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้มไว้ที่ตำแหน่งสมดุลบนได้ก็จริง แต่ก็ไม่สามารถที่จะรักษาตำแหน่งของตัวรถได้ เนื่องจาก PID เหมาะสมกับระบบที่เป็น SISO ไม่สามารถควบคุมระบบที่ต้องการหลายเอาท์พุทได้ง่าย ทำให้ PID ไม่สามารถควบคุมตำแหน่งตัวรถและมุมของลูกตุ้มได้ในเวลาเดียวกัน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 9 เส้นทางเดินของราก (root locus) ของระบบวงปิด (closed-loop) โดยใช้ PID

Armad (2005) ได้ปรับปรุงตัวควบคุม PID โดยได้ใช้ PID มากกว่าหนึ่งตัวในการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับอย่างง่ายตามภาพที่ 10 อย่างไรก็ตามการใช้ PID หลายตัวก็ทำให้เกิดความยุ่งยากในการปรับค่า โดยเฉพาะในกรณีที่ระบบซับซ้อนมากยิ่งขึ้น



ภาพที่ 10 บล็อกไดอะแกรมการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับด้วยตัวควบคุม PID 2 ตัว

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการออกแบบระบบควบคุมลูกตุ้มหัวกลับจำเป็นที่จะต้องมีความรู้ความเข้าใจในหลายแขนง ที่สำคัญได้แก่หลักการทางด้านกลศาสตร์ และทางด้านการควบคุม

การสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาตร์เพื่อจำลองระบบโดยทั่วไป จะนำกฎของนิวตันมาใช้ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย อย่างไรก็ตามกฎของนิวตันไม่เหมาะที่จะใช้สำหรับระบบที่มีหลายๆตัวแปรดังเช่นระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน ในที่นี้จึงนำวิธีการสร้างสมการการเคลื่อนที่โดยใช้ สมการของลากรางจ์ ซึ่งสมการที่ได้จะมีความซับซ้อนน้อยกว่าการใช้กฎของนิวตัน ซึ่งรายละเอียดการคำนวณจะได้กล่าวไว้ในภาคผนวกที่ ก

ในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงการออกแบบระบบควบคุมเบื้องต้นอย่างคร่าวๆ ซึ่งรายละเอียดสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือเกี่ยวกับระบบควบคุมทั่วไปทั้งแบบภาษาไทยและภาษาต่างประเทศ

การออกแบบระบบควบคุมถูกแบ่งออกเป็นสองประเภท ได้แก่แบบดั้งเดิม บนโดเมนความถี่ และแบบยุคใหม่ บนโดเมนเวลา ข้อเสียเปรียบของแบบดั้งเดิมก็คือ สามารถออกแบบได้ดีสำหรับระบบ SISO และ LTI การออกแบบระบบ MIMO จะทำให้สิ้นเปลืองเวลาและซับซ้อน ซึ่งการออกแบบยุคใหม่ จะอาศัยตัวแปรสถานะ โดยที่อนุพันธ์อันดับสูงๆสามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ทำให้สามารถแก้ไขปัญหานี้ได้

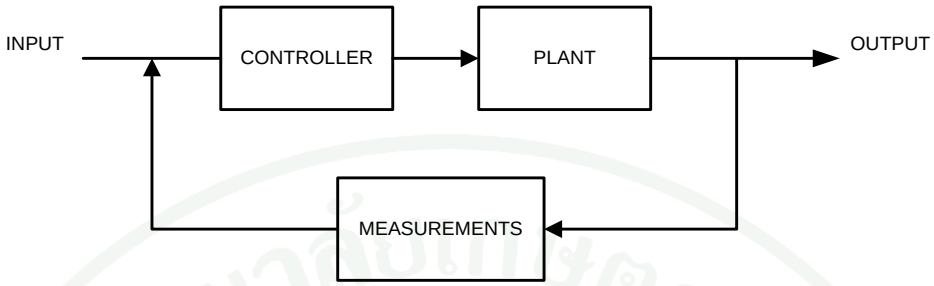
1. พื้นฐานระบบควบคุม

ระบบควบคุมป้อนกลับ (feedback control) หรือระบบควบคุมวงปิด (closed-loop control) แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรมดังภาพที่ 11 โดยประกอบด้วยส่วนสำคัญคือ พลานท์ (plant) หรือระบบที่เราต้องการควบคุม (ซึ่งในที่นี้ก็คือระบบลูกตุ้มหัวกลับ), ตัวควบคุม (controller) คือ ตัวควบคุมที่ออกแบบในการควบคุมระบบ เช่น P, PI, PID เป็นต้น และอุปกรณ์วัดค่า (measurement) หรือตัวตรวจรู้ (sensor) ในการวัดค่าต่างๆของระบบ เพื่อนำไปคำนวณในการสร้างสัญญาณควบคุม โดยมีเป้าหมายของการออกแบบ เช่น

- เป็นระบบที่มีเสถียรภาพ
- แนววิถีลู่เข้าสู่สถานะเป้าหมายได้รวดเร็ว

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

- ใช้พลังงานในการควบคุมน้อย
- อื่นๆ



ภาพที่ 11 บล็อกไดอะแกรมของระบบป้อนกลับ

2. ระบบควบคุมปริภูมิสถานะ

สมการปริภูมิสถานะเขียนได้ในรูปของเซตของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มี n ตัวแปรสถานะ สำหรับระบบ LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

เมื่อ

x = เวกเตอร์สถานะ
y = เวกเตอร์เอาท์พุท
u = เวกเตอร์อินพุท
A = เมทริกซ์ระบบ
B = เมทริกซ์ควบคุม
C = เมทริกซ์เอาท์พุท
D = transmission matrix
$\dot{x}$ = เวกเตอร์ตัวแปรสถานะ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

โดยที่

$$u = r - Kx$$

เมื่อ r เป็นสัญญาขาเข้าอ้างอิง จะได้ระบบวงปิดที่มีปริภูมิสถานะคือ

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

ในส่วนของปัญหาการคุมค่า (regulator problem) หรือ $r = 0$ วัตถุประสงค์ของการออกแบบควบคุมคือการหาค่าอัตราขยาย

$$u = -Kx$$

เพื่อให้สัญญาณขาออก (output) ลู่เข้าสู่ศูนย์ โดยปริภูมิสถานะเขียนได้เป็น

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

นั่นคือการออกแบบค่าอัตราขยาย K เพื่อให้ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ทุกตัวของเมทริกซ์ $A - BK$ มีเสถียรภาพ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

ในส่วนของอุปกรณ์การทดลองจะแบ่งออกเป็น 3 ส่วนหลักๆ คือ ชุดการทดลองระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน อุปกรณ์ควบคุม และส่วนของซอฟท์แวร์คอมพิวเตอร์

1. ชุดการทดลองระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน เป็นชุดการทดลองที่ได้ออกแบบและจัดทำขึ้นภายในห้องปฏิบัติการ โดยมีโครงสร้างอย่างคร่าวๆตามภาพที่ ประกอบด้วย ส่วนสำคัญๆ ดังนี้

1.1 แท่งอลูมิเนียมหนา 1.5 มิลลิเมตร ซึ่งถูกออกแบบให้เป็นก้านลูกตุ้มโดยมีความยาว 30 เซนติเมตร และ 52 เซนติเมตร ตามลำดับ

ภาพที่ 12 ลูกตุ้มชิ้นที่ 1

ภาพที่ 13 ลูกตุ้มชิ้นที่ 2

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

1.2 monocarrier ของ NSK รุ่น MCM06040H20K สำหรับเปลี่ยนการเคลื่อนที่เชิงมุมของการหมุนของมอเตอร์กระแสตรงให้เป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้นของตัวรถ มีรายละเอียดดัง ภาพ

ภาพที่ 14 monocarrier ที่ถูกนำมาใช้เป็นอุปกรณ์เปลี่ยนการหมุนเป็นการเคลื่อนที่ของรถ

Dimension of MCM06 (Single slider) — ΔV is thickness of NSK K1™ Lubrication Unit

Reference number	Nominal stroke (mm)	Stroke limit(mm) (K1™ is not equipped)	Ball screw lead (mm)	Body length (mm) L_1	L_2	L_3	No. of mounting holes n	Inertia $\times 10^{-4}$ (kg • m^2)	Mass (kg)
※MCM06005H05K00	50	85 (102)	5	258	190	100	2	0.083	2.7
※MCM06005H10K00			10					0.077	
MCM06010H05K00	100	135 (152)	5	308	240	200	3	0.103	3.0
MCM06010H10K00			10					0.092	
MCM06020H05K00	200	235 (252)	5	408	340	300	4	0.142	3.8
MCM06020H10K00			10					0.121	
MCM06030H05K00	300	335 (352)	5	508	440	400	5	0.180	4.5
MCM06030H10K00			10					0.150	
MCM06030H20K00			20					0.196	
MCM06040H05K00	400	435 (452)	5	608	540	500	6	0.219	5.2
MCM06040H10K00			10					0.180	
→ MCM06040H20K00			20					0.225	
MCM06050H05K00	500	535 (552)	5	708	640	600	7	0.258	6.0
MCM06050H10K00			10					0.209	
MCM06050H20K00			20					0.255	
MCM06060H10K00	600	635 (652)	10	808	740	700	8	0.239	6.7
MCM06060H20K00			20					0.284	
MCM06070H10K00	700	735 (752)	10	908	840	800	9	0.268	7.4
MCM06070H20K00			20					0.314	
MCM06080H10K00	800	835 (852)	10	1,008	940	900	10	0.298	8.1
MCM06080H20K00			20					0.343	

ภาพที่ 15 รายละเอียดของอุปกรณ์ที่ใช้งาน (MCM06040H20K00)

1.3 ตัวตรวจรู้ เป็นอุปกรณ์ในการเปลี่ยนการเคลื่อนที่เชิงกลเป็นรูปแบบของสัญญาณทางไฟฟ้าเพื่อให้คอมพิวเตอร์สามารถอ่านค่าได้ ในชุดการทดลองได้ทำการติดตั้งตัวตรวจรู้ จำนวน 3 ตัว คือ rotary encoder ของ Omron รุ่น E6B2-CWZ6C ความละเอียดขนาด 2000 ครั้งต่อรอบ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จำนวน 2 ตัว ในการวัดการหมุนของก้านลูกตุ้มทั้งสองก้าน และ rotary encoder ภายในตัวมอเตอร์กระแสตรงขนาด 500 ครั้งต่อรอบ 1 ตัว สำหรับวัดการหมุนของมอเตอร์

ภาพที่ 16 rotary encoder

1.4 DC servo motor 1 ตัว สำหรับขับไปยัง monocarrier เพื่อควบคุมระบบในการรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้ม ในที่นี้ใช้อุปกรณ์ของ Sanyodenki ขนาด 12V 55W 200 rpm โดยมีตัวตรวจรู้ rotary encoder ภายในตัวมอเตอร์

ภาพที่ 17 มอเตอร์กระแสตรง

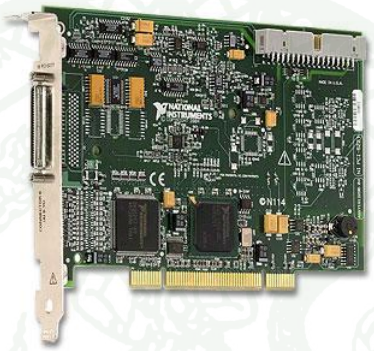
2. อุปกรณ์ควบคุม ในการควบคุมจะใช้คอมพิวเตอร์โดยอาศัยโปรแกรม LabVIEW ในการควบคุม

2.1 คอมพิวเตอร์จำนวน 2 เครื่อง ประกอบด้วย host computer สำหรับการติดตั้งโปรแกรม ที่จำเป็นในการออกแบบระบบควบคุม เช่น Matlab, LabVIEW และเป็นส่วนต่อประสาน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กับผู้ใช้ และ target computer เป็นหน่วยควบคุมโดยตรงไปยังระบบ โดยทำการรับคำสั่งที่ได้รับการออกแบบมาจาก host computer ผ่านทาง TCP/IP และภายในติดตั้งระบบปฏิบัติการ LabVIEW Real-time

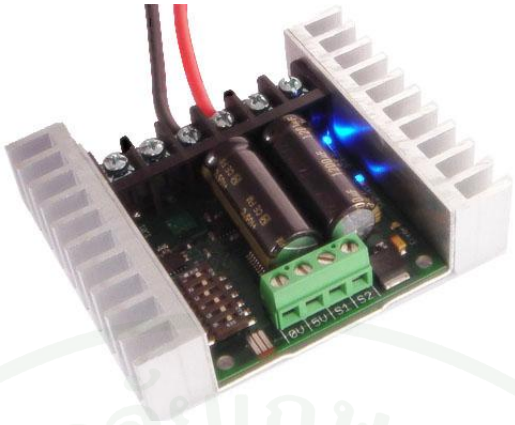
2.2 data acquisition (DAQ) ของ National Instrument รุ่น PCI-6221 จำนวน 2 ชุด ทำหน้าที่รับ-ส่งสัญญาณระหว่าง target computer และอุปกรณ์ต่างๆ ซึ่งตัวการ์ดจะถูกติดตั้งบน target computer การใช้งานจะใช้งานในส่วนของ counter input 3 ช่องสัญญาณ และ analog output จำนวน 1 ช่องสัญญาณ รายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่ www.ni.com



ภาพที่ 18 NI DAQ PCI-6221

2.3 วงจรขยายสัญญาณ (power amplifier) สำหรับขยายสัญญาณในการขับมอเตอร์กระแสตรง ทำหน้าที่ขยายสัญญาณจากตัวควบคุมที่มีแรงดันต่ำให้มีแรงดันที่สูงขึ้น โดยมีแหล่งไฟฟ้าจากภายนอกและควบคุมทิศทางของมอเตอร์กระแสตรง ในงานวิจัยนี้ได้ใช้อุปกรณ์รุ่น Sabertooth 2X20 เป็นอุปกรณ์ขยายสัญญาณซึ่งสามารถดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่ www.dimensionengineering.com

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 19 วงจรขยายสัญญาณ Sabertooth 2X20

2.4 DC power supply สำหรับเป็นแหล่งพลังงานของอุปกรณ์ต่างๆ

ภาพที่ 20 DC power supply

3. ซอฟท์แวร์

3.1 Microsoft Windows XP เป็นระบบปฏิบัติการสำหรับเครื่อง host computer เป็นระบบปฏิบัติการที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย

3.2 Mathwork Matlab ซอฟท์แวร์ที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมและจำลองระบบเพื่อการวิเคราะห์ผลการทดลอง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3.3 National Instrument LabVIEW ซอฟท์แวร์สำหรับออกแบบกระบวนการทำงานของโปรแกรมเชิงภาพ และพัฒนาการทดลองระบบควบคุมกับอุปกรณ์จริง

3.4 National Instrument LabVIEW Real-Time OS ระบบปฏิบัติการสำหรับการแบบ real-time ที่ถูกติดตั้งลงบน target computer

ภาพที่ 21 ชุดการทดลองระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนภายในห้องปฏิบัติการ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิธีการ

วิธีการในงานวิจัยนี้แบ่งออกเป็นขั้นตอนที่สำคัญ คือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical modeling), การออกแบบตัวควบคุม (controller design), การจำลองระบบ (simulation) และ การทำตัวควบคุมไปทดสอบกับระบบจริง (implementation)

1. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มหัวกลับ

การออกแบบตัวควบคุมที่ต้องใช้แบบจำลอง (model-based control) จำเป็นที่จะต้องมีแบบจำลองของระบบ โดยการหาแบบจำลองของระบบสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้กฎของนิวตัน หรือการใช้สมการของลากรานจ์ เป็นต้น ในที่นี้จะนำสมการของลากรานจ์มาใช้ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยสมการลากรานจ์สำหรับระบบพลศาสตร์สามารถเขียนได้ดังนี้

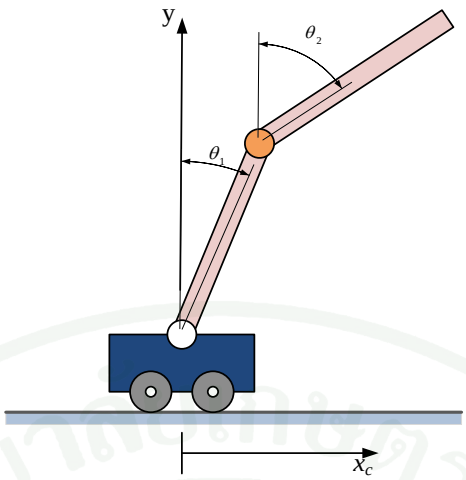
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i, \qquad i=1,2,...,n$$

โดยที่

T	แทนพลังงานจลน์รวมของระบบ
U	แทนพลังงานศักย์รวมของระบบ
q_i	แทน generalized coordinate
Q_i	แทน generalized force
i	แทน อันดับของพิกัด

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ทำการออกแบบและจัดทำระบบลูกตุ้มหัวกลับเพื่อใช้ในการทดลองขึ้น โดยระบบประกอบด้วย มอเตอร์กระแสตรงซึ่งทำการขับเคลื่อนตัวรถ ผ่านทาง monocarrier โดยมีลูกตุ้มทั้งสองติดบนตัวรถ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 22 ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน

ระบบลูกตุ้มหัวกลับมีโครงสร้างดังแสดงในภาพที่ 22 โดยให้ตัวห้อย $_0$ แทนตัวรถ ตัวห้อย $_1$ แทนลูกตุ้มที่1 และ ตัวห้อย $_2$ แทนลูกตุ้มที่ 2 สมการการเคลื่อนที่ที่ได้คือ (รายละเอียดการคำนวณดูได้จากภาคผนวก ก)

$$
\begin{aligned}
&(m_0+m_1+m_2)\ddot{x}_0+(m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1+m_2l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\\
&-(m_1l_1+m_2L_1)\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2-m_2l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2\\
&=F-c_0\dot{x}_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1)\ddot{x}_0+(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1)\ddot{\theta}_1+m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2\\
&-(m_1l_1+m_2L_1)\sin(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\\
&-\left(-m_1l_1\sin(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1\sin(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\\
&+(-m_1l_1-m_2L_1)g\sin(\theta_1)\\
&=-c_1\dot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(m_2l_2^2+J_2)\ddot{\theta}_2+m_2l_2\cos(\theta_2)\ddot{x}_0-m_2l_2\sin(\theta_2)\dot{x}_0\dot{\theta}_2\\
&+m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1-m_2L_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\\
&-m_2L_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&-m_2gl_2\sin(\theta_2)\\
&=-c_2\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เมื่อ

l แทน ระยะจากจุดหมุนถึงจุดศูนย์กลางมวล

L แทนความยาวของลูกตุ้ม,

m แทนมวลของลูกตุ้ม,

c แทนค่าคงที่ความเสียดทาน

พารามิเตอร์ต่างๆของระบบดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ของระบบ

พารามิเตอร์	ปริมาณ	หน่วย
m_0	1	Kg
m_1	0.3	Kg
m_2	0.3	Kg
L_1	0.3	m
L_2	0.6	m
l_1	0.15	m
l_2	0.3	m
c_0	0.1	N·s/m
c_1	0.0011*	N·s/m
c_2	0.0004*	N·s/m
J_1	0.0034*	kg·m2
J_2	0.0117*	kg·m2

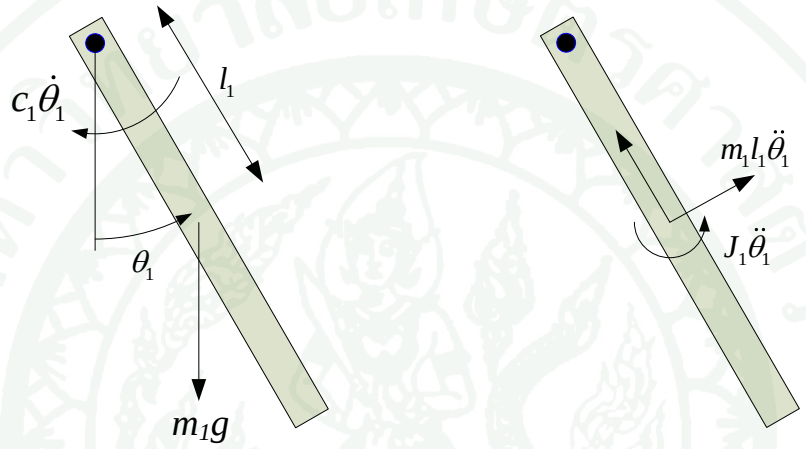
หมายเหตุ * ค่าที่ได้จากการทดลอง

เพื่อให้สมการการเคลื่อนที่สามารถนำไปใช้ในการออกแบบด้วยวิธีการเชิงเส้นจึงต้องทำให้เป็นสมการเชิงเส้น (linearization) โดยพิจารณารอบจุดสมดุลบน $(\theta_1,\ \theta_2 = 0)$ โดยให้ $\sin(\theta) = \theta,\ \cos(\theta) = 1,\ \dot{\theta} = 0$ จากสมการทั้ง 3 เขียนได้ใหม่คือ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\begin{aligned}
\left(m_0+m_1+m_2\right)\ddot{x}_0+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2 &= F-c_0\dot{x}_0\\
\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\ddot{x}_0+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2L_1l_2\ddot{\theta}_2 &= -c_1\dot{\theta}_1+(m_1l_1+m_2L_1)g\theta_1\\
m_2l_2\ddot{x}_0+m_2L_1l_2\ddot{\theta}_1+\left(m_2l_2^2+J_2\right)\ddot{\theta}_2 &= -c_2\dot{\theta}_2+m_2gl_2\theta_2
\end{aligned}$$

1.1 การหาพารามิเตอร์ c_1, J_1



ภาพที่ 23 free body diagram ของก้านลูกตุ้มที่หนึ่ง

จาก FBD และกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเชิงมุม จะได้สมการการเคลื่อนที่คือ

$$\left(J_1+m_1l_1^2\right)\ddot{\theta}_1+c_1\dot{\theta}_1+m_1gl_1\theta_1=0$$

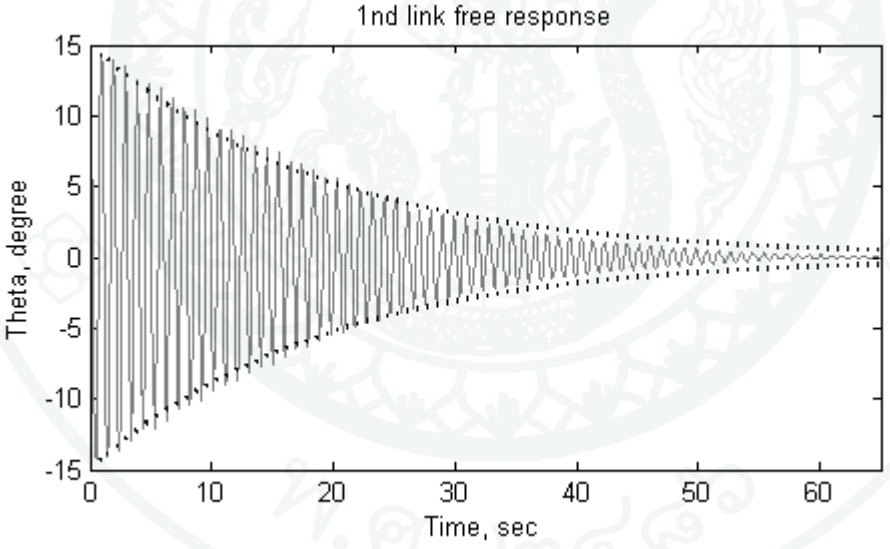
$$\ddot{\theta}_1+\frac{c_1}{J_1+m_1l_1^2}\dot{\theta}_1+\frac{m_1gl_1}{J_1+m_1l_1^2}\theta_1=0 \qquad (1)$$

การหาขนาดของค่าคงที่ความเสียดทาน ด้วยการหาอัตราการลดลงของ amplitude ของการแกว่งอิสระ ซึ่งอยู่ในรูปของสมการ logarithmic decrement (Thomson, 1998) โดยสมการ logarithmic decrement คือ $x(t)=Xe^{-\zeta\omega_n t}$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ภาพที่ 24 การทดลองทดสอบหาค่าพารามิเตอร์ c_1, J_1

โดยก้านลูกตุ้มถูกปล่อยที่ตำแหน่งสถานะเริ่มต้น $\theta = 15°, \dot{\theta} = 0$ ผลที่ได้ดังภาพที่ 25



ภาพที่ 25 ผลตอบสนองจากปล่อยก้านลูกตุ้มก้านที่ 1 อย่างอิสระ ที่จุดเริ่มต้น 15 องศา

จากสถานะเริ่มต้น $X = 15°$ สามารถสรุปได้ดังตารางที่ 2

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 2 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการแกว่งอย่างอิสระของก้านลูกตุ้มก้านที่หนึ่ง

พารามิเตอร์	ค่าที่ได้	หน่วย
τ_d	0.9559	sec
ω_d	6.5735	rad/sec
ζ	0.008	-

โดยจากภาพที่ 25 เส้นประแสดงสมการของ logarithmic decrement คือ

$$x(t) = 0.2618e^{-(0.008)6.5735t}$$

จากสมการ (1) แทนค่าตัวแปรได้

$$\ddot{\theta}_1 + 0.1052\dot{\theta}_1 + 43.2110\theta_1 = 0$$

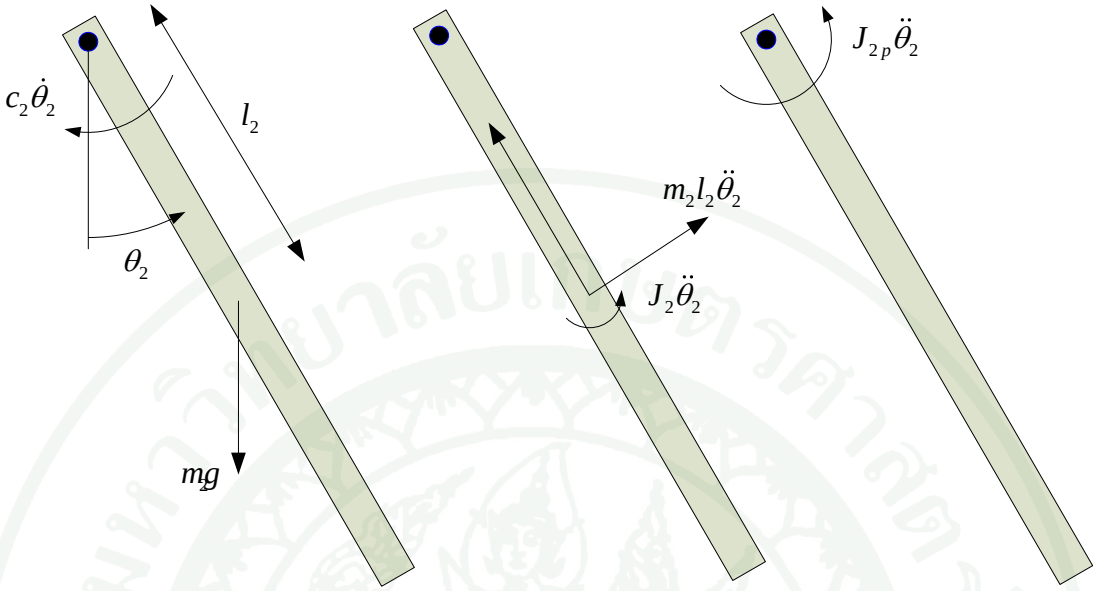
เปรียบเทียบกับรูปทั่วไปของระบบ mass-spring-damper คือ

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ได้ $c_1 = 0.0011$ และ $J_1 = 0.0034$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

1.2 การหาพารามิเตอร์ c_2, J_2



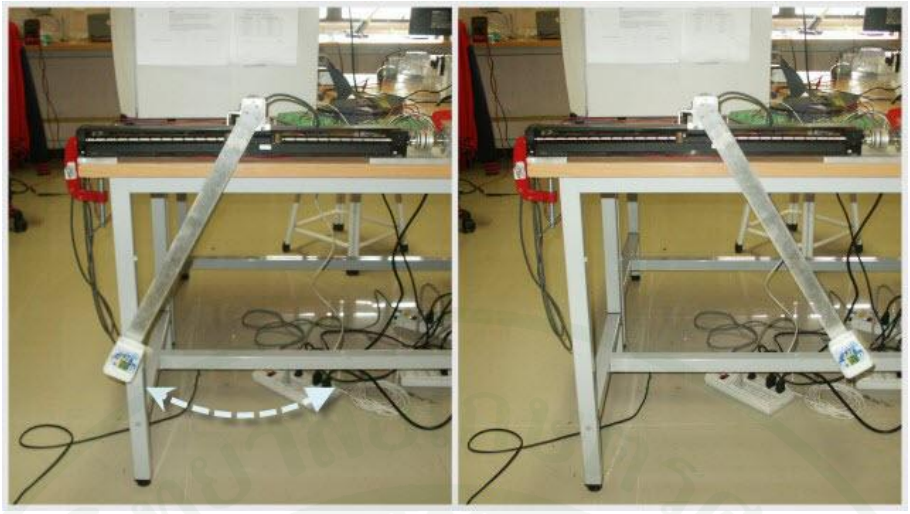
ภาพที่ 26 free body diagram ของก้านลูกตุ้มที่สอง

เช่นเดียวกับการหา c_1, J_1 จาก FBD และกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเชิงมุม จะได้สมการการเคลื่อนที่คือ

$$\left(J_2 + m_2 l_2^2\right)\ddot{\theta} + c_2\dot{\theta} + m_2 g l_2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c_2}{J_2 + m_2 l_2^2}\dot{\theta} + \frac{m_2 g l_2}{J_2 + m_2 l_2^2}\theta = 0 \qquad (2)$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 27 การทดลองทดสอบหาค่าพารามิเตอร์ c_2, J_2

โดยก้านลูกตุ้มถูกปล่อยที่ตำแหน่งสถานะเริ่มต้น $\theta = 15°, \dot{\theta} = 0$ ผลที่ได้ดังภาพที่ 28

เช่นเดียวกัน สมการ logarithmic decrement คือ $x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}$ ซึ่งจากสถานะเริ่มต้น $X = 15°$ สามารถสรุปได้ดังตารางที่ 2

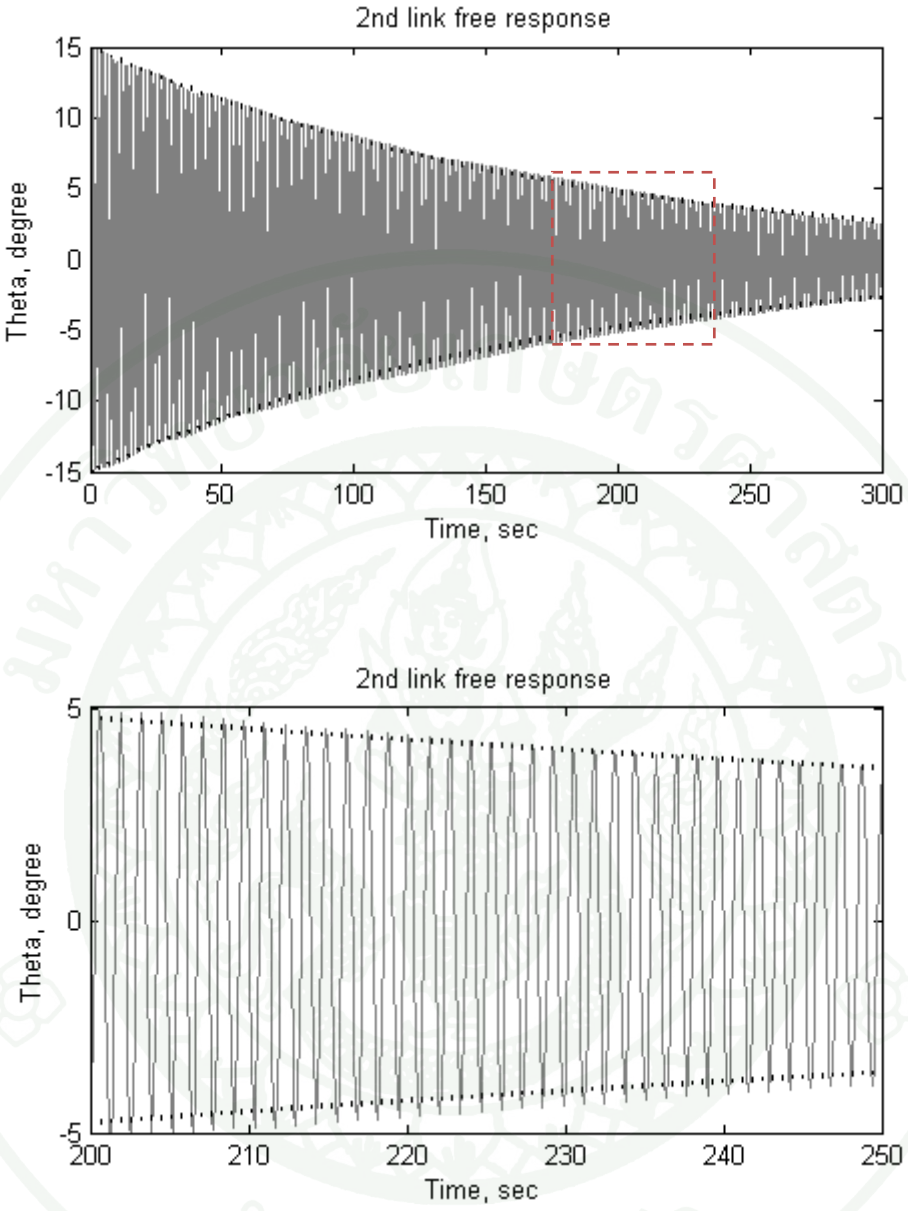
ตารางที่ 3 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการแกว่งอย่างอิสระของก้านลูกตุ้มก้านที่สอง

พารามิเตอร์	ค่าที่ได้	หน่วย
τ_d	1.3158	sec
ω_d	4.7752	rad/sec
ζ	0.0012	-

โดยจากภาพที่ 28 เส้นประแสดงสมการของ logarithmic decrement คือ

$$x(t) = 0.2618e^{-(0.0012)4.7752t}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 28 ผลตอบสนองจากปล่อยก้านลูกตุ้มก้านที่ 2 อย่างอิสระ ที่จุดเริ่มต้น 15 องศา

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากสมการ (2) แทนค่าตัวแปรได้

$$\ddot{\theta} + 0.0115\dot{\theta} + 22.8025\theta = 0$$

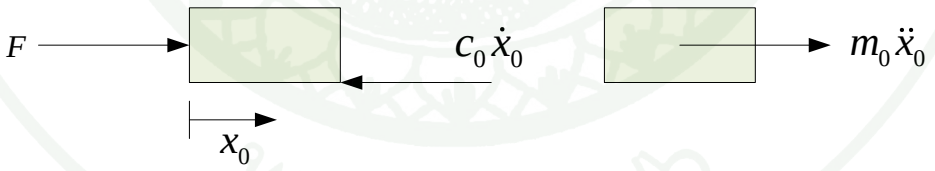
เปรียบเทียบกับรูปทั่วไปของระบบ mass-spring-damper

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ได้ $c_2 = 0.0004$ และ $J_2 = 0.0117$

จากการคำนวณค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของก้านลูกตุ้มสามารถหาได้จากสูตร $J_1 = 1/12 m_1 L_1^{\ 2}$ ได้ $J_1 = 0.0023 kg \cdot m^2$ มีความคลาดเคลื่อนอยู่ประมาณ 48% ในทำนองเดียวกัน $J_2 = 1/12 m_2 L_2^{\ 2}$ ได้ $J_2 = 0.009 kg \cdot m^2$ ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 89% แต่เนื่องจากค่าโมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าน้อยซึ่งส่งผลต่อสมการระบบไม่มากนัก จึงเลือกใช้ค่าที่ได้จากการทดลอง ซึ่งความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเกิดจากลักษณะของก้านลูกตุ้มบางตำแหน่งที่ยากที่จะคำนวณอย่างละเอียด เช่น ตำแหน่งของ rotary encoder หรือ สายสัญญาณต่างๆ

1.3 การหาพารามิเตอร์ $k_{2,}c_0 + k_1 k_3$



ภาพที่ 29 free body diagram ของตัวรถ

จากภาพและกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของรถ คือ

$$m_0\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 = F \tag{3}$$

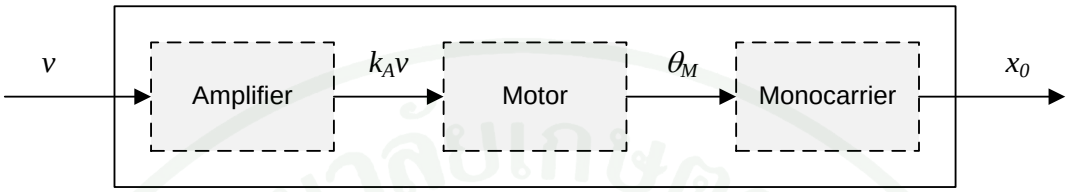
สมการความสัมพันธ์ของ monocarrier คือ (θ_m คือการหมุนที่เกิดขึ้นเนื่องจากมอเตอร์)

$$\theta_m = k_1 x_0 \tag{4}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ความสัมพันธ์ของมอเตอร์กระแสตรง คือ

$$F = k_2 v - k_3 \dot{\theta}_m \tag{5}$$



ภาพที่ 30 การต่ออุปกรณ์การทดลองหาค่าพารามิเตอร์ที่จำเป็นของตัวขยายสัญญาณ มอเตอร์ และ monocarrier (open-loop)

เมื่อแทน (4), (5) ใน (3) ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่รวมจะได้เป็น

$$m_0 \ddot{x}_0 + \left(c_0 + k_1 k_3\right) \dot{x}_0 = k_2 v \tag{6}$$

$$\frac{m_0}{k_2} \ddot{x}_0 + \frac{\left(c_0 + k_1 k_3\right)}{k_2} \dot{x}_0 = v \tag{7}$$

ทำการประมาณค่าของสัมประสิทธิ์ $\left(c_0 + k_1 k_3\right) / k_2$ และ m_0 / k_2 จากสมการ (7) ด้วยวิธี linear lease square โดยทำการป้อนค่าสัญญาณฟังก์ชัน $v = \sin\left(2\pi f(t) t\right)$ โดยปรับความถี่ของสัญญาณเปลี่ยนแปลงจาก 0.1 ถึง 1 เฮิร์ท ในช่วงเวลา 15 วินาที เพื่อให้ครอบคลุมช่วงการทำงานของมอเตอร์ โดยมีสัญญาณ v ผลตอบสนองที่ได้ดังภาพที่ 31 ทำการหาค่าพารามิเตอร์ด้วยคำสั่ง *lsqlin* จากโปรแกรม Matlab ได้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆคือ

$$\frac{m_0}{k_2} = 0.0352, \quad \frac{c_0 + k_1 k_3}{k_2} = 6.5227$$

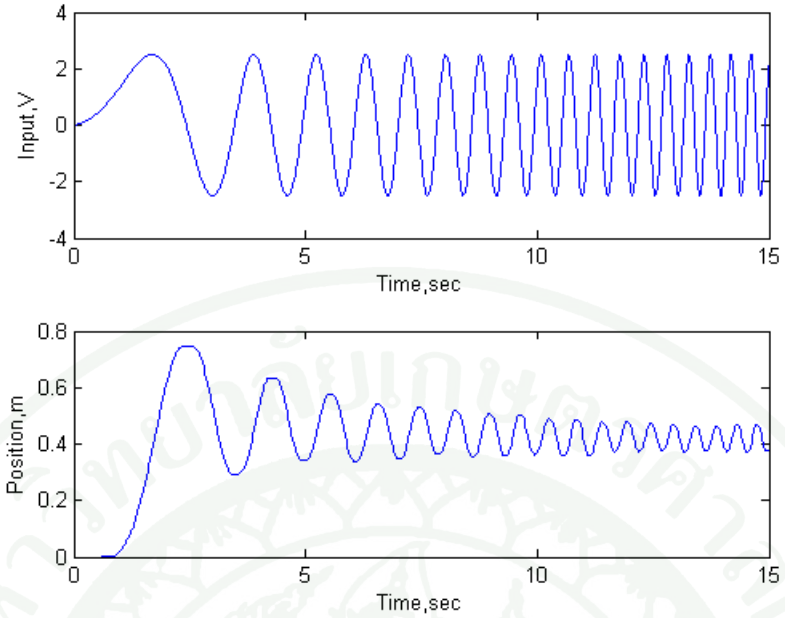
เมื่อทำการแทนค่า พารามิเตอร์ที่ได้จากการทดลอง คือ

$k_1 = 157.0796 \ \left(2\pi / 0.04\right)$

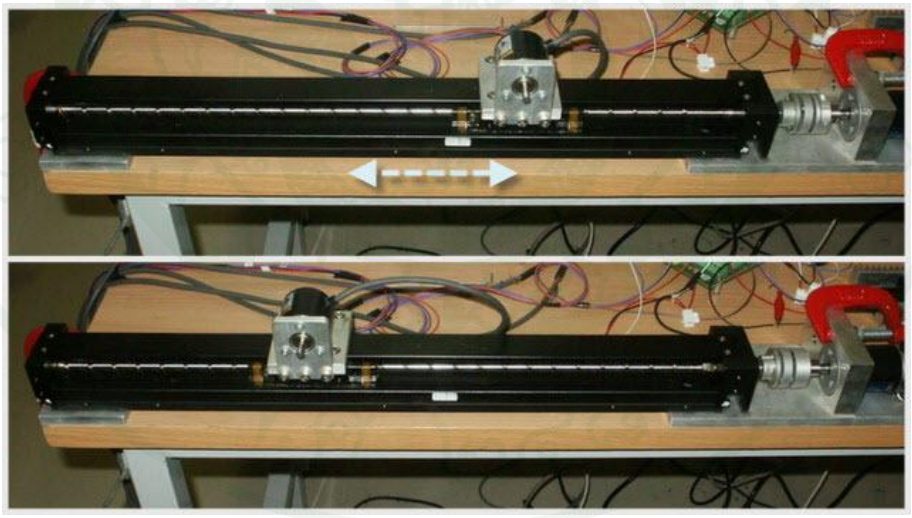
$k_2 = 28.3873$

$c_0 + k_1 k_3 = 185.1620$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

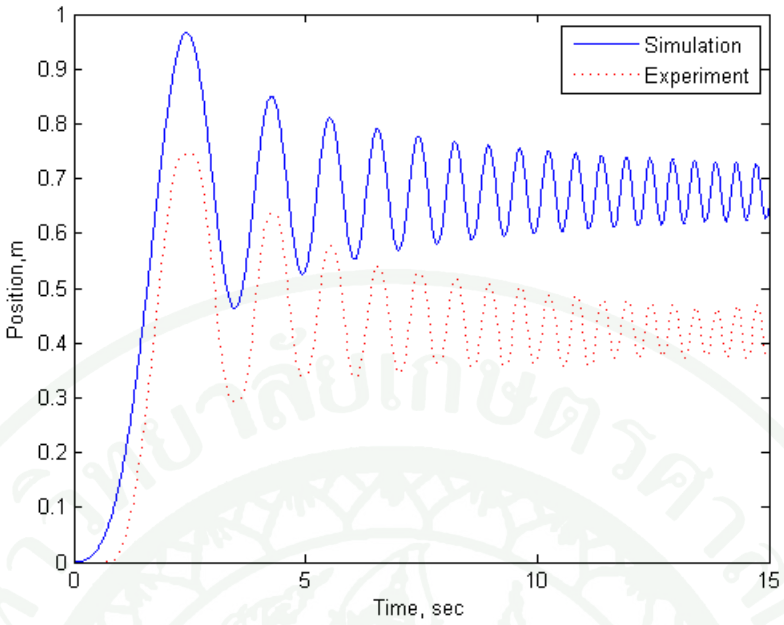


ภาพที่ 31 แสดงสัญญาณไฟฟ้าป้อนเข้ามอเตอร์กระแสตรง(บน) และผลตอบสนองของตัวรถ(ล่าง)



ภาพที่ 32 การทดลองการหาค่าพารามิเตอร์ของ DC servo motor และ monocarier

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 33 เปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบที่ได้จากการจำลองและผลตอบสนองจริง

โดยสมมติให้ตัวรถมีมวลเทียบเท่า 1 Kg และมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน 0.1 Nm

$$\begin{bmatrix} m_0+m_1+m_2 & m_1l_1+m_2L_1 & m_2l_2 \\ m_1l_1+m_2L_1 & m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1 & m_2L_1l_2 \\ m_2l_2 & m_2L_1l_2 & m_2l_2^2+J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2v-(c_0+k_1k_3)\dot{x}_0 \\ -c_1\dot{\theta}_1+(m_1l_1+m_2L_1)g\theta_1 \\ -c_2\dot{\theta}_2+m_2l_2g\theta_2 \end{bmatrix}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} 1.6 & 0.135 & 0.09 \\ 0.135 & 0.0372 & 0.027 \\ 0.09 & 0.027 & 0.0387 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.3873v-185.1620\dot{x}_0 \\ -0.0011\dot{\theta}_1+1.3244\theta_1 \\ -0.0004\dot{\theta}_2+0.8829\theta_2 \end{Bmatrix}$$

เขียนในรูปปริภูมิสเตต เมื่อ $x=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T$ โดยที่

$x_1=x_0,\ x_2=\dot{x}_1,\ x_3=\theta_1,\ x_4=\dot{x}_3,\ x_5=\theta_2,\ x_6=\dot{x}_5$ ได้คือ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -167.42 & -4.72 & 0 & 0.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 660.16 & 90.94 & -0.07 & -34.98 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -71.22 & -52.46 & 0.04 & 46.43 & -0.02 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 25.67 \\ 0 \\ -101.21 \\ 0 \\ 10.92 \end{Bmatrix} v$$

โดยสมการเอาท์พุทระบบคือ

$$y = Cx$$

เมื่อ

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ระบบมีค่าลักษณะเฉพาะที่ 0, -167.55, -10.12, -4, 10, 4 ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะบางค่ามากกว่าศูนย์หรืออยู่บน RHP ซึ่งทำให้เป็นระบบไม่มีเสถียรภาพ

2. การออกแบบตัวควบคุมสำหรับลูกตุ้มหัวกลับ

ในส่วนของการออกแบบการควบคุมจะทำการออกแบบการควบคุมด้วยการควบคุมเหมาะสมที่สุด (optimal control) (เดวิด, 2551; วิบูลย์, 2548; Ogata, 1997) จากวิธีการออกแบบการคุมค่ากำลังสองเชิงเส้น (linear quadratic regulator, LQR) เพื่อให้เป็นไปตามหลักการควบคุมจำเป็นที่ระบบจะต้องมีคุณสมบัติการควบคุมได้ และการสังเกตได้ (controllability and observability)

2.1 คุณสมบัติการควบคุมได้ (controllability)

สำหรับระบบที่ควบคุมได้ (controllable) หมายถึง ระบบมีสัญญาณควบคุมที่สามารถเคลื่อนสถานะของระบบจากตำแหน่งเริ่มต้นไปยังตำแหน่งใดๆที่ต้องการได้ในช่วงเวลาหนึ่ง โดยสามารถหาความควบคุมได้ของระบบได้จาก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$rank\left[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B \right] = n$$

ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้คำสั่ง rank(ctrb(A,B)) บนโปรแกรม Matlab ซึ่งในที่นี้ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนมี

$$rank\left[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B \right] = 6 \tag{8}$$

2.2 คุณสมบัติการสังเกตได้ (observability)

สำหรับระบบที่สังเกตได้ (observable) หมายถึง ระบบที่เวลาใดๆ สามารถทราบค่าสถานะได้ จากการพิจารณาสัญญาณเอาท์พุท ณ ช่วงเวลาหนึ่ง โดยสามารถหาความสังเกตได้ของระบบได้จาก

$$rank\left[C^T \vdots A^TC^T \vdots A^{2T}C^T \vdots \cdots \vdots A^{(n-1)T}C^T \right] = n$$

ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้คำสั่ง rank(obsv(A,C)) บนโปรแกรม Matlab ซึ่งในที่นี้ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนมี

$$rank\left[C^T \vdots A^TC^T \vdots A^{2T}C^T \vdots \cdots \vdots A^{5T}C^T \right] = 6 \tag{9}$$

ดังนั้นจาก (8) และ (9) ระบบดังกล่าวจึงมีคุณสมบัติ การควบคุมได้ และ การสังเกตได้

2.3 ตัวควบคุมกำลังสองเชิงเส้น (linear quadratic regulator, LQR)

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการควบคุมด้วยวิธี LQR (Naidu, 2003; Ogata, 1997) ซึ่งเป็นวิธีการควบคุมที่ได้ใช้งานวิจัยนี้ เป็นวิธีการหนึ่งของการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด (optimal control) ข้อได้เปรียบของวิธีการควบคุมกำลังสองเหมาะสมที่สุดที่แตกต่างจากวิธีการวางโพลก็คือผู้ออกแบบสามารถกำหนดลักษณะทิศทางของระบบก่อนได้ตามการปรับค่าน้ำหนัก (weight) และมีลักษณะการหาอัตราการขยายที่เป็นแบบแผนมากกว่า

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากสมการระบบ

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{10}$$

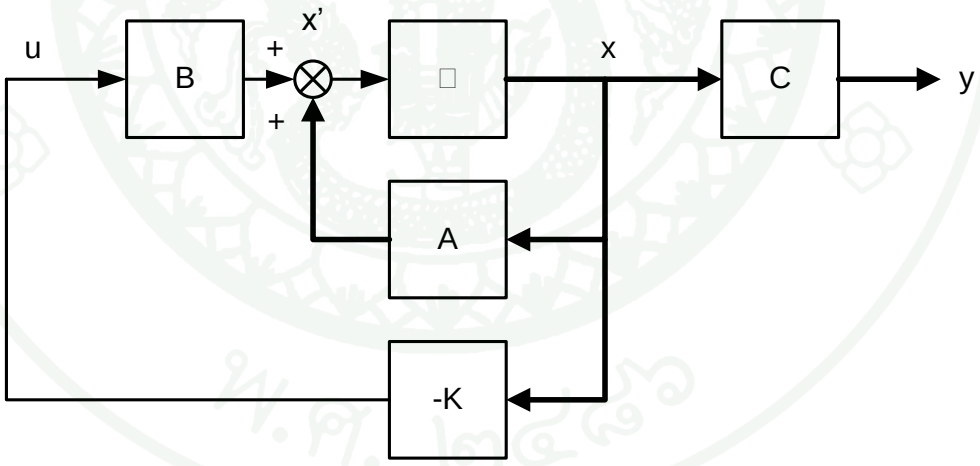
เป็นระบบที่มีคุณสมบัติการควบคุมได้และสังเกตได้ จะต้องทำการหาเมทริกอัตราขยาย K จาก

$$u(t) = -Kx(t) \tag{11}$$

ค่าดัชนีสมรรถนะได้จาก

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T Qx + u^T Ru \right) dt \tag{12}$$

โดยที่ $Q, R \geq 0$ และเป็นเมทริกซ์สมมาตร เมทริกซ์ Q และ R จะเป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความรวดเร็วในการเข้าถึงจุดที่ต้องการ ค่าความผิดพลาด (error) และ การใช้พลังงานในการควบคุม (energy of control signals) ของระบบที่ทำการควบคุม



ภาพที่ 34 แผนภาพแสดงการควบคุมป้อนกลับรักษาเสถียรภาพ (stabilization feedback control)

เมื่อแทนค่าสมการ (11) ลงใน (10) จะได้

$$\dot{x} = Ax - BKx = \left(A - BK \right) x \tag{13}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ระบบจะมีเสถียรภาพเมื่อเมทริกซ์ $A-BK$ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะน้อยกว่าศูนย์หรือมีเครื่องหมายเป็นลบ

แทนค่าสมการ (11) ลงในสมการ (12) จะได้

$$J=\int_0^\infty \left(x^TQx+x^TK^TRKx\right)dt$$

$$J=\int_0^\infty x^T\left(Q+K^TRK\right)xdt \tag{14}$$

กำหนดให้ $x^T\left(Q+K^TRK\right)x=-\frac{d}{dt}\left(x^TPx\right)$

$$x^T\left(Q+K^TRK\right)x=-\dot{x}^TPx-x^TP\dot{x}=-x^T\left[\left(A-BK\right)^TP+P\left(A-BK\right)\right]x$$

$$\left(A-BK\right)^TP+P\left(A-BK\right)=-\left(Q+K^TRK\right) \tag{15}$$

เมื่อ $A-BK$ เป็นเมทริกซ์ที่มีเสถียรภาพ จะมี $P>0$ และเป็นเมทริกซ์สมมาตร ที่สอดคล้องกับสมการ (15) และในกรณีที่ระบบมีเสถียรภาพแล้วสามารถหาค่า P ได้เพียงค่าเดียว ดังนั้นค่า P อื่นๆที่ได้จากการแก้สมการ(15) จะไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอน

จากดรรชนีสมรรถนะจะได้

$$J=\int_0^\infty x^T\left(Q+K^TRK\right)xdt=-x^TPx=-x^T\left(\infty\right)Px\left(\infty\right)+x^T\left(0\right)Px\left(0\right) \tag{16}$$

ดังนั้นจะได้

$$J=x^T\left(0\right)Px\left(0\right)$$

แสดงว่าดรรชนีสมรรถนะเป็นฟังก์ชั่นของค่าเริ่มต้น $x\left(0\right)$ และเมทริกซ์ P เพื่อหาคำตอบ

กำหนดให้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$R = T^T T$$

เมื่อ R เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอน และ T ไม่เป็นเมทริกซ์หนึ่ง จากสมการ (15) สามารถเขียนได้เป็น

$$\left(A^T - K^T B^T\right)P + P\left(A - BK\right) + Q + K^T T^T TK = 0$$

$$A^T P + PA + \left[TK - \left(T^T\right)^{-1} B^T P\right]^T \left[TK - \left(T^T\right)^{-1} B^T P\right] - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (17)$$

โดยพยายามทำให้ค่า J ต่ำสุดโดยการปรับค่า K หรือต้องการค่าต่ำสุดของ

$$x^T \left[TK - \left(T^T\right)^{-1} B^T P\right]^T \left[TK - \left(T^T\right)^{-1} B^T P\right] x$$

ซึ่งเป็นพจน์ที่มีค่าเป็นกึ่งบวกแน่นอนจึงมีค่าต่ำสุดคือศูนย์ ซึ่งจะเป็นเช่นนั้นเมื่อ

$$TK = \left(T^T\right)^{-1} B^T P$$

ดังนั้น

$$K = T^{-1}\left(T^T\right)^{-1} B^T P = R^{-1}B^T P \qquad (18)$$

สมการ (18) เป็นสมการที่ให้ค่า K ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบดังกล่าว ดังนั้นเราสามารถคำนวนหาสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมที่สุด คือ

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px\left(t\right) \qquad (19)$$

ซึ่งเมทริกซ์ P ในสมการ (19) ต้องสอดคล้องกับสมการ (17) หรือที่ลดรูปลงดังสมการ (20) เรียกว่า Reduced-matrix Riccati Equation คือ

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (20)$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สรุปการออกแบบตัวควบคุมด้วยเทคนิคดังกล่าว คือ แก้คำตอบของสมการ Reduced-matrix Riccati Equation (20) เพื่อหาค่าเมทริกซ์ P เมื่อปรากฏค่า P ที่เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอนแสดงได้ว่า ระบบมีเสถียรภาพหรือเมทริกซ์ $A-BK$ มีเสถียรภาพ และแทนค่าเมทริกซ์ P ในสมการ (18) เพื่อคำนวนหาค่า K ที่เหมาะสมที่สุด

การออกแบบตัวควบคุม LQR โดยการใช้โปรแกรม Matlab ช่วยในการคำนวณ โดยการออกแบบตัวควบคุม LQR นั้นสามารถหาได้จากการใช้คำสั่ง

$$[K,S,E]=lqr(sys,Q,R)$$

โดยจะทำการจำลองผลตอบสนองจากการใช้ค่าน้ำหนัก Q และ R ต่างๆกัน โดยให้สถานะเริ่มต้นที่

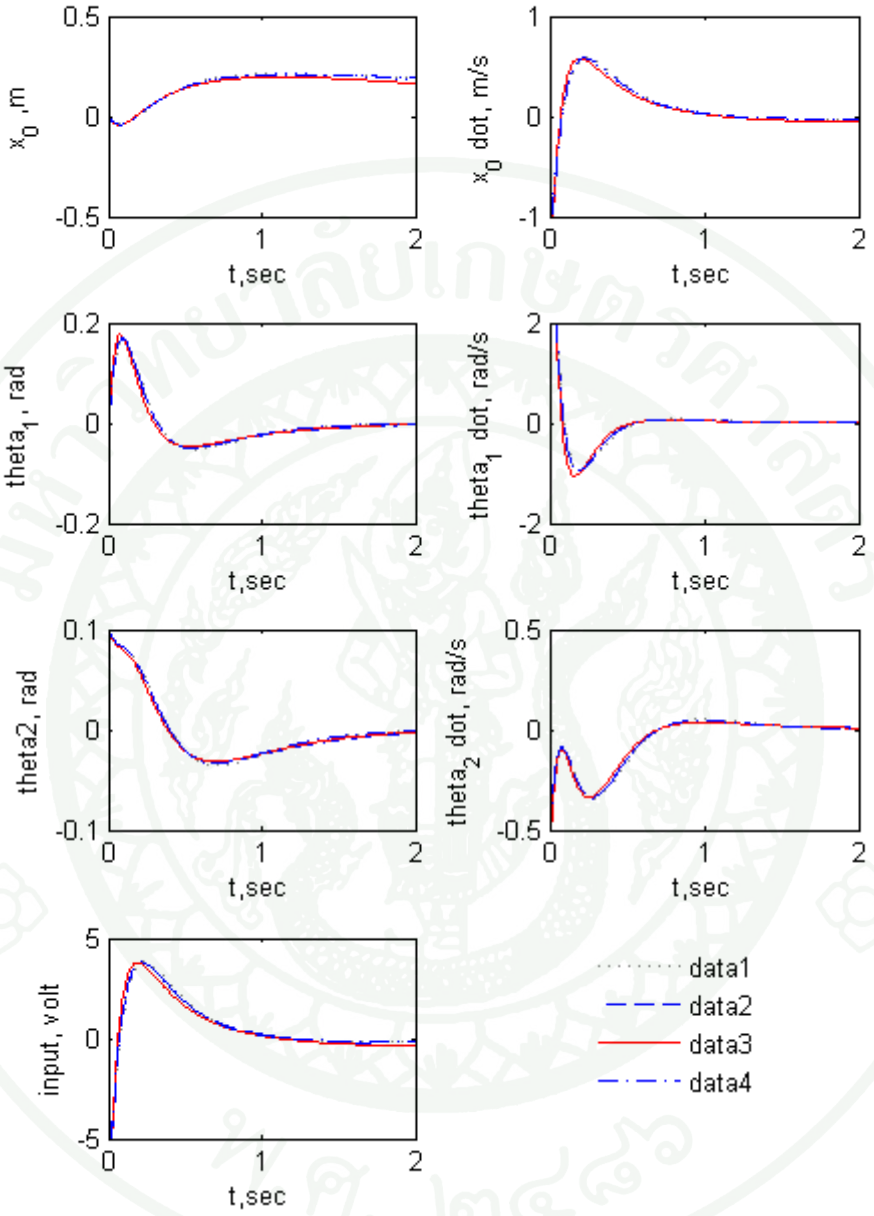
$$x=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0]^T$$

และเปรียบเทียบผลตอบสนองที่ได้จากค่าน้ำหนักต่างๆ

ตารางที่ 4 ค่าน้ำหนักและอัตราขยายที่ใช้ในการออกแบบ

	ค่าน้ำหนัก (Q, R)	อัตราขยาย
1	Q_1 = diag([1,1,1,1,1,1])	K = [1 0.79 -45.92 1.35 94.14 15.87]
	R_1 = 1	
2	Q_2 = diag([1000,100,70000,500,100000,10])	K = [3.16 3.14 -66.36 1.88 143.23 23.18]
	R_2 = 100	
3	Q_3 = diag([1000,100,70000,100,50000,10])	K = [3.16 2.93,-55.13,2.36,125.76,20.71]
	R_3 = 100	
4	Q_4 = diag([1000,100,70000,500,100000,10])	K = [1.0 0.72 -42.44 1.51 89.93 15.16]
	R_4 = 1000	

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



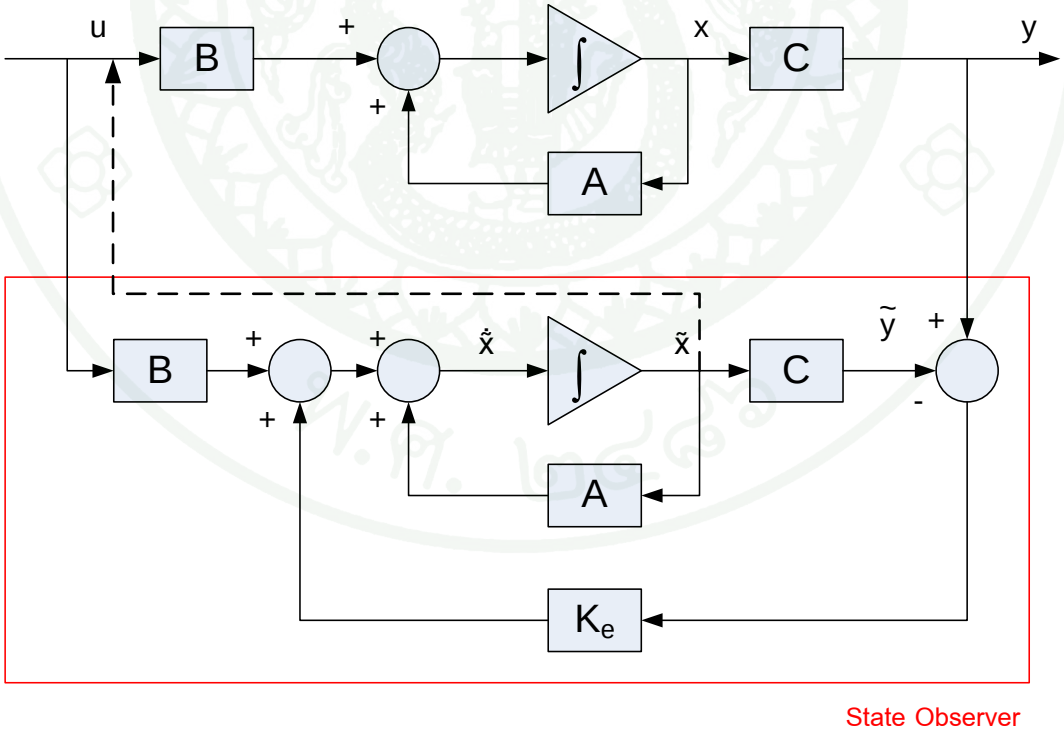
ภาพที่ 35 ผลการจำลองระบบด้วย MATLAB ที่ค่าน้ำหนัก Q, R ต่างๆ ตามตารางที่ 1

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2.4 การออกแบบตัวสังเกตสถานะ

ในการออกแบบระบบควบคุมโดยอาศัยการป้อนสถานะนั้น บางครั้งเราไม่สามารถที่จะวัดค่าสถานะที่จำเป็นได้ทั้งหมด เนื่องจากค่าสถานะบางอย่างไม่สามารถวัดได้โดยง่ายหรือต้องใช้อุปกรณ์ที่มีความซับซ้อน มีราคาแพง มาใช้ในการวัดค่าสัญญาณ จึงจำเป็นต้องใช้การประมาณค่าสถานะ(observation) มาช่วยในการออกแบบ โดยอาศัยอุปกรณ์ เช่น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ มาช่วยในการคำนวณเรียกว่า ตัวสังเกตสถานะ (state observer) หรือบางครั้งเรียกว่า ตัวประมาณสถานะ (state estimator)ในกรณีที่สถานะทุกสถานะที่มี ถูกประมาณโดยตัวสังเกตสถานะจะเรียกว่าตัวสังเกตสถานะอันดับเต็ม (full-order state observer) อย่างไรก็ตามในกรณีที่บางสถานะสามารถวัดได้จึงไม่จำเป็นต้องทำการประมาณค่าทุกสถานะเรียกว่าตัวสังเกตสถานะลดอันดับ (reduce-order observer) ในกรณีที่สถานะที่ถูกประมาณโดยตัวสังเกตสถานะน้อยที่สุดจะเรียกว่า ตัวสังเกตุสถานะอันดับต่ำสุด (minimum-order observer)

2.5 ตัวควบคุมค่ากำลังสองเชิงเส้นและตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม



ภาพที่ 36 บล็อกไดอะแกรมของระบบที่มีตัวสังเกตสถานะอันดับเต็ม

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ระบบถูกกำหนดด้วยสมการสถานะ คือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{21}$$

$$y = Cx \tag{22}$$

ตัวประมาณค่าสถานะระบบจะถูกจำลองระบบจริงโดย แบบจำลองคณิตศาสตร์ของตัวสังเกตจะเหมือนกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบ จะแตกต่างกันในส่วนของค่าความผิดพลาด โดยตัวสังเกตจะประมาณค่าจากเอาท์พุตจริงลบด้วยค่าประมาณเอาท์พุต ค่าประมาณที่ได้จากตัวสังเกตคือ

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e\left(y - C\tilde{x}\right)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \left(A - K_eC\right)\tilde{x} + Bu + K_ey \tag{23}$$

สมการความผิดพลาดของการสังเกต (observer error equation) ได้จากสมการ (21)-(23) คือ

$$\dot{\tilde{x}} - \dot{x} = A\tilde{x} - Ax - K_eC\tilde{x} + Bu + K_ey$$

$$\dot{\tilde{x}} - \dot{x} = \left(A - K_eC\right)\left(\tilde{x} - x\right) \tag{24}$$

แทนค่า $\tilde{x} - x$ ด้วยเวกเตอร์ความผิดพลาด e จาก (24) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{e} = \left(A - K_eC\right)e \tag{25}$$

ซึ่งถ้าเมทริกซ์ $\left(A - K_eC\right)$ มีเสถียรภาพซึ่งได้จากการหาค่าลักษณะเฉพาะ หมายความว่าเวกเตอร์ความผิดพลาดจะลู่เข้าสู่ค่าศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป ค่าลักษณะเฉพาะนี้ยังเป็นตัวกำหนดความเร็วในการลู่เข้าของเวกเตอร์ความผิดพลาด ซึ่งค่าลักษณะเฉพาะนี้สามารถกำหนดได้โดยอัตราขยาย K_e

จากสมการสถานะ (21) เมื่อระบบถูกควบคุมโดยอินพุทได้จากการสังเกต คือ

$$u = -K\tilde{x} \tag{26}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สมการสถานะของระบบ (21) เมื่อมีอินพุต (26) จะเขียนได้เป็น

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x}$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x})$$

หรือ

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe \tag{27}$$

จาก (27) และ (25) จึงเขียนเป็นเมทริกซ์รวมได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{28}$$

สมการ (28) อธิบายถึงลักษณะทางพลศาสตร์ของระบบป้อนกลับที่มีตัวสังเกตสถานะ โดยมีสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{vmatrix} = 0$$

หรือ

$$|sI - A + BK||sI - A + K_e C| = 0$$

ดังนั้นระบบป้อนกลับที่มีตัวสังเกตสามารถแยกปัญหาการออกแบบอัตราขยายของระบบออกจากการออกแบบอัตราขยายตัวสังเกตได้โดยไม่ขึ้นต่อกัน และระบบที่มีตัวสังเกตแบบอันดับเต็มสำหรับระบบที่มีอันดับเท่ากับ n ก็จะมีตัวสังเกตที่มีอันดับเท่ากับ n เช่นกัน นั้นคือสมการสถานะ (28) จะมีอันดับเท่ากับ 2n

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของตัวสังเกตจะเหมือนกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบจะแตกต่างกันในส่วนของค่าความผิดพลาดโดยตัวสังเกตจะประมาณค่าจากเอาท์พุตจริงลบด้วยค่าประมาณเอาท์พุต ค่าประมาณที่ได้จากตัวสังเกตคือ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e\left(y - C\tilde{x}\right) = \left(A - K_eC\right)\tilde{x} + Bu + K_ey \tag{29}$$

โดยที่ $\tilde{x}$ คือค่าประมาณเสตต, $C\tilde{x}$ คือค่าประมาณเอาท์พุต โดยที่มีเอาท์พุทของระบบ y และสัญญาณควบคุม u เป็นอินพุตของตัวสังเกต และมี K_e เป็นอัตราขยายของตัวสังเกตซึ่งเป็นค่าน้ำหนักสำหรับการปรับปรุงค่าความผิดพลาดระหว่างค่าเอาท์พุตจริงและค่าเอาท์พุตจากการประมาณ

คุณสมบัติทวิภาค (duality)

กำหนดให้

$$\dot{z} = A^Tz + C^Tv$$

และ

$$n = B^Tz$$

ระบบดังกล่าวเรียกว่า dual system และกำหนดให้มีคุณสมบัติการสามารถควบคุมได้ดังนั้น อัตราขยาย K สามารถหาได้จากวิธีการวางโพล $A^T - C^TK$ ให้มีค่าลู่เข้า ค่าลักษณะเฉพาะของ $A^T - C^TK$ และ $A^T - K^TC$ จะมีค่าเท่ากัน

$$\left|SI - \left(A^T - C^TK\right)\right| = \left|SI - \left(A^T - K^TC\right)\right| \tag{30}$$

จากสมการ (30) และ (29) จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$K_e = K^T$$

ดังนั้นจากความมีคุณสมบัติ duality สามารถหาอัตราขยายตัวสังเกต K_e ได้จากการหาอัตราขยาย K ซึ่งสามารถหาได้จากวิธีการวางโพล ซึ่งการออกแบบตัวสังเกตอันดับเต็มจากสมการ

$$\dot{z} = \left(A^T - C^TK_e^T\right)z \tag{31}$$

ดังนั้นจะได้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\left|sI-\left(A^T-C^T K_e^T\right)\right|=0$$

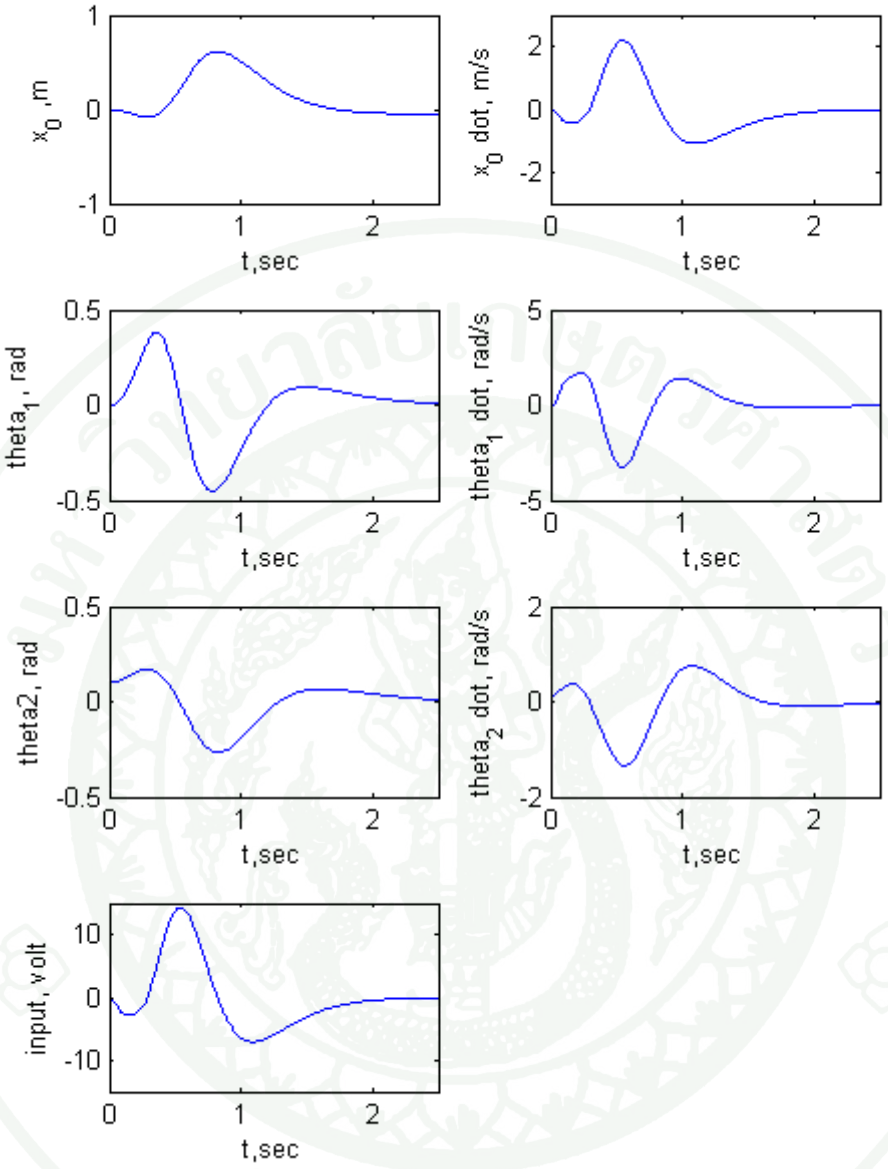
จากการออกแบบโดยให้ค่าอัตราขยาย

$K=\begin{bmatrix}1 & 0.79 & -45.92 & 1.35 & 94.14 & 15.87\end{bmatrix}$ ได้ค่าลักษณะเฉพาะคือ -197.83, -9.39+2.3i, -9.39-2.3i, -3.8+6.3i, -3.8-6.3i, -0.15

ทำการเลือกค่าโพลของตัวสังเกตที่ –10, -11, -12, -13, -14 และ -15 อัตราขยายที่ได้จากการคำนวณคือ

$$K_e=\begin{bmatrix}-90 & 17960 & -7980 & -195370 & 24730 & 191000\end{bmatrix}^T$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

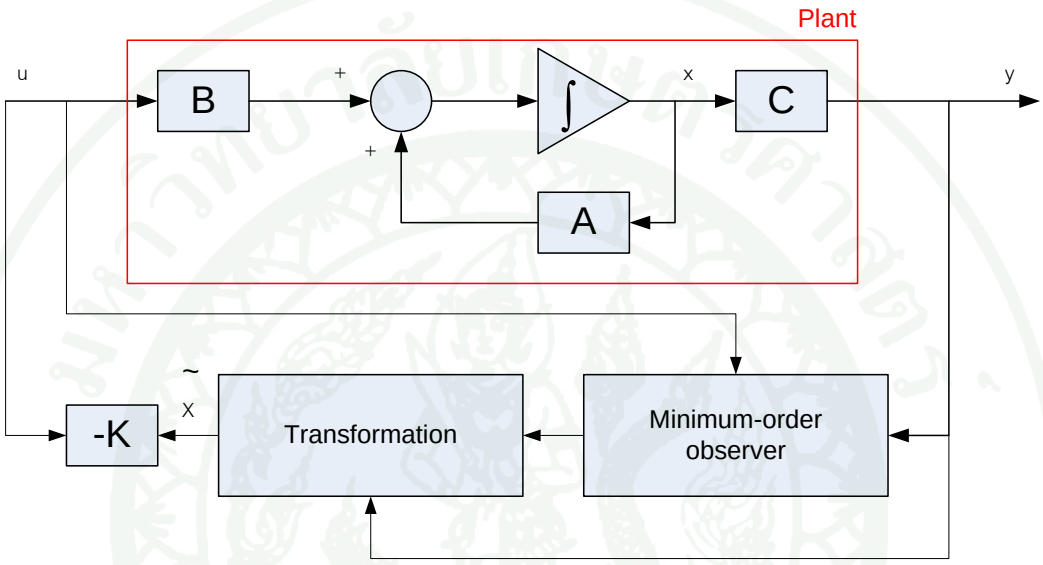


ภาพที่ 37 การจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวสังเกตอันดับเต็ม

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2.6 ตัวควบคุมค่ากำลังสองเชิงเส้นและตัวสังเกตแบบลดอันดับ

เนื่องจากสถานะบางสถานะสามารถวัดได้ด้วยอุปกรณ์ตรวจรู้ คือ มุมของก้านลูกตุ้มทั้งสอง ซึ่งมีความแม่นยำสูงจึงไม่มีความจำเป็นต้องทำการประมาณค่า ส่วนสถานะอื่นๆที่ยังไม่มีความแม่นยำสามารถหาค่าได้จากการประมาณด้วยตัวสังเกต



ภาพที่ 38 บล็อกไดอะแกรมของระบบที่มีตัวสังเกตสถานะลดอันดับ

อย่างไรก็ตามการใช้สัญญาณที่ได้จากการวัดมาใช้ในการคำนวณสัญญาณควบคุมอาจจะไม่ได้ผลตอบสนองที่ดีเสมอไป เนื่องจากในบางครั้งสัญญาณที่วัดได้อาจจะมีสัญญาณรบกวนต่างๆ (noise) ทำให้เกิดความผิดพลาดได้ จึงอาจจะต้องพิจารณาระหว่างสัญญาณรบกวนและความแม่นยำของสัญญาณเอาท์พุทในการออกแบบ

เช่นเดียวกับในกรณีของตัวสังเกตอันดับเต็ม การประมาณค่าสถานะที่ได้มาจากค่าอินพุทและค่าเอาท์พุท ระบบจำเป็นต้องมีคุณสมบัติการควบคุมได้และคุณสมบัติการสังเกตได้ โดยระบบคือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{32}$$

และ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$y = Cx \tag{33}$$

เมื่อสถนะของระบบแบ่งได้เป็นสองส่วน คือ ส่วนที่วัดได้แทนด้วย x_a ซึ่งจะมีค่าเท่ากับสัญญาณขาออก y และ สวนที่วัดไม่ได้แทนด้วย x_b สมการสถานะและสมการเอาท์พุตสามารถเขียนรวมกันได้คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \cdots \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \vdots & A_{ab} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{ba} & \vdots & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \cdots \\ B_b \end{bmatrix} u \tag{34}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ x_b \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ คือ

$$x_a = \begin{bmatrix} x_0 \end{bmatrix}$$

$$x_b = \begin{bmatrix} \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T$$

จากสมการ (34) ได้

$$\dot{x}_a = A_{aa} x_a + A_{ab} x_b + B_a u \tag{35}$$

$$\dot{x}_a - A_{aa} x_a = A_{ab} x_b + B_a u \tag{36}$$

ซึ่ง จากสมการ (36) จะเห็นว่าฝั่งซ้ายจะเป็นปริมาณที่สามารถวัดค่าได้จากเอาท์พุต ซึ่งสามารถทราบค่าได้ ส่วนฝั่งขวาจะเป็นปริมาณที่ไม่ทราบค่า

และจาก (34) จะได้ความสัมพันธ์อีกสมการหนึ่งคือ

$$\dot{x}_b = A_{ba} x_a + A_{bb} x_b + B_b u \tag{37}$$

จะเห็นว่า $A_{ba} x_a$ และ $B_b u$ คือส่วนที่วัดค่าได้ ดังนั้นสมการสถานะสำหรับตัวสังเกตอันดับต่ำสุดคือ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + A_{ba}x_a + B_b u$$

และสมการเอาท์พุตสำหรับตัวสังเกตอันดับต่ำสุดคือ

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = A_{ab}x_b$$

เปรียบเทียบค่าในลักษณะเดียวกับการออกแบบตัวสังเกตอันดับเต็ม ได้ค่าต่างๆตามตารางที่ 4 จากสมการ (23) เขียนในรูปของตัวสังเกตอันดับต่ำสุดได้เป็น

$$\dot{\tilde{x}}_b = \left(A_{bb}x_b + K_e A_{ab}\right)\tilde{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + K_e\left(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u\right) \quad (38)$$

ตารางที่ 5 เปรียบเทียบตัวแปรระหว่างตัวสังเกตอันดับเต็มและตัวสังเกตลดอันดับ

ตัวสังเกตอันดับเต็ม	ตัวสังเกตลดอันดับ
$\tilde{x}$	$\tilde{x}_b$
A	A_{bb}
Bu	$A_{ba}x_a + B_b u$
y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
C	A_{ab}
K_e	K_e

เมื่อ K_e คืออัตราขยายสำหรับตัวสังเกต จากสมการ (38) ทำการจัดเรียงใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_b - K_e\dot{x}_a &= \left(A_{bb}x_b + K_e A_{ab}\right)\tilde{x}_b + \left(A_{ba}x_a - K_e A_{aa}\right)x_a + \left(B_b - K_e B_a\right)u \\ &= \left(A_{bb}x_b + K_e A_{ab}\right)\left(\tilde{x}_b - K_e x_a\right) \\ &\quad + \left[\left(A_{bb} - K_e A_{ab}\right)K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}\right]x_a + \left(B_b - K_e B_a\right)u\end{aligned}$$

$x_a = y$ ดังนั้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_b - K_e\dot{x}_a &= \left(A_{bb}x_b + K_eA_{ab}\right)\left(\tilde{x}_b - K_ex_a\right) \\ &\quad + \left[\left(A_{bb} - K_eA_{ab}\right)K_e + A_{ba} - K_eA_{aa}\right]y + \left(B_b - K_eB_a\right)u\end{aligned} \tag{39}$$

แทนค่า $\eta = x_b - K_ey = x_b - K_ex_a$ และ $\tilde{\eta} = \tilde{x}_b - K_ey = \tilde{x}_b - K_ex_a$ สมการ (39) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{\tilde{\eta}} = \left(A_{bb}x_b + K_eA_{ab}\right)\tilde{\eta} + \left[\left(A_{bb} - K_eA_{ab}\right)K_e + A_{ba} - K_eA_{aa}\right]y + \left(B_b - K_eB_a\right)u \tag{40}$$

กำหนดให้

$$\hat{A} = A_{bb} - K_eA_{ab}$$

$$\hat{B} = \hat{A}K_e + A_{ba} - K_eA_{aa}$$

$$\hat{F} = B_b - K_eB_a$$

สมการ (40) จะเขียนได้เป็น

$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{A}\tilde{\eta} + \hat{B}y + \hat{F}u \tag{41}$$

จาก

$$y = \begin{bmatrix}1 & \vdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a \\ \cdots \\ x_b\end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix}x_a \\ \cdots \\ \tilde{x}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y \\ \cdots \\ \tilde{x}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0_m \\ \cdots \\ I_{n-m}\end{bmatrix}\left[\tilde{x}_b - K_ey\right] + \begin{bmatrix}I \\ \cdots \\ K_e\end{bmatrix}y \tag{42}$$

เมื่อ 0_m คือเวกเตอร์แถวมีค่าเป็นศูนย์ ถ้ากำหนดให้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

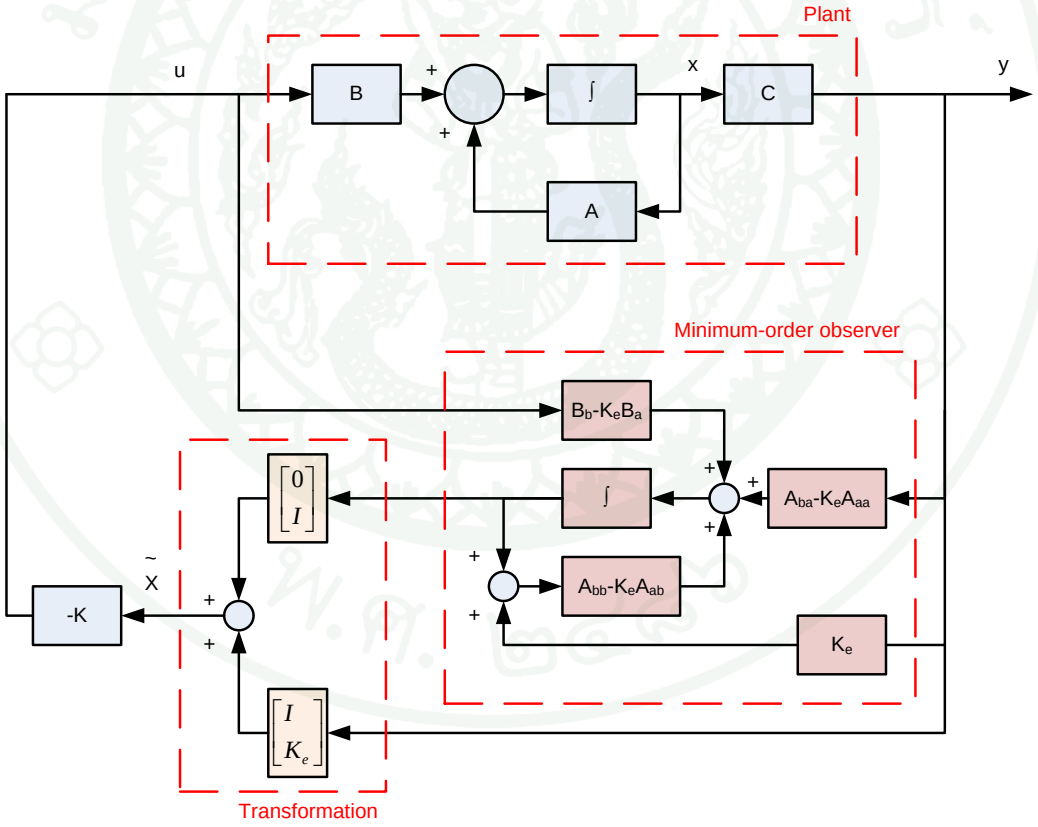
$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0_m \\ \cdots \\ I_{n-m} \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ K_e \end{bmatrix}$$

สามารถเขียน $\tilde{x}$ ในรูปของ $\tilde{\eta}$ และ y ได้เป็น

$$\tilde{x} = \hat{C}\tilde{\eta} + \hat{D}y \tag{43}$$

ซึ่งเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร $\tilde{x}$ และ $\tilde{\eta}$

สมการ (32), (33), (41), (43) และ $u = -K\tilde{x}$ สามารถอธิบายได้ด้วยบล็อกไดอะแกรม ดัง ภาพที่ 39



ภาพที่ 39 ระบบป้อนกลับที่มีตัวสังเกตสถานะลดอันดับ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สมการความผิดพลาดจากการสังเกต โดยจากสมการ (36) และ (38) เขียนได้เป็น

$$\dot{\tilde{x}}_b = \left(A_{bb} + K_e A_{ab}\right)\tilde{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + K_e A_{ab} x_b \tag{44}$$

(37) - (44)

$$\dot{x}_b - \dot{\tilde{x}}_b = \left(A_{bb} - K_e A_{ab}\right)\left(x_b - \tilde{x}_b\right) \tag{45}$$

ให้ $e = x_b - \tilde{x}_b$ จาก (45) เขียนได้เป็น

$$\dot{e} = \left(A_{bb} - K_e A_{ab}\right)e \tag{46}$$

จากการแทนค่า $u = -K\tilde{x}$ ในสมการสถานะ ได้

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x} = Ax - BK\begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}$$

$$= Ax - BK\begin{bmatrix} x_a \\ x_b - e \end{bmatrix}$$

$$= Ax - BK\left\{x - \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}\right\}$$

$$\dot{x} = Ax - B\begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \tag{47}$$

เมื่อรวม (47) และ (46) จึงเขียนเป็นเมทริกซ์ใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_b \\ 0 & A_{bb} - K_e A_{ab} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \tag{48}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จาก

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -167.4207 & -4.7217 & 0.0039 & 0.3396 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 660.1577 & 90.9399 & -0.0755 & -34.9756 & 0.0158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -71.2247 & -52.4634 & 0.0436 & 46.4257 & -0.0210 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 25.6674 \\ 0 \\ -101.2092 \\ 0 \\ 10.9195 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

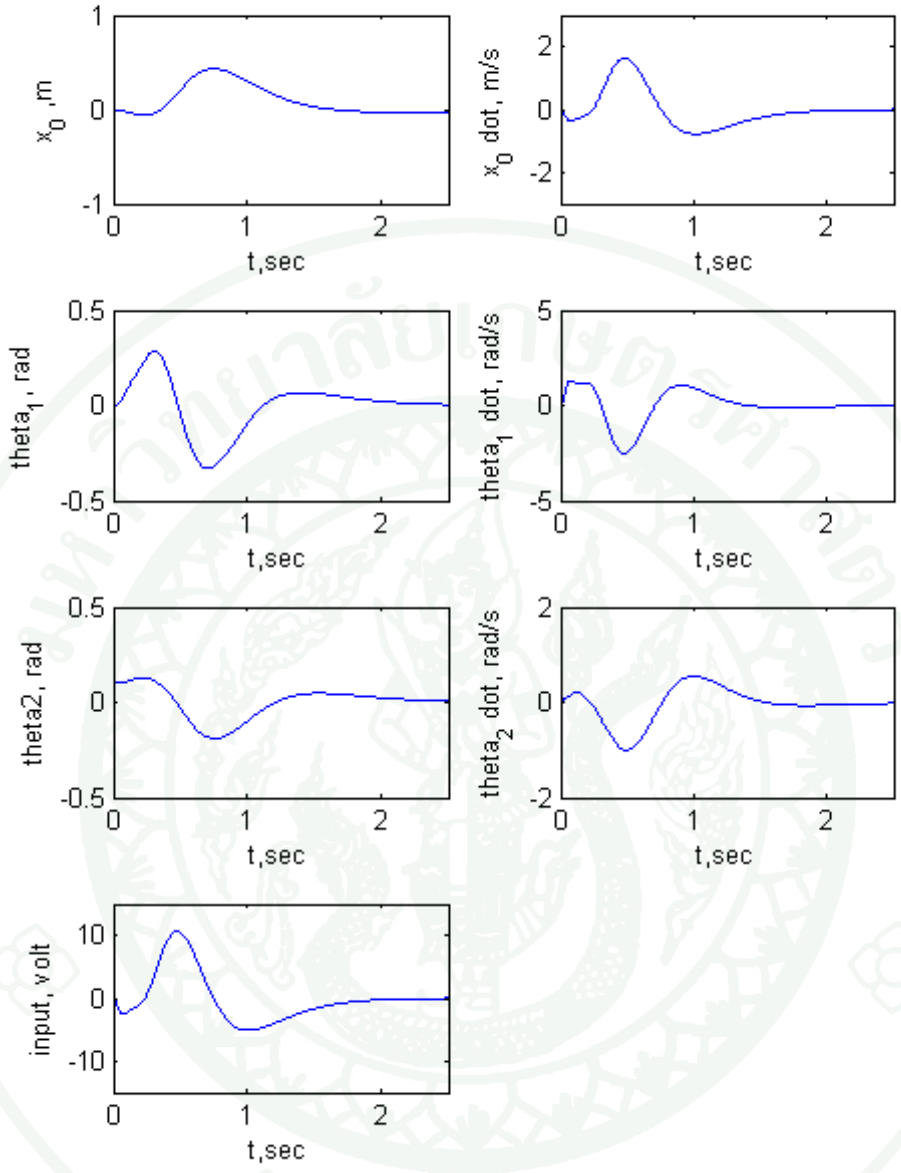
$$\tilde{x}=\begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{bmatrix}$$

จากการออกแบบโดยให้ค่าอัตราขยาย

$K=\begin{bmatrix} 3.16 & 2.50 & -50 & -47.27 & 1.97 & 105.34 & 17.70 \end{bmatrix}$ เลือกค่าโพลของตัวสังเกตที่ตำแหน่ง -10, -11, -12, -13 และ -14 ได้อัตราขยายตัวสังเกตคือ

$$K_e=\begin{bmatrix} -107.5 & -255.2 & -4154.8 & 1123.5 & 7875.5 \end{bmatrix}^T$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

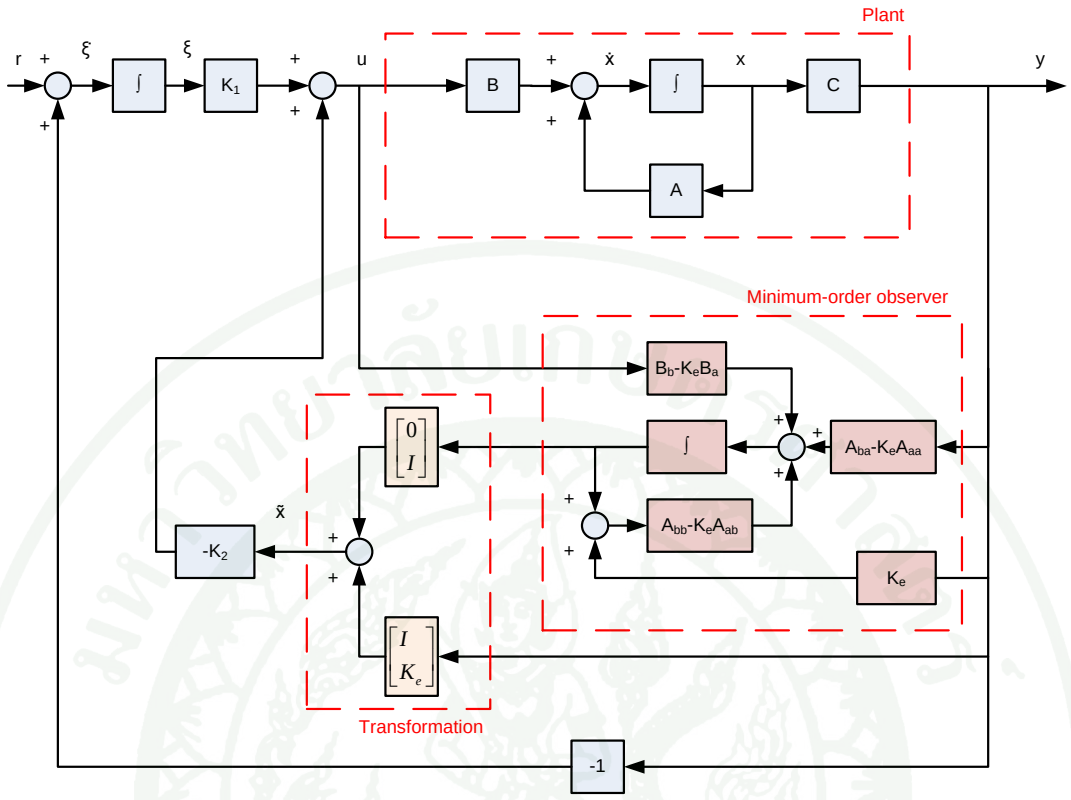


ภาพที่ 40 การจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวสังเกต ลดอันดับ

2.7 ตัวควบคุมค่ากำลังสองเชิงเส้นและตัวสังเกตลดอันดับที่มีตัวอินทิกรัล

การออกแบบระบบที่แพลนท์ไม่มีตัวอินทิกรัล (type 0 plant) มักจะทำการเพิ่มตัวอินทิกรัลในวงรอบเปิดระหว่างค่าผิดพลาดและพลานต์ การเพิ่มตัวอินทิกรัลเข้าไปในสามารถทำให้ค่าผิดพลาด ในสถานะอยู่ตัวมีค่าเป็นศูนย์เข้าสู่ค่าอ้างอิง ในส่วนนี้นำตัวควบคุมที่มีตัวอินทิกรัลมาใช้กับการป้อนกลับสถานะของระบบลูกตุ้มหัวกลับ ดังแสดงในภาพที่ 41

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 41 บล็อกไดอะแกรมของระบบที่มีตัวสังเกตสถานะลดอันดับและมีตัวอินทิกรัล

เมื่อระบบคือ

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

และสมการเอาท์พุท

$$y = Cx$$

จากภาพที่ 41 ได้

$$\dot{\xi} = r - y = r - x_a \tag{49}$$

สำหรับระบบรักษาเสถียรภาพ $r = 0$ ดังนั้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\dot{\xi} = -x_a \tag{50}$$

ให้

$$u = -K_2\tilde{x} + K_1\xi \tag{51}$$

ดังนั้น

$$\dot{x} = Ax - BK_2\tilde{x} + BK_1\xi \tag{52}$$

$$\dot{x} = \left(A - BK_2\right)x + BK_2\left(x - \tilde{x}\right) + BK_1\xi \tag{53}$$

จาก

$$x - \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ x_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ x_b - \tilde{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ I \end{bmatrix} e = Fe \tag{54}$$

จากสมการ (54) สมการ (53) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$\dot{x} = \left(A - BK_2\right)x + BK_2Fe + BK_1\xi \tag{55}$$

เมื่อ $F = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ I \end{bmatrix}$ จาก (46) คือ

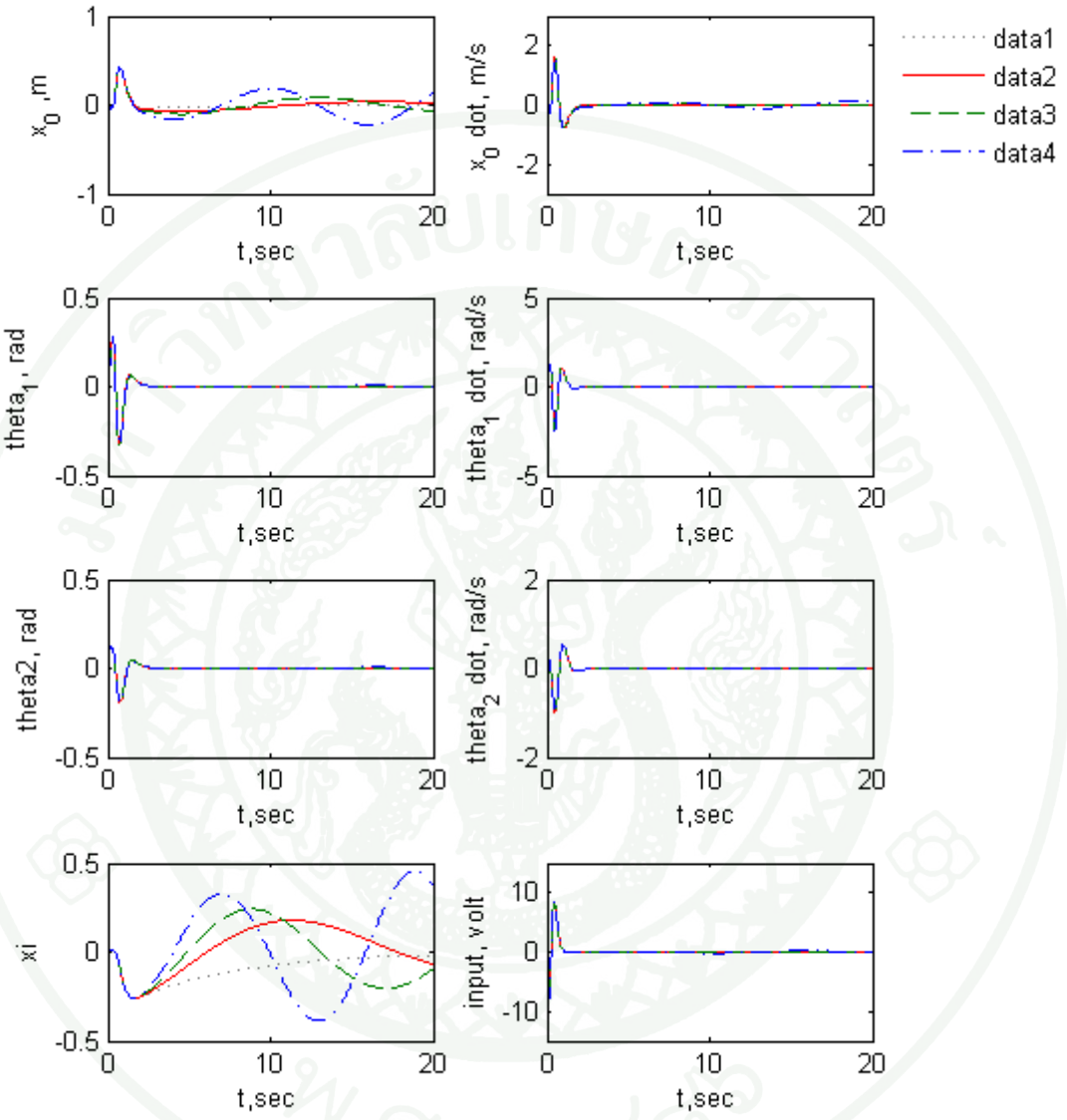
$$\dot{e} = \left(A_{bb} - K_eA_{ab}\right)e \tag{56}$$

(55), (56) และ (49) เขียนรวมได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_2 & BK_2F & BK_1 \\ 0 & A_{bb} - K_eA_{ab} & 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ \xi \end{bmatrix} \tag{57}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากสมการ (57) ได้เมทริกซ์สถานะที่มีขนาด 12x12 ในการจำลองระบบต่อสถานะเริ่มต้นจะเลือกค่า $K_1 = 0,\ 0.5,\ 1,\ 2$



ภาพที่ 42 การจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวสังเกต ลดอันดับที่มีตัวอินทิกรัล

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. การจำลองระบบ

การจำลองระบบ (simulation) จะกระทำบนซอฟท์แวร์ MATLAB โดยอาศัยสมการทางคณิตศาสตร์และค่าตัวแปรต่างๆจากที่ได้หาไว้ข้างต้น โดยทำการหาผลตอบสนองต่อฟังก์ชั่นต่างๆ

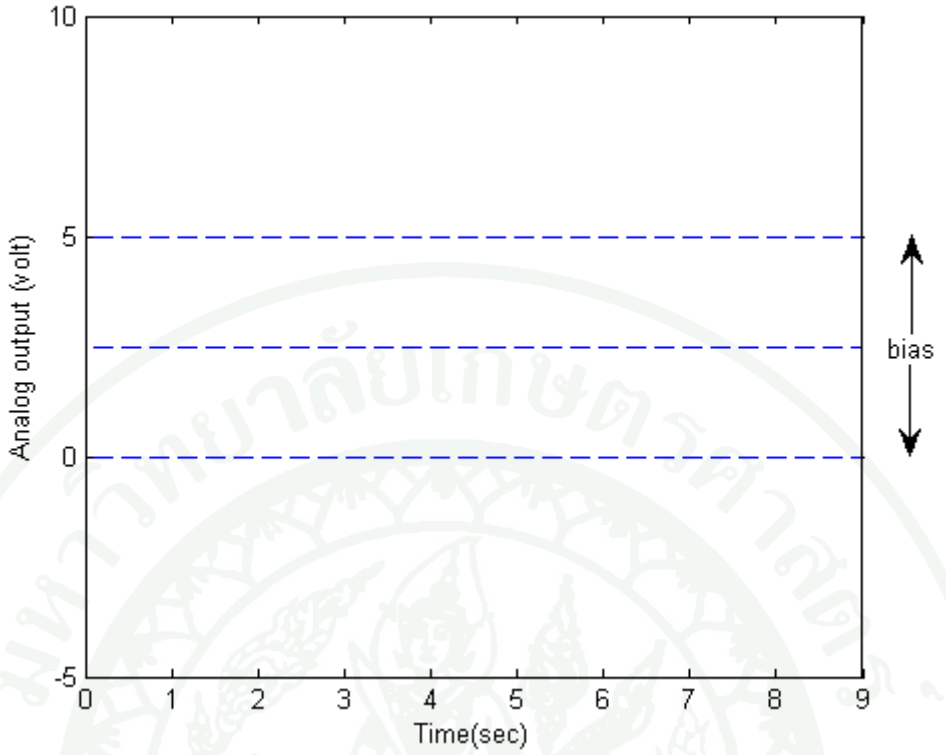
4. การทำตัวควบคุมไปทดสอบกับระบบจริง

ในการทดสอบระบบจริงจะทำการเขียนโปรแกรมการควบคุมด้วยโปรแกรม LabVIEW ทำการควบคุมด้วยระบบ real time ผ่านระบบปฏิบัติการ LabVIEW Real-time โดยทำการรับค่าอินพุทจาก rotary encoder เข้ามาคำนวณและส่งสัญญาณเอาท์พุทออกไปควบคุม โดยอาศัยอุปกรณ์ DAQ เป็นตัวรับ-ส่งค่าระหว่าง rotary encoder และ target computer

เนื่องจากในส่วนอุปกรณ์ DAQ สามารถสร้างสัญญาณอนาล็อกเอาท์พุท ได้ที่ขอบเขต 0 ถึง 5 โวลท์ รวมถึงในส่วนของอุปกรณ์ขยายสัญญาณเพื่อใช้ในการขับมอเตอร์รองรับสัญญาณ 0 ถึง 2.5 โวลท์สำหรับการหมุนทวนเข็มนาฬิกา และ 2.5 ถึง 5 โวลท์ สำหรับการหมุนตามเข็มนาฬิกา ทำให้สัญญาณที่เกิดจากการออกแบบจำเป็นที่จะต้องอยู่ในขอบเขตจำกัดนั้น ซึ่งหากมีการสร้างสัญญาณเกินขอบเขตจะทำให้การควบคุมผิดพลาดได้

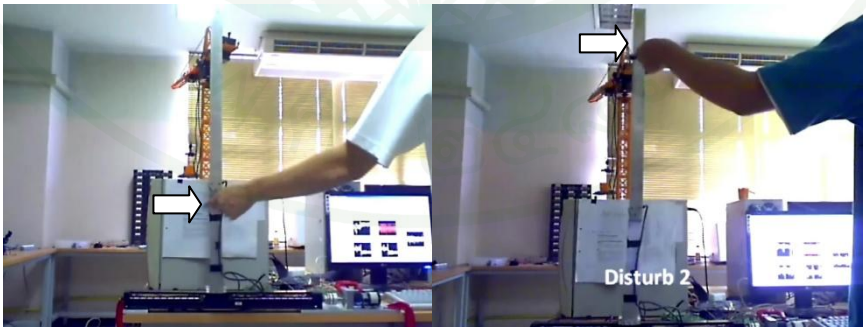
ในที่นี้ค่าสถานะการเคลื่อนที่ของรถและก้านลูกตุ้มได้จากการวัดด้วย rotary encoder ส่วนความเร็วของรถและความเร็วเชิงมุมของลูกตุ้มได้จากกระบวนการ finite different จากสัญญาณการเคลื่อนที่ ดังนั้นสัญญาณป้อนกลับในที่นี้จึงเป็นแบบ full-state feedback

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 43 ขอบเขตการทำงานของอุปกรณ์ขยายสัญญาณ (amplifier)

การทดลองจะทำการควบคุมระบบที่ระยะเวลาหนึ่ง โดยจะทำการบกวนระบบด้วยการเคาะที่ตำแหน่งต่างๆของลูกตุ้ม เพื่อแสดงว่าลูกตุ้มหัวกลับสามารถทนต่อการรบกวนภายนอกได้ โดยยังสามารถรักษาตำแหน่งอ้างอิงเอาไว้ได้



ภาพที่ 44 การรบกวนลูกตุ้มที่ตำแหน่งต่างๆ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

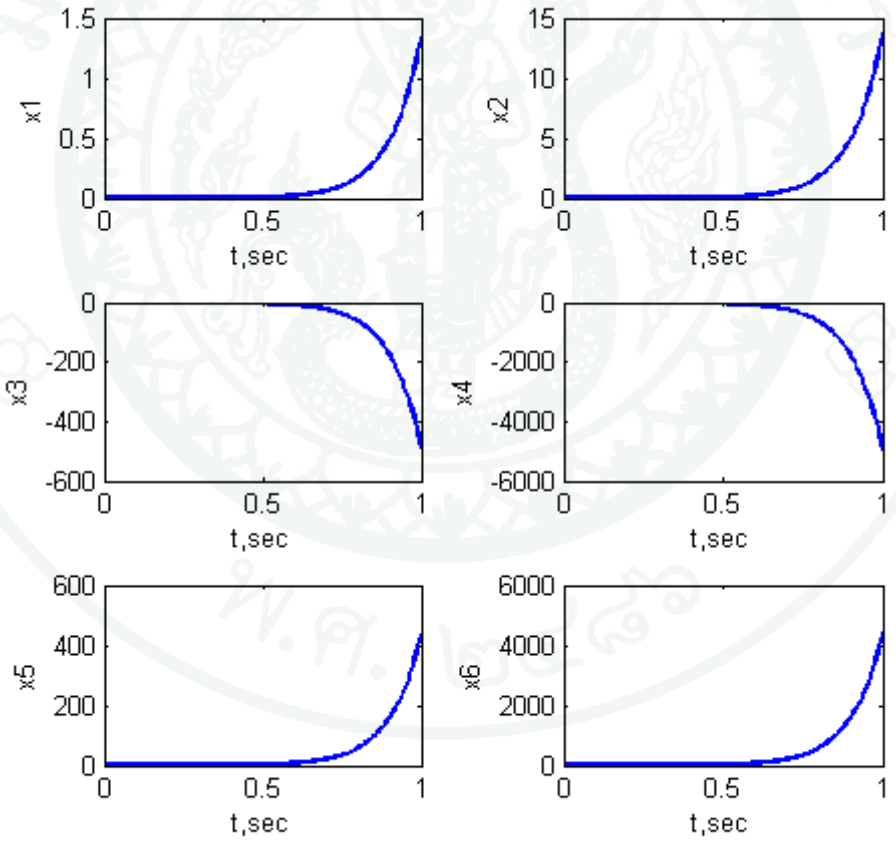
ผลและวิจารณ์

ผล

ผลการทดลองประกอบด้วยสองส่วนคือ ผลที่ได้จากการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB และ ผลการทดลองจากระบบจริงที่ได้จัดทำขึ้น

ผลการจำลองด้วยโปรแกรม Matlab

ในกรณีที่ระบบลูกตุ้มหัวกลับไม่ได้รับการควบบคุม สถานะต่างๆของระบบจะลู่ออกตามลักษณะของระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ ซึ่งมีลักษณะผลตอบสนองดังภาพที่ 45



ภาพที่ 45 ผลตอบสนองของระบบเมื่อไม่มีสัญญาณควบคุม โดยมีค่าเริ่มต้น x5 = 0.1 เรเดียน

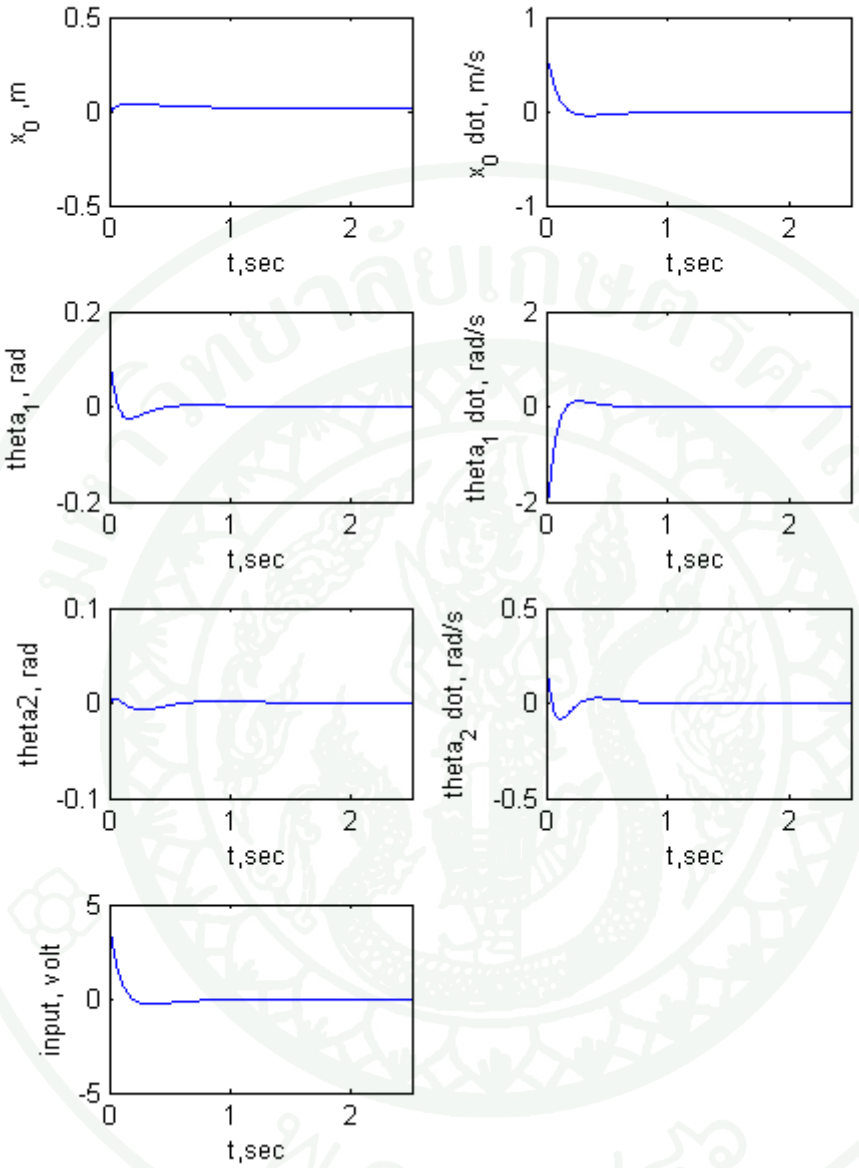
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากการออกแบบระบบด้วยวิธีการควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น จากสมการสมรรถนะโดยกำหนดค่าน้ำหนัก Q=diag[(1000,100,70000,500,100000,10])], R=100 ซึ่งสามารถหาค่าอัตราขยายได้คือ

$$K = \begin{bmatrix} 3.16 & 3.14 & -66.36 & 1.88 & 143.23 & 23.18 \end{bmatrix}$$

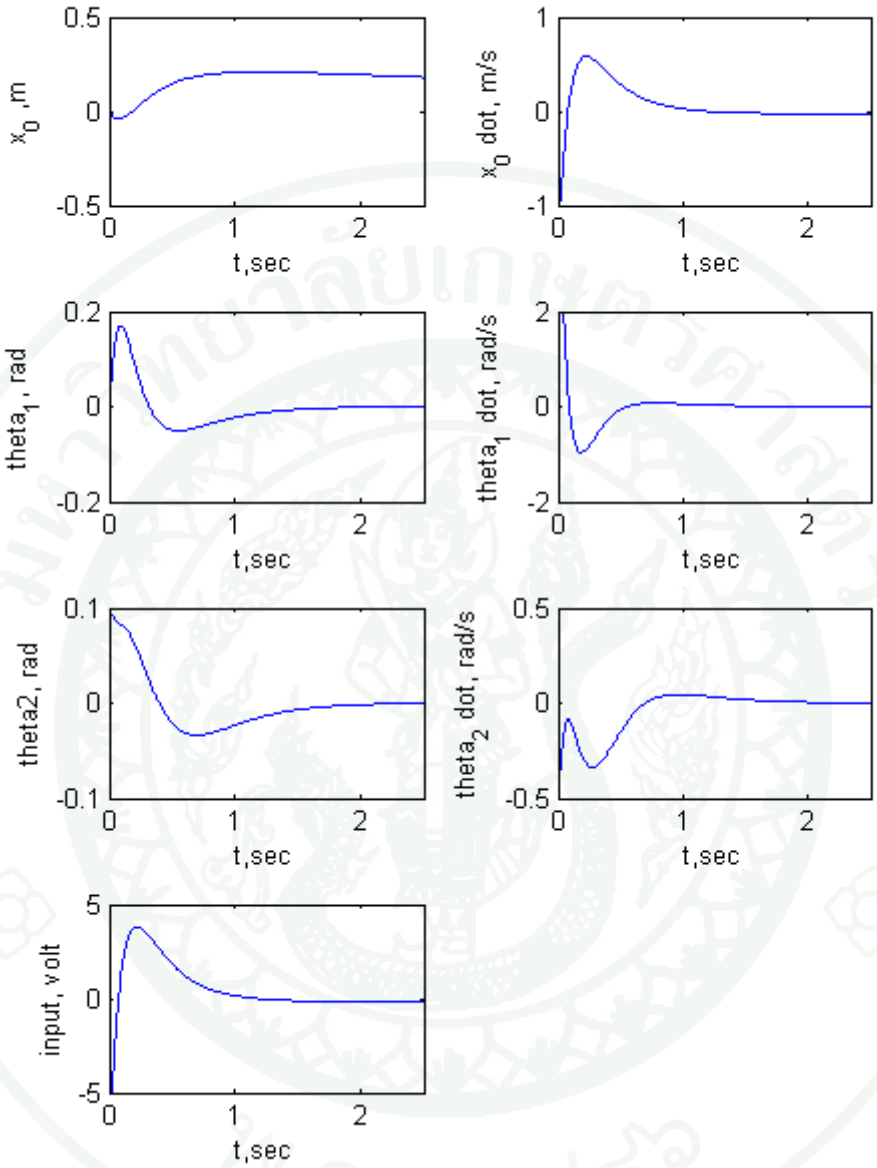
เมื่อนำค่าอัตราขยายดังกล่าวนำไปใช้ในการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน โดยผลตอบสนองจากค่าสถานะเริ่มต้นต่างคือ $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ได้ผลดังภาพที่ 46 $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$ ได้ผลดังภาพที่ 47 และ $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$ ได้ผลดังภาพที่ 48 พบว่าจากการรักษาเสถียรภาพของระบบ สถานะต่างๆของระบบสามารถลู่เข้าสู่ตำแหน่งศูนย์ หรือจุดสมดุลได้ ทั้ง 3 ผลตอบสนอง โดย x_0 มีการการเคลื่อนที่เข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิงอย่างช้าๆ ส่วนตำแหน่งของลูกตุ้มเข้าสู่จุดสมดุลได้รวดเร็วที่เวลาประมาณ 2 วินาที

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



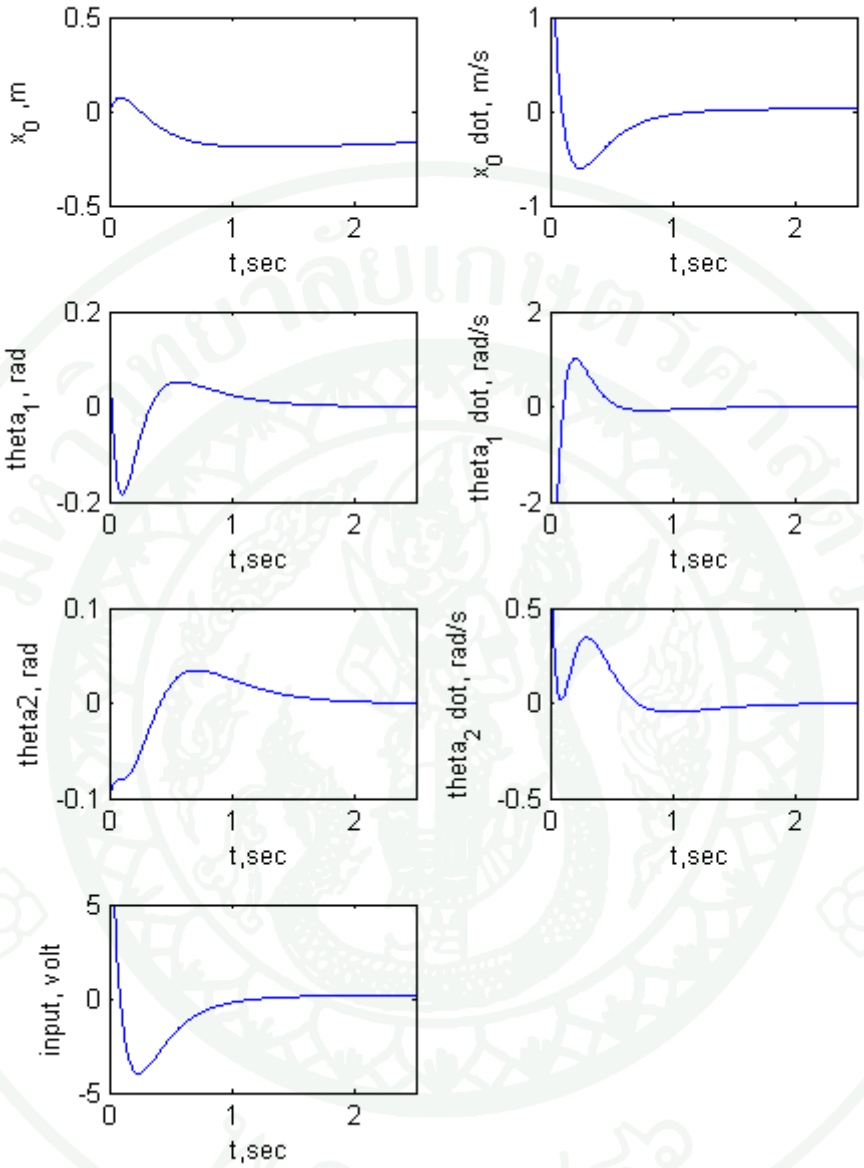
ภาพที่ 46 ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าตำแหน่งเริ่มต้นที่ x3 = 0.1 เรเดียน)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 47 ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าตำแหน่งเริ่มต้นที่ x5 = 0.1 เรเดียน)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

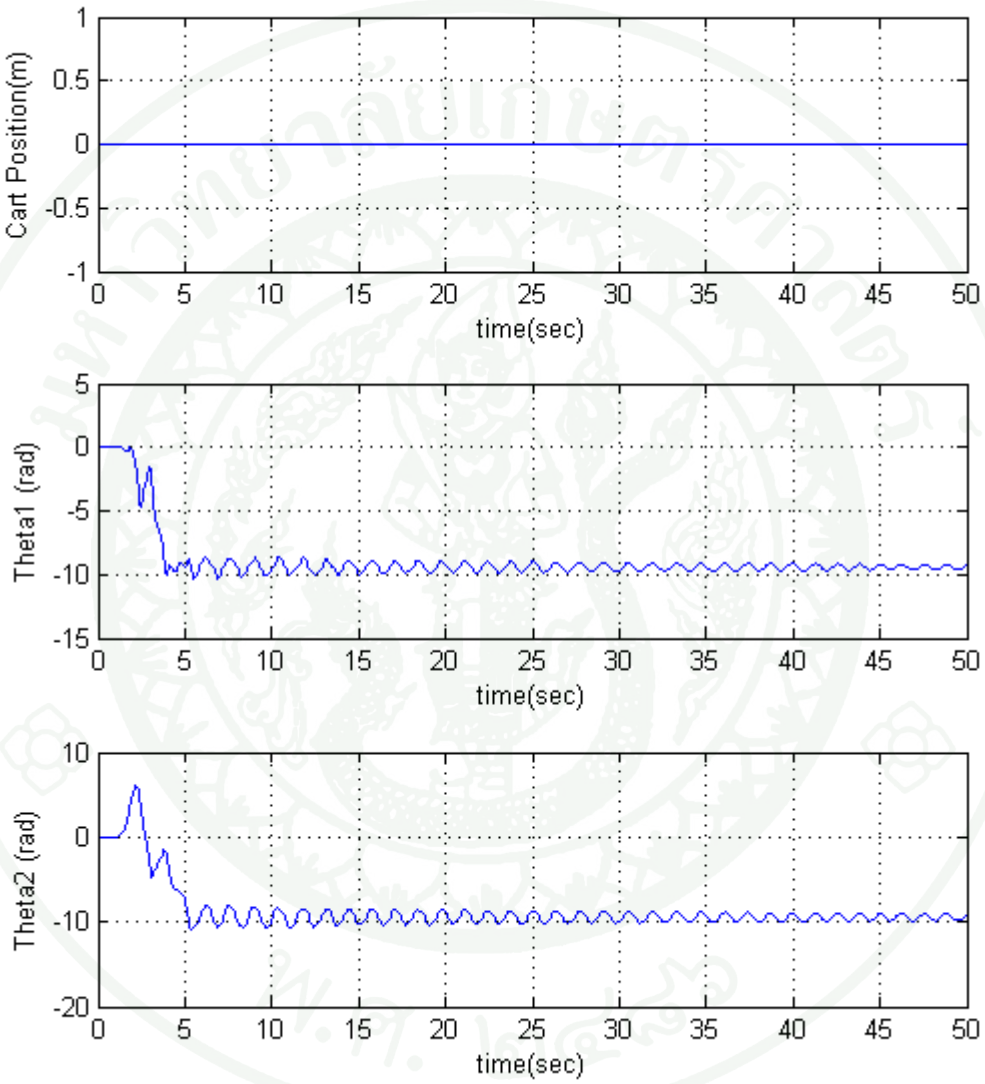


ภาพที่ 48 ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าตำแหน่งเริ่มต้นที่ x3 = 0.1 เรเดียน, x5 = -0.1 เรเดียน)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ผลการทดลองจากระบบจริง

ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพที่จุดสมดุลบนดังแสดงได้ดังภาพที่ 49 เมื่อระบบไม่มีสัญญาณก้านลูกตุ้มจะแกว่งไปยังจุดสมดุลล่าง



ภาพที่ 49 ระบบเมื่อไม่มีการควบคุม

ภาพที่ 50 เป็นการทดสอบการรักษาเสถียรภาพของระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนโดยการใช้ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบด้วยวิธีการคุมค่ากำลังสองเชิงเส้นเมื่อค่าน้ำหนักที่เลือก คือ Q_1 และ R_1 พบว่าระบบสามารถรักษาตำแหน่งของลูกตุ้มได้ที่ระยะเวลาหนึ่ง อย่างไรก็ตามตำแหน่ง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

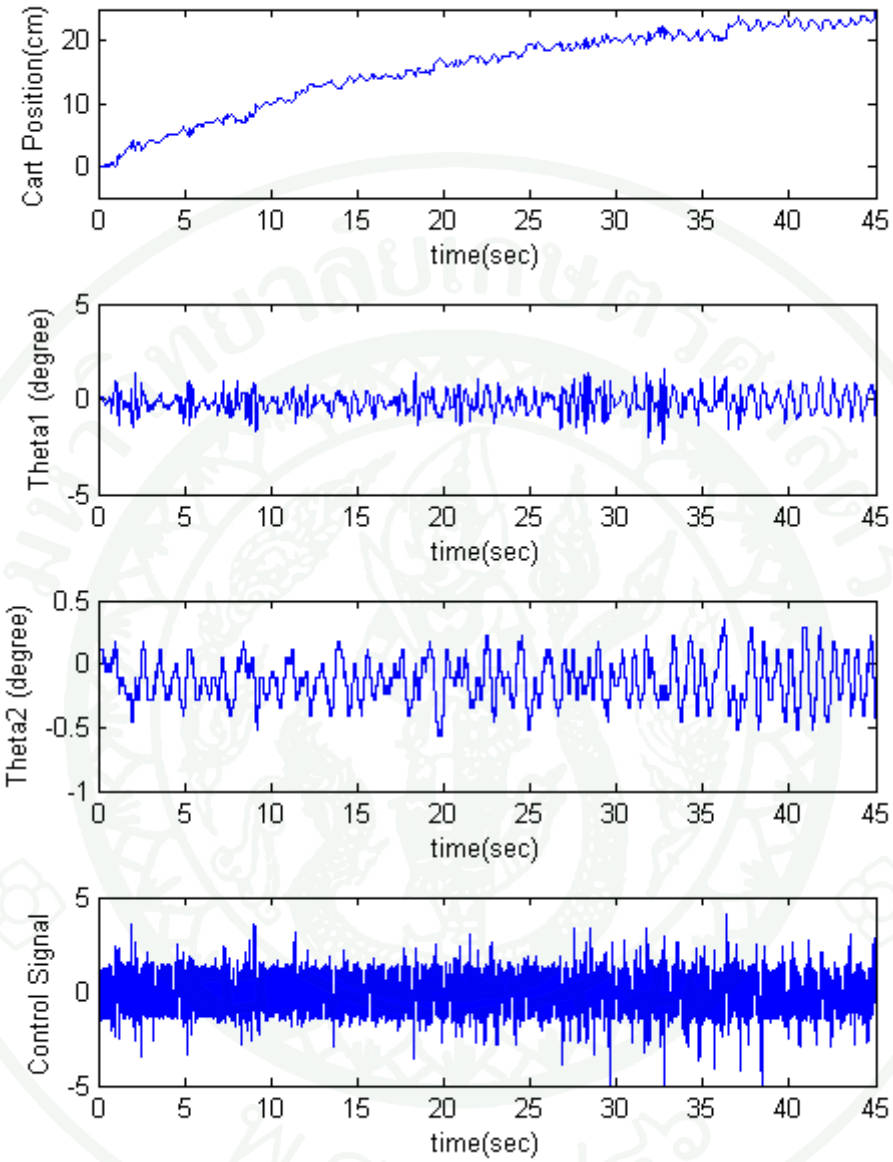
ของรถยังไม่สามารถควบคุมได้ดีนักเนื่องจากตำแหน่งของรถเคลื่อนที่เกินขอบเขตที่ monocarier จะสามารถรองรับได้ ทำให้ไม่สามารถรักษาตำแหน่งของลูกตุ้มต่อไปได้ (ช่วงที่ monocarier สามารถทำงานได้ประมาณ ±25 เซนติเมตร)

ภาพที่ 51 เป็นระบบที่ใช้ค่าหน้ำหนัก Q_1 และ R_1 เช่นเดียวกัน และทำการเพิ่มตัวอินทิกรัลเข้าไปในระบบ ซึ่งจากภาพแสดงให้เห็นว่า ตำแหน่งของรถสามารถเคลื่อนที่เข้าสู้ตำแหน่งอ้างอิงได้แม้ว่าจะมีช่วงการแกว่งอยู่บ้าง แต่ก็ยังอยู่ในช่วงการทำงานที่ระบบยังควบคุมได้ ภาพที่ 52 เป็นการควบคุมเมื่อตัวควบคุมถูกออกแบบโดยใช้ค่าน้ำหนัก Q_2 และ R_2 โดย ภาพที่ 53 แสดงระบบที่ได้ทำการเพิ่มตัวอินทิกรัลและภาพที่ 54 แสดงการรบกวนระบบด้วยการเคาะ ภาพที่ 55 เป็นการควบคุมเมื่อตัวควบคุมถูกออกแบบโดยใช้ค่าน้ำหนัก Q_3 และ R_3 โดย ภาพที่ 56 แสดงระบบที่ได้ทำการเพิ่มตัวอินทิกรัลและภาพที่ 57 แสดงการรบกวนระบบด้วยการเคาะ และภาพที่ 58 เป็นการควบคุมเมื่อตัวควบคุมถูกออกแบบโดยใช้ค่าน้ำหนัก Q_4 และ R_4 โดย ภาพที่ 59 ได้ทำการเพิ่มตัวอินทิกรัล และภาพที่ 60 แสดงการรบกวนระบบด้วยการเคาะ โดยการใช้ Q_2 และ R_2 กับ Q_3 และ R_3 มีผลค่อนข้างใกล้เคียงกัน ส่วน Q_4 และ R_4 ให้การควบคุมที่ใช้สัญญาณควบคุมลดลง

ตารางที่ 6 ค่าน้ำหนักและอัตราขยายที่ใช้ในการทดสอบการควบคุม

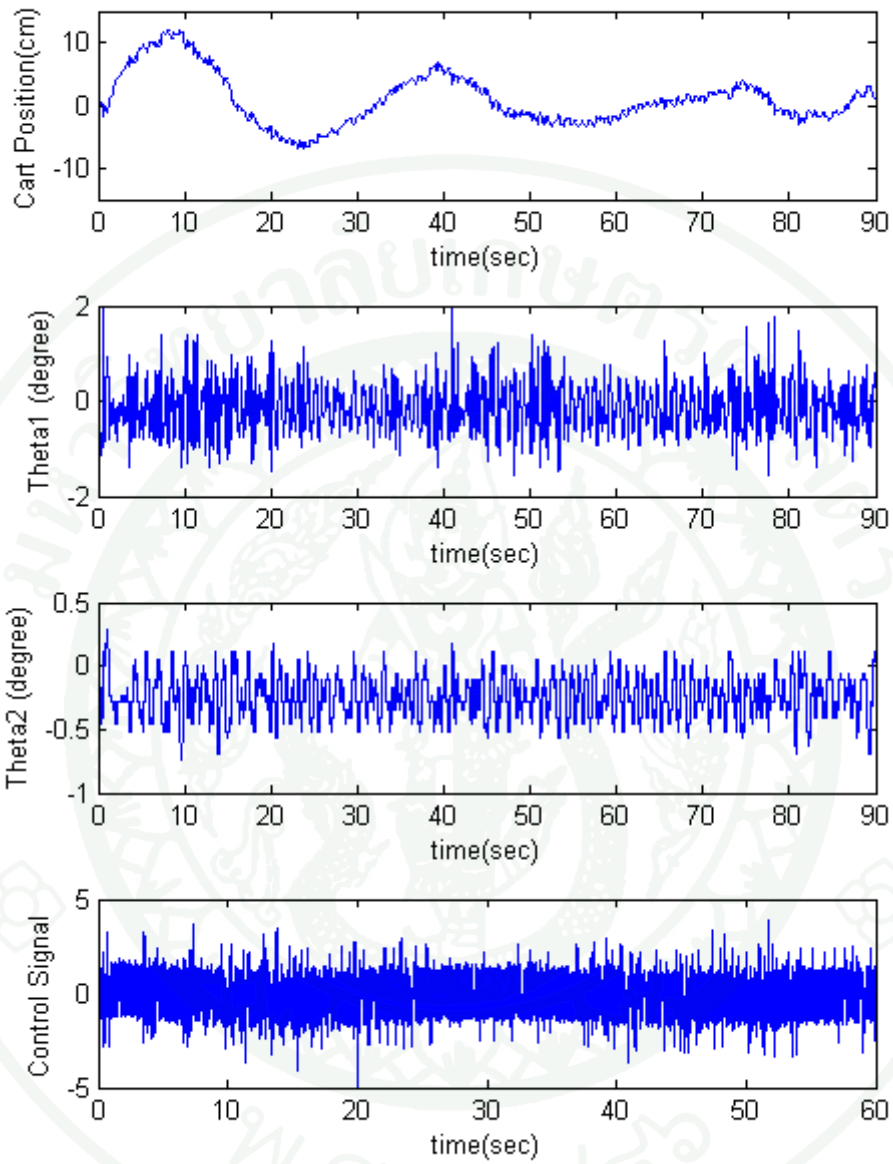
	ค่าน้ำหนัก (Q, R)	อัตราขยาย
1	Q_1 = diag([1,1,1,1,1,1]) R_1 = 1	K = [1 0.79 -45.92 1.35 94.14 15.87]
2	Q_2 = diag([1000,100,70000,500,100000,10]) R_2 = 100	K = [3.16 3.14 -66.36 1.88 143.23 23.18]
3	Q_3 = diag([1000,100,70000,100,50000,10]) R_3 = 100	K = [3.16 2.93,-55.13,2.36,125.76,20.71]
4	Q_4 = diag([1000,100,70000,100,50000,10]) R_4 = 1000	K = [1.0 0.72 -42.44 1.51 89.93 15.16]

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



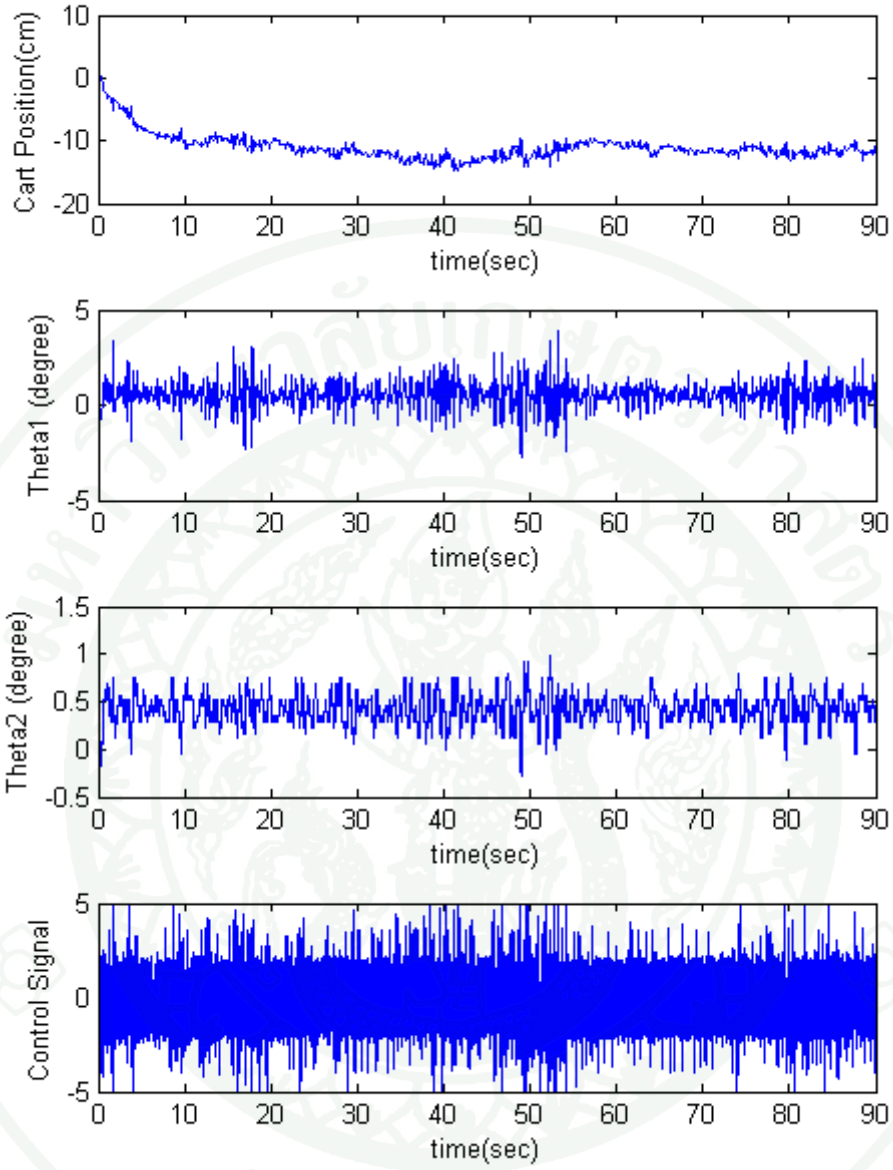
ภาพที่ 50 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_1 และ R_1

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



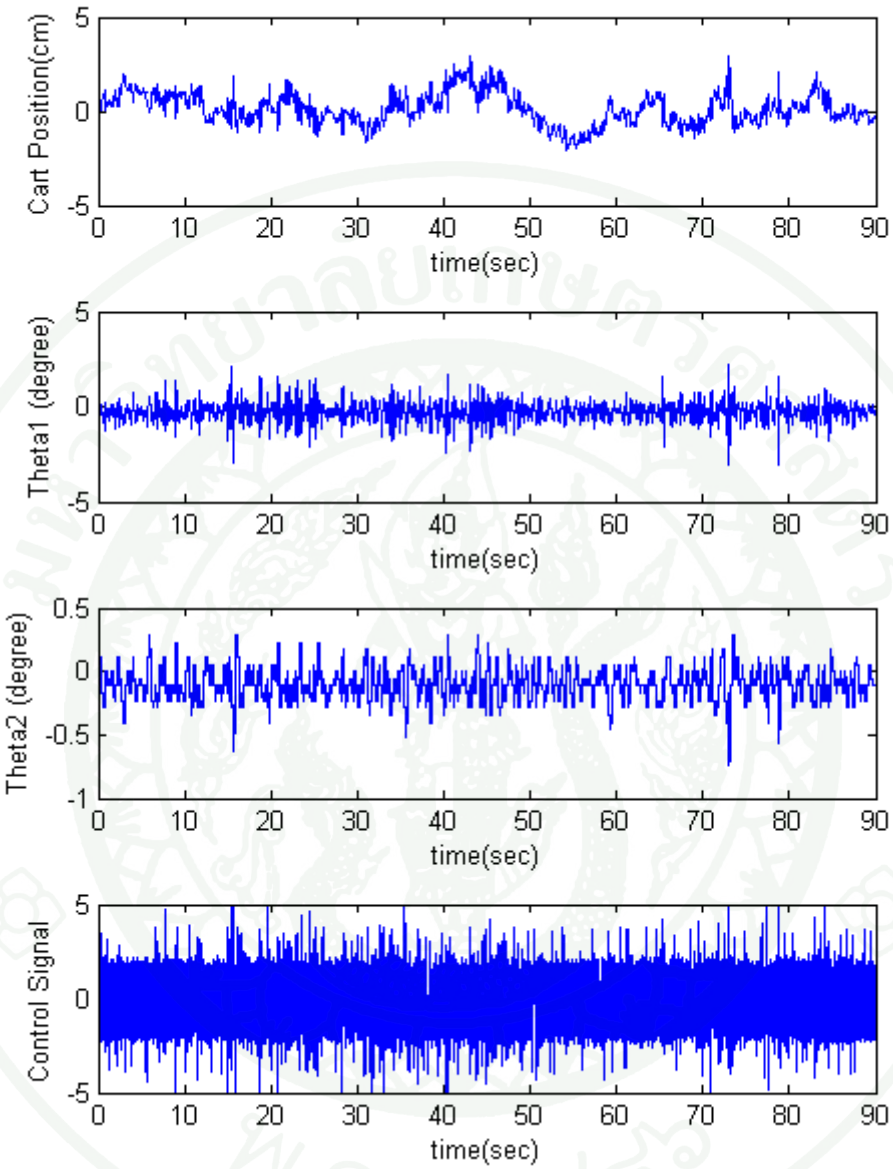
ภาพที่ 51 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_1 และ R_1 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



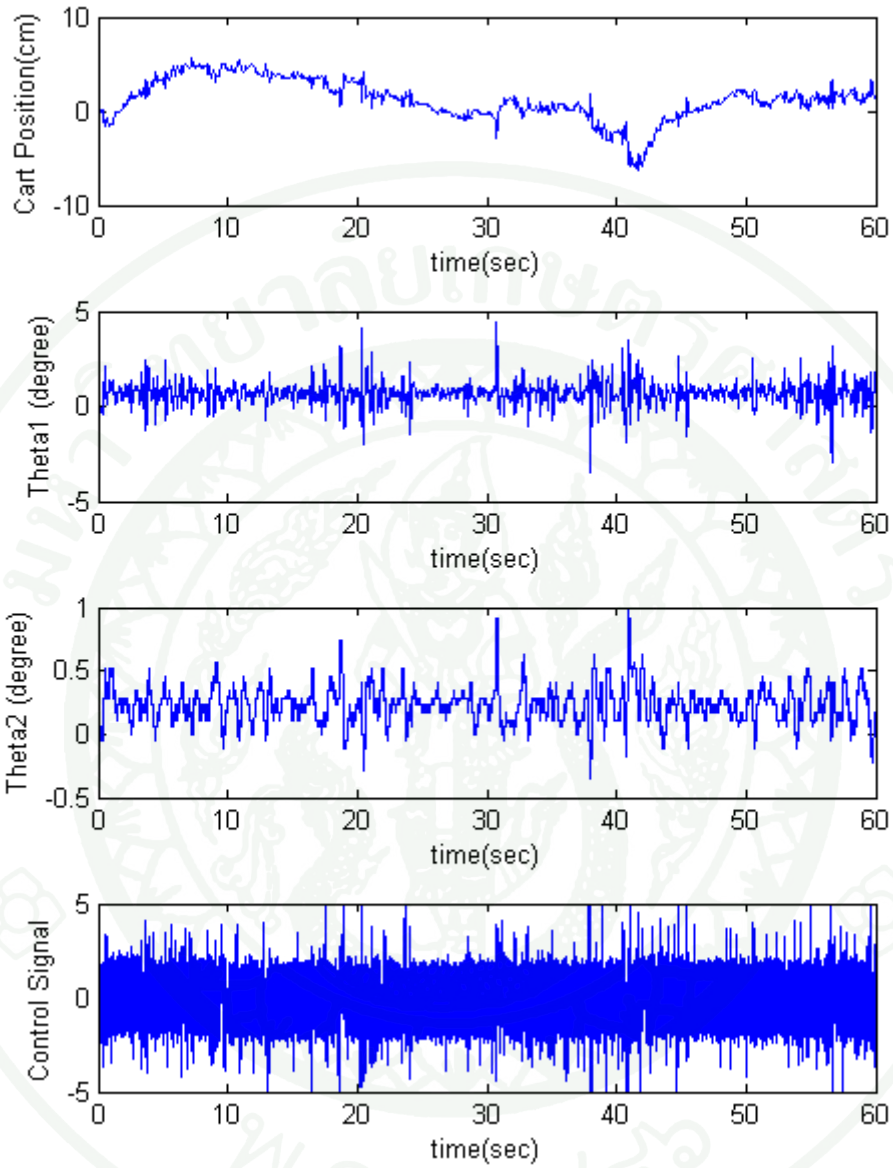
ภาพที่ 52 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_2 และ R_2

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



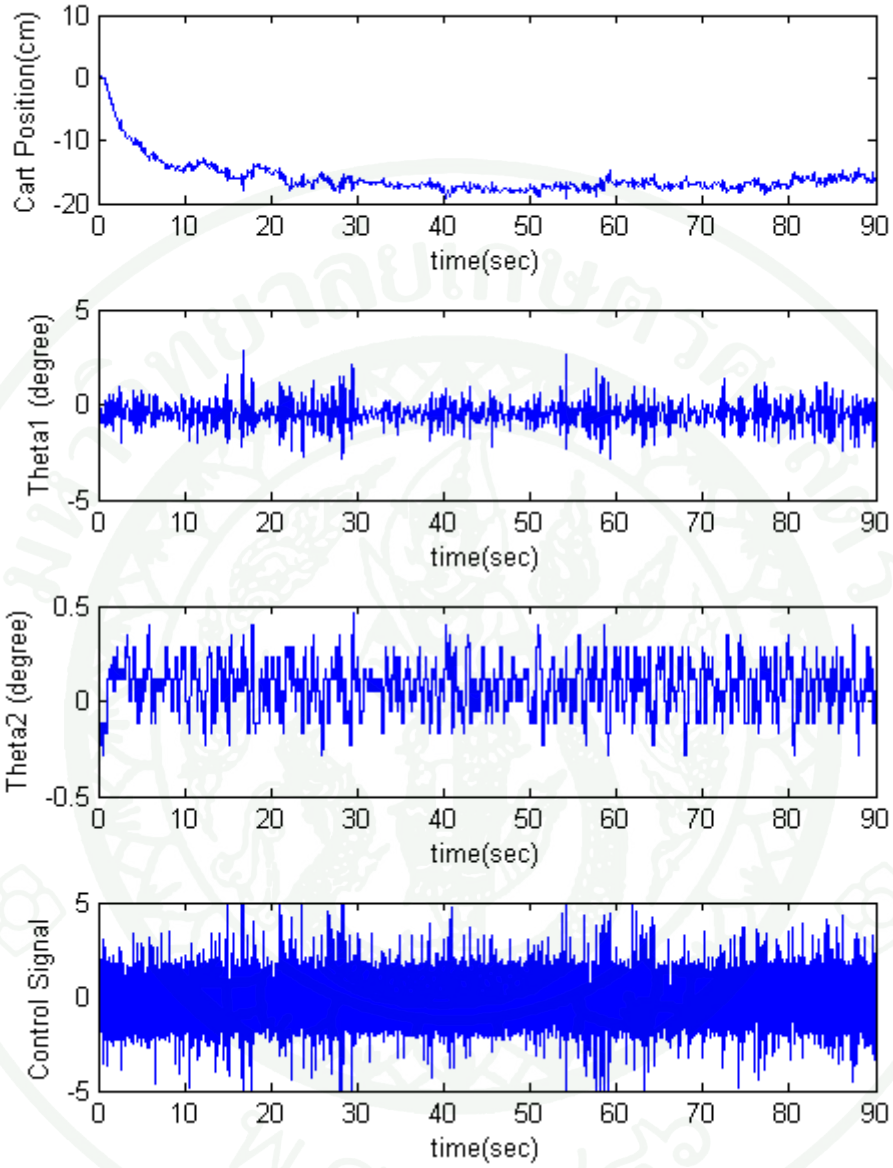
ภาพที่ 53 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_2 และ R_2 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



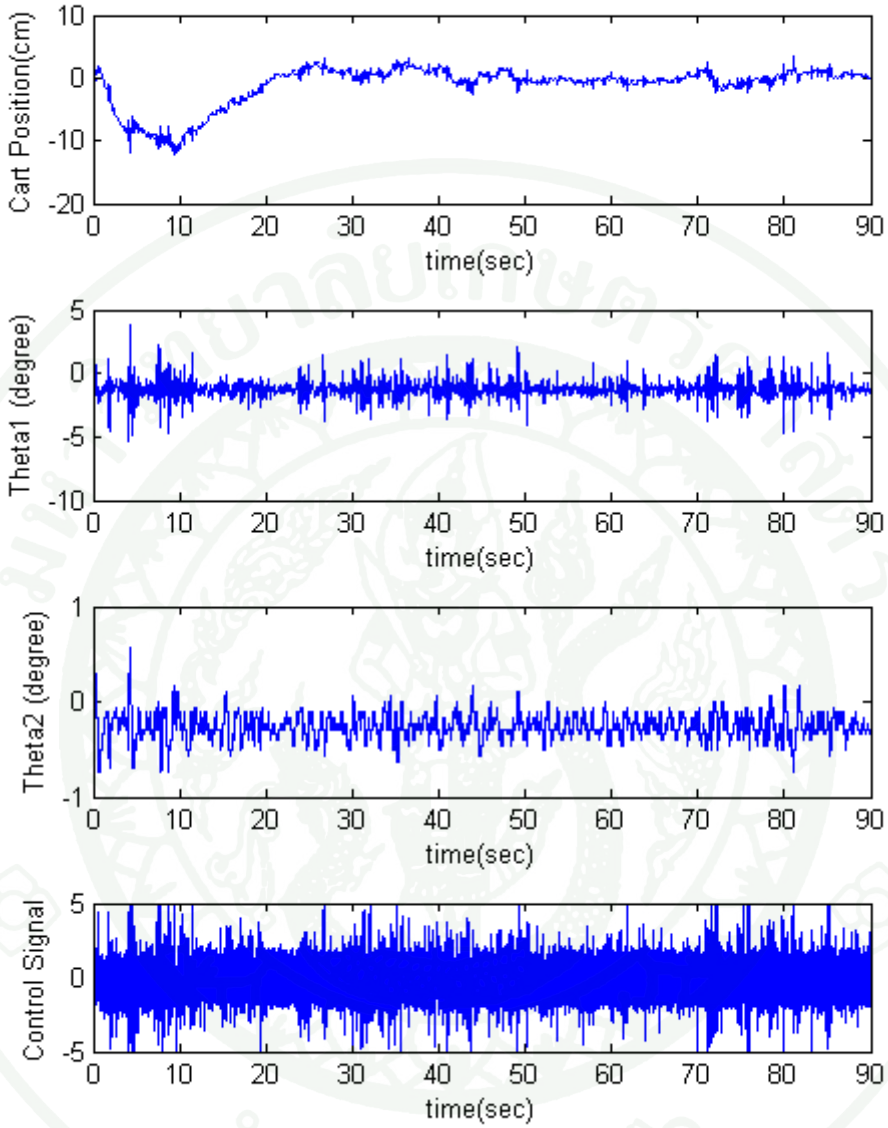
ภาพที่ 54 การรบกวนระบบที่วินาทีที่ 30 (theta1) และ วินาทีที่ 40 (theta2) เมื่อระบบควบคุมโดยใช้ ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_2 และ R_2 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



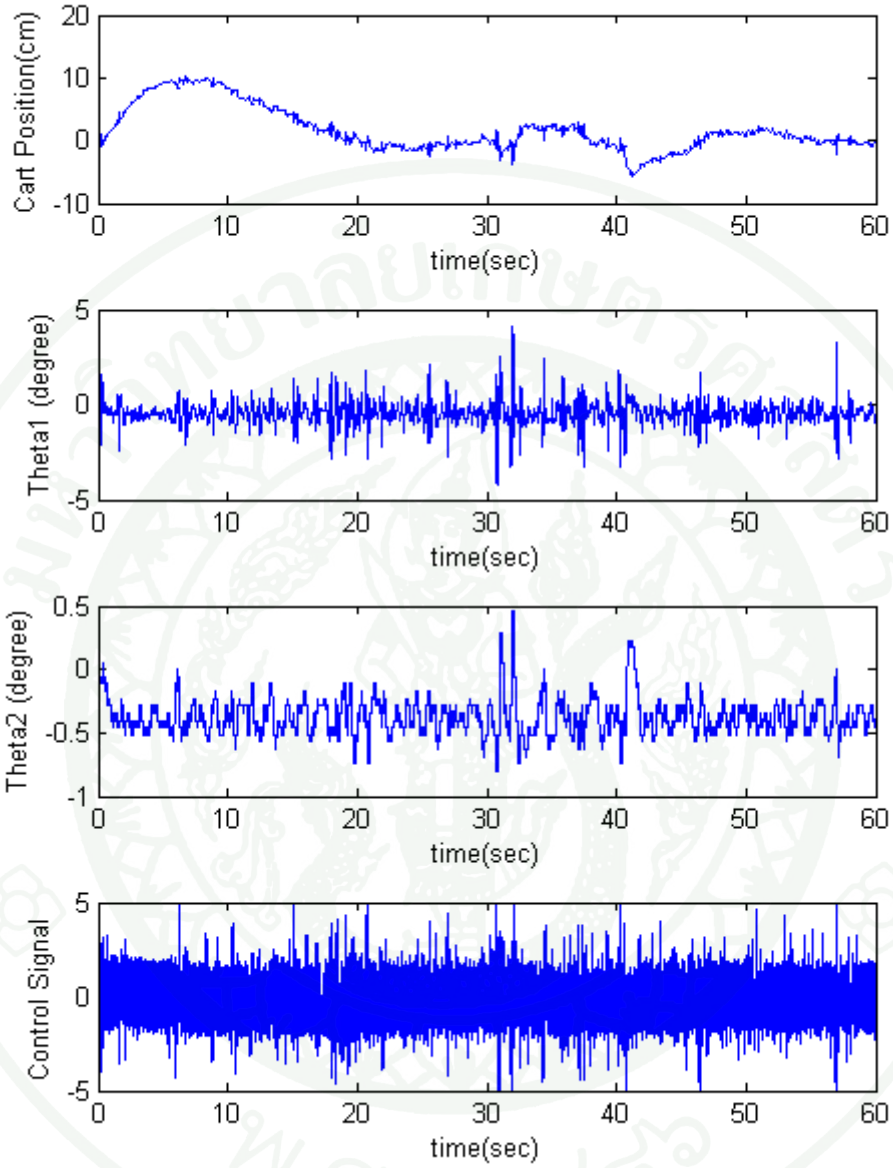
ภาพที่ 55 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_3 และ R_3

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



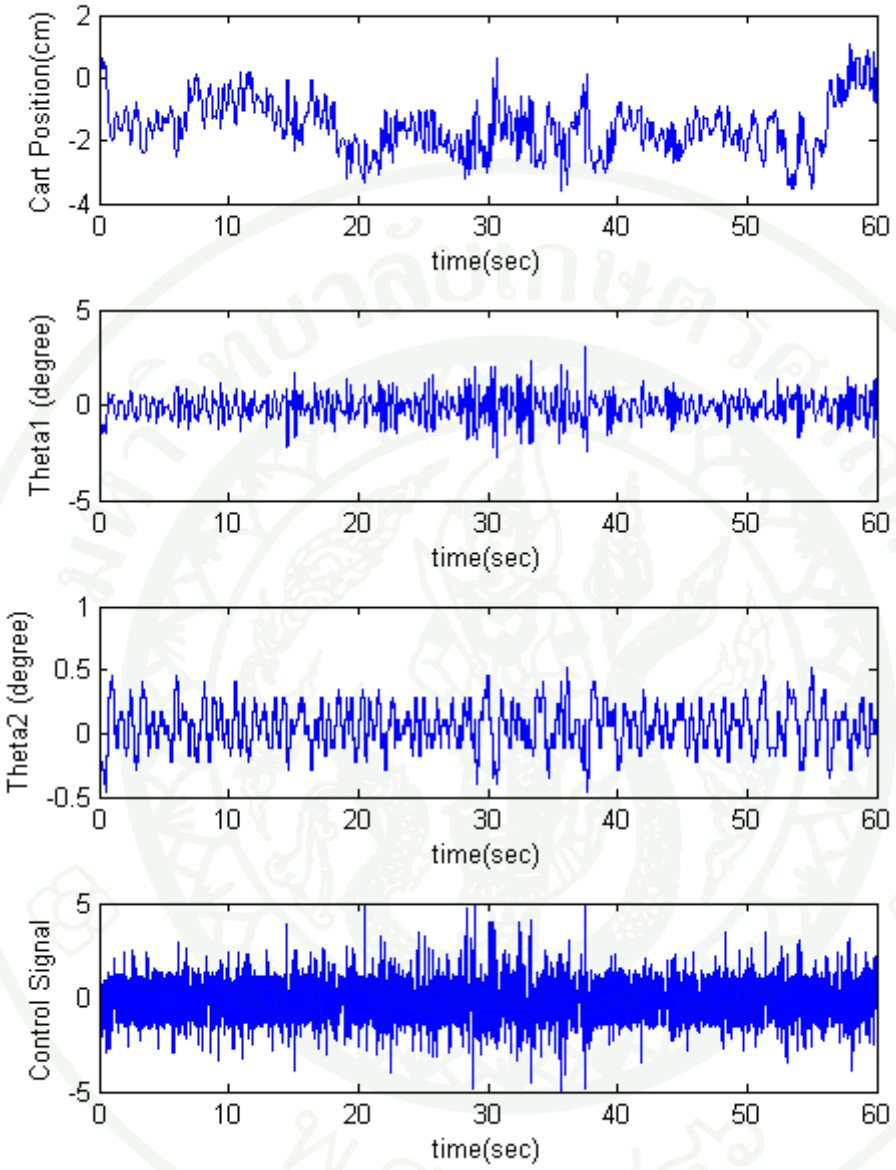
ภาพที่ 56 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_3 และ R_3 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



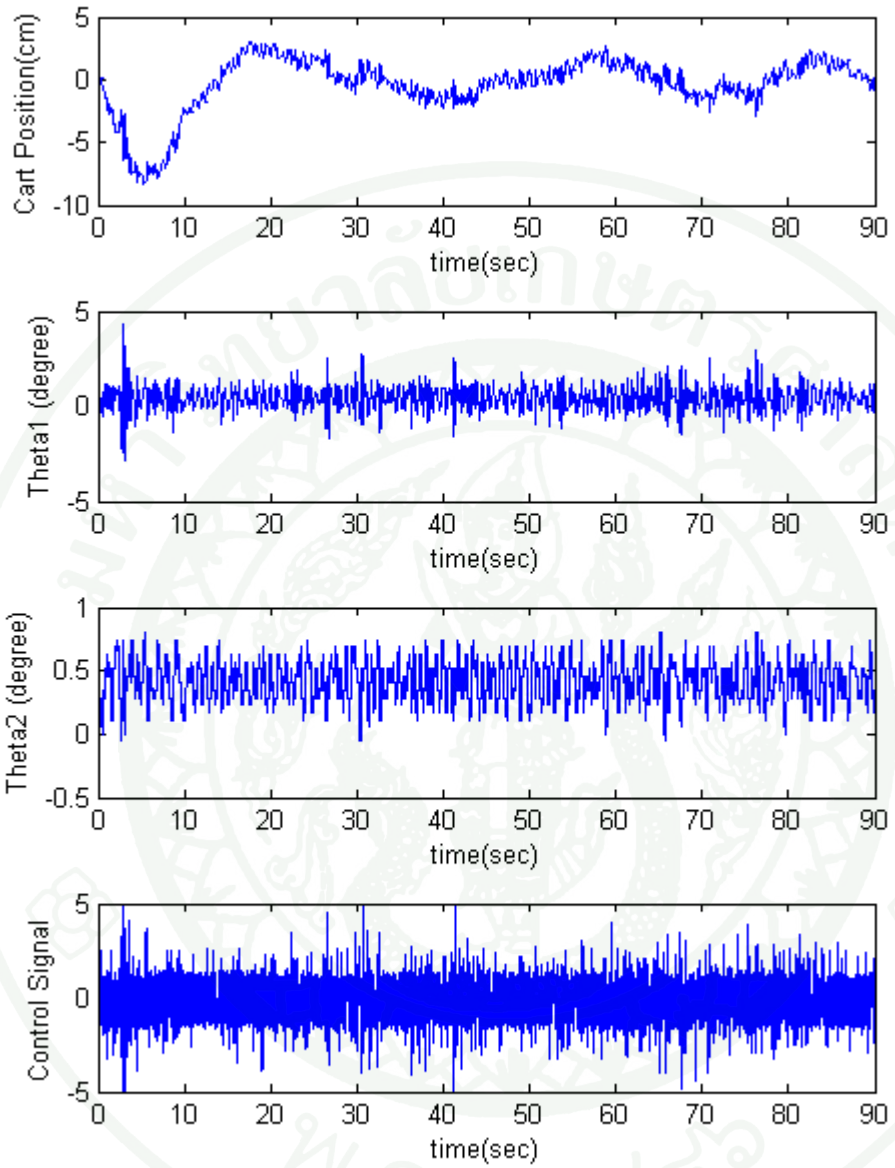
ภาพที่ 57 การรบกวนระบบที่วินาทีที่ 30 (theta1) และ วินาทีที่ 40 (theta2) เมื่อระบบควบคุมโดยใช้ ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_3 และ R_3 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



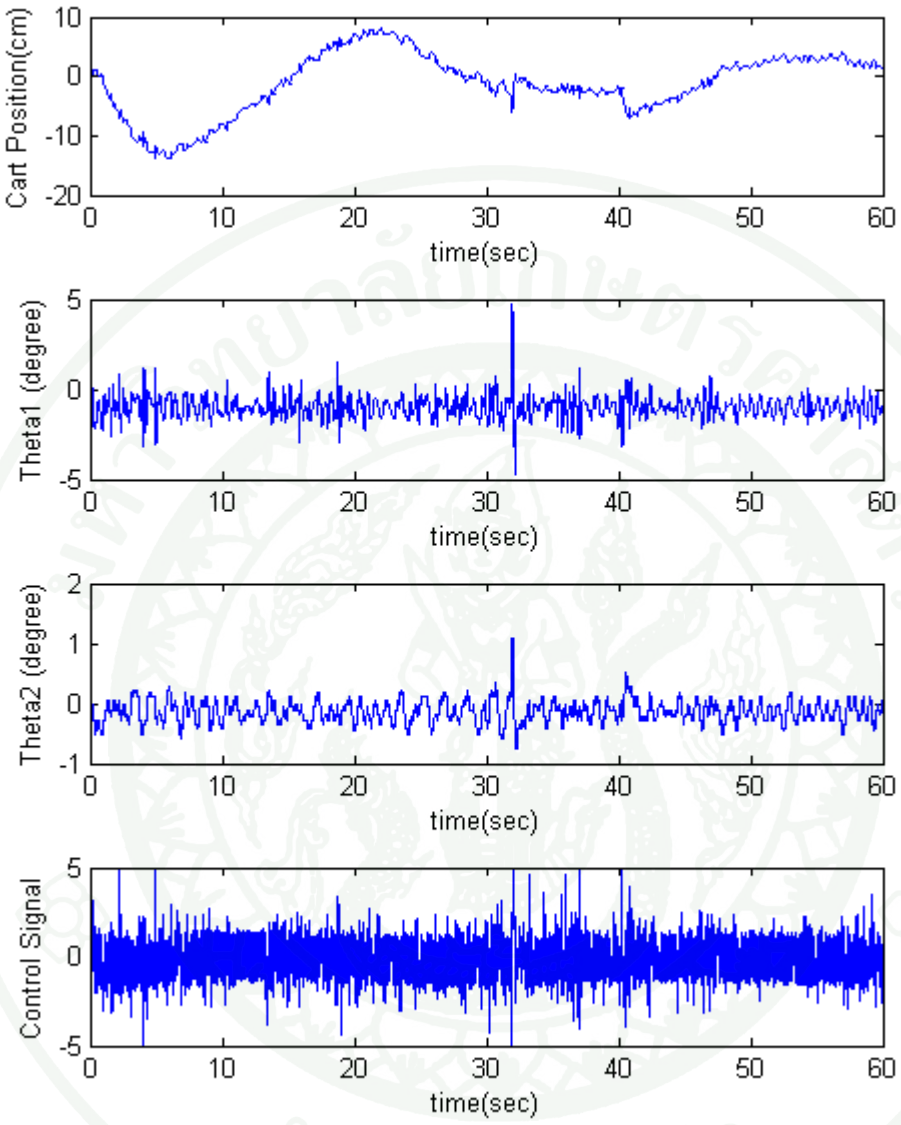
ภาพที่ 58 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_4 และ R_4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 59 ผลตอบสนองต่อค่าเริ่มต้นเมื่อระบบผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุม โดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_4 และ R_4 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 60 การรบกวนระบบที่วินาทีที่ 30 (theta1) และ วินาทีที่ 40 (theta2) เมื่อระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุม LQR ค่าน้ำหนัก Q_4 และ R_4 และมีตัวอินทิกรัล K1 = 0.5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิจารณ์

1. สายไฟและสายสัญญาณต่างๆมีผลต่อระบบ ดังที่ได้จากการทดสอบหาค่าคงที่ความเสียดทานของจุดหมุนทั้งสองของลูกตุ้ม แม้ว่าจะใช้แบร์ริ่งจุดหมุนประเภทเดียวกันก็ตาม ค่าคงที่ความเสียดทานที่ทดลองได้มีค่าต่างกันค่อนข้างสูง

2. การที่จะรักษาสมดุลของระบบลูกตุ้มได้หรือไม่นั้น ส่วนหนึ่งเกิดจากการออกแบบที่ตัวอุปกรณ์การทดลองและข้อจำกัดต่างๆของอุปกรณ์ เช่นความฝืดในตัวมอเตอร์และราง ซึ่งที่แรงดันสัญญาณควบคุมต่ำๆจะไม่สามารถควบคุมมอเตอร์ได้ถูกต้องเนื่องจากแรงที่เกิดไม่สามารถชนะค่าความเสียดทานได้

3. การตั้งก้านลูกตุ้มให้อยู่ในตำแหน่งจุดสมดุลทำได้ยาก มุมที่เปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อยมีผลทำให้ก้านลูกตุ้มไม่สมดุล

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

การควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนเป็นปัญหาการควบคุมที่มี 3 องศาอิสระ การควบคุมเอาท์พุตที่เกี่ยวเนื่องกันจึงต้องอาศัยตัวควบคุมที่แม่นยำ การเลือกสถานะของระบบ ความแม่นยำของตัวแปรต่างๆ มีผลอย่างมากต่อความสำเร็จในการรักษาเสถียรภาพของระบบซึ่งเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ

การออกแบบด้วยวิธีคุมค่ากำลังสองเชิงเส้น (LQR) เป็นการออกแบบในโดเมนเวลา โดยทำการออกแบบเพื่อให้ดัชนีสมรรถนะน้อยที่สุด ซึ่งดัชนีสมรรถนะอยู่ในรูปสมการของสถานะและอินพุทโดยมีค่าน้ำหนัก Q และ R เป็นตัวกำหนดลักษณะเป็นไปของระบบ กรณีเมทริกซ์ Q มีค่ามากๆ คือการให้ความสำคัญค่าผิดพลาดของสถานะอ้างอิงและสถานะเอาท์พุท ซึ่งผลคือจะทำให้ระบบตอบสนองได้ดีและรวดเร็ว ส่วนในกรณีเมทริกซ์ R มีค่ามากคือการให้ความสำคัญในส่วนของพลังงานที่ใช้ในการควบคุม จากการทดลองค่า Q_4 และ R_4 ให้ผลการทดลองเป็นที่น่าพอใจ เนื่องจากใช้พลังงานของสัญญาณควบคุมต่ำ และสามารถทนต่อสิ่งรบกวนได้ ซึ่งกรณีที่ใช้สัญญาณควบคุมมากๆ แม้ว่าจะทนต่อสิ่งรบกวนได้ดีกว่า แต่ก็จะมีโอกาสสูงที่สัญญาณควบคุมจะเกินค่าขอบเขตที่อุปกรณ์จะรับได้ ทำให้การควบคุมผิดพลาดจนไม่สามารถรักษาตำแหน่งได้ ส่วนการเพิ่มตัวอินทิกรัลที่เหมาะสมเข้าไประบบช่วยให้การควบคุมตำแหน่งสามารถลู่เข้าสู่ตำแหน่งที่ต้องการได้รวดเร็วมากยิ่งขึ้นดังแสดงได้ชัดเจนในส่วนการทดลองเมื่อให้ค่าน้ำหนักคือ Q_1 และ R_1 แต่หากอินทิกรัลมีค่ามากเกินไปก็จะส่งผลให้ระบบไม่มีเสถียรภาพได้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ข้อเสนอแนะ

1. ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนเป็นระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง ทำให้เป็นระบบที่ควบคุมได้ยาก และมีข้อจำกัดสูงการจะควบคุมระบบให้มีประสิทธิภาพนั้นจำเป็นต้องอาศัยอุปกรณ์ตัวควบคุมที่มีกำลังสูง เช่นการใช้แบตเตอรี่ที่มีความสามารถในการจ่ายกระแสไฟฟ้าแทน หรือ การเลือกใช้มอเตอร์หรืออุปกรณ์ส่งกำลังที่มีกำลังมากขึ้น

2. ระบบลูกตุ้มหัวกลับที่ทำการทดลองนี้พบว่าความเสียดทานต่างๆมีผลกระทบต่อการควบคุมค่อนข้างสูง การออกแบบตัวควบคุมที่สามารถแก้ไขข้อจำกัดเรื่องแรงเสียดทานน่าจะทำให้ระบบสามารถควบคุมได้อย่างมีประสิทธิภาพขึ้นได้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

ชิต เหล่าวัฒนา, ฐิติศักดิ์ จันทร์พรหม และ ไพศาล สุวรรณเทพ. 2545. การวิเคราะห์โครงสร้างทางกลและเสถียรภาพของหุ่นยนต์เดินสองขา. **วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ.** 25 (1): 35-54.

เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย. 2551. **ระบบควบคุมพลวัต : การวิเคราะห์การออกแบบ และการประยุกต์.** พิมพ์ครั้งที่ 1 สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. 2548. **การควบคุมระบบพลศาสตร์.** พิมพ์ครั้งที่ 2 สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

Kajita, S., F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Fujiwara, K. Yokoi and H. Hirukawa. 2001. The 3D linear inverted pendulum mode: a simple modeling for a biped walking pattern generation, pp. 239-246. *In* **Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.** 29 October-3 November 2001, Outrigger Wailea Resort, Maui, Hawaii, USA.

Sultan, K. 2003. **Inverted Pendulum: Analysis, Design and Implementation.** Available Source: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3790-inverted-pendulum, February 10, 2010.

Honda Motor Co., Ltd. 2009. **Honda Develops New Personal Mobility Device With the Goal of Co-existing in Harmony with People -- World's first drive system that enables movement in all directions.** Available source: http://world.honda.com/news/2009/c090924New-Personal-Mobility-Device, February 10, 2010.

Naidu, D. S. 2003. **Optimal Control Systems.** CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, USA.

Ogata, K. 2002. **Modern Control Engineering. 4th ed**. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Thomson, W. T. and M. D. Dahleh. 1998. **Theory of Vibration with Applications 5th ed.** Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.

Wane, S. O., H. Yu and Y. Liu. 2007**.** Development of a reaction drive for a propulsion mechanism. **IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control**, 15-17 April 2007, London, UK.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ภาคผนวก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน

จากสมการ Lagrange Equation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i, \qquad i=1,2,...,n$$

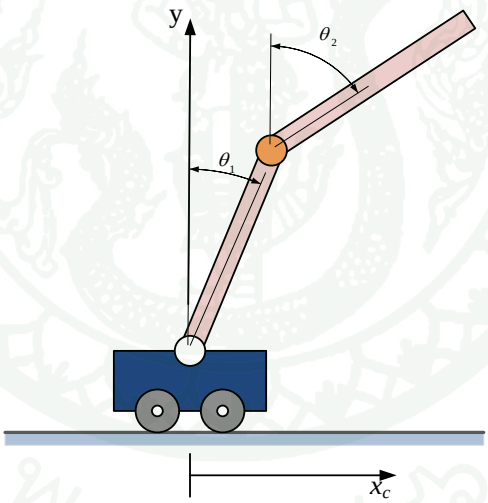
เมื่อ

T แทนพลังงานจลน์ของระบบ

U แทนพลังงานศักย์ของระบบ

Q แทนแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ

q_i แทน generalize coordinate



ภาพผนวกที่ 1 free body diagram ของระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิกัดต่างๆกำหนดได้ดังนี้

พิกัดตำแหน่งของรถ คือ

$$(x_0, y_0)$$

พิกัดของลูกตุ้มล่าง คือ

$$(x_1, y_1) = (x_0 + l_1 \sin(\theta_1), l_1 \cos(\theta_1))$$
$$(\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (\dot{x}_0 + l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1, -l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1)$$

พิกัดของลูกตุ้มบน คือ

$$(x_2, y_2) = (x_0 + L_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), L_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2))$$
$$(\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (\dot{x}_0 + L_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2, -L_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2)$$

$$\begin{aligned}
T = {} & \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[\left(\dot{x}_0 + l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 \right)^2 + \left(-l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\dot{x}_0 + L_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 \right)^2 + \left(-L_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
= {} & \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_0^2 + l_1^2 \cos^2(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 \cos(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + l_1^2 \sin^2(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0^2 + L_1^2 \cos^2(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cos^2(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2 L_1 \cos(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + 2 l_2 \cos(\theta_2)\dot{x}_0\dot{\theta}_2 \\
& + 2 L_1 l_2 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + L_1^2 \sin^2(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \sin^2(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \\
& + 2 L_1 l_2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
= {} & \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_0^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 \cos(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 \right) \\
& + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0^2 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 L_1 \cos(\theta_1)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + 2 l_2 \cos(\theta_2)\dot{x}_0\dot{\theta}_2 \\
& + 2 L_1 l_2 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2 L_1 l_2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\
& + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$T = \frac{1}{2}\left(m_0 + m_1 + m_2\right)\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_2\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$+m_1 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_2$$
$$+m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$U = m_1 g(l_1 \cos\left(\theta_1\right)) + m_2 g\left(L_1 \cos\left(\theta_1\right) + l_2 \cos\left(\theta_2\right)\right)$$

$i = 1, q_1 = x_0$ (พิกัดรถ)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_0} + \frac{\partial U}{\partial x_0} = Q_1$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} = \left(m_0 + m_1 + m_2\right)\dot{x}_0 + m_1 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0}\right) = \left(m_0 + m_1 + m_2\right)\ddot{x}_0 + m_1 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 - m_1 l_1 \sin\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1$$
$$-m_2 L_1 \sin\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 \sin\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_0} = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = 0$$
$$Q_1 = F - c_0 \dot{x}_0$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$i = 2, q_1 = \theta_1$ (พิกัดลูกตุ้มล่าง)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = Q_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1\right)\dot{\theta}_1 + m_1 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{x}_0 + m_2 L_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{x}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{x}_0 - m_1 l_1 \sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{x}_0$$

$$-m_2 L_1 \sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -m_1 l_1 \sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 - m_2 L_1 \sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1 - m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = m_1 g(-l_1 \sin\left(\theta_1\right)) + m_2 g\left(-L_1 \sin\left(\theta_1\right)\right)$$

$$= (-m_1 l_1 - m_2 L_1) g \sin\left(\theta_1\right)$$

$$Q_2 = -c_1\dot{\theta}_1$$

$i = 3, q_3 = \theta_2$ (พิกัดลูกตุ้มบน)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = Q_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \left(m_2 l_2^2 + J_2\right)\dot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{x}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \left(m_2 l_2^2 + J_2\right)\ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{x}_0 - m_2 l_2 \sin\left(\theta_2\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_2$$

$$+m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 l_2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -m_2 L_1 l_2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\left(\theta_2\right)$$

$$Q_3 = -c_2\dot{\theta}_2$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$
\begin{aligned}
&\left(m_0+m_1+m_2\right)\ddot{x}_0+m_1l_1\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1-m_1l_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2+m_2L_1\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1\\
&-m_2L_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2+m_2l_2\cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2-m_2l_2\sin\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2\\
&=F-c_0\dot{x}_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1\right)\ddot{\theta}_1+m_1l_1\cos\left(\theta_1\right)\ddot{x}_0-m_1l_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1+m_2L_1\cos\left(\theta_1\right)\ddot{x}_0\\
&-m_2L_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1+m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\ddot{\theta}_2-m_2L_1l_2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\\
&-\left(-m_1l_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\\
&+(-m_1l_1-m_2L_1)g\sin\left(\theta_1\right)\\
&=-c_1\dot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(m_2l_2^2+J_2\right)\ddot{\theta}_2+m_2l_2\cos\left(\theta_2\right)\ddot{x}_0-m_2l_2\sin\left(\theta_2\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_2\\
&+m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\ddot{\theta}_1-m_2L_1l_2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\\
&+m_2L_1l_2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&-m_2gl_2\sin\left(\theta_2\right)\\
&=-c_2\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(m_0+m_1+m_2\right)\ddot{x}_0+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2l_2\cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2\\
&-\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\sin\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2-m_2l_2\sin\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2\\
&=F-c_0\dot{x}_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{x}_0+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\ddot{\theta}_2\\
&-\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1l_2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\\
&-\left(-m_1l_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1\sin\left(\theta_1\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_1-m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\\
&+(-m_1l_1-m_2L_1)g\sin\left(\theta_1\right)\\
&=-c_1\dot{\theta}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(m_2l_2^2+J_2\right)\ddot{\theta}_2+m_2l_2\cos\left(\theta_2\right)\ddot{x}_0-m_2l_2\sin\left(\theta_2\right)\dot{x}_0\dot{\theta}_2\\
&+m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\ddot{\theta}_1-m_2L_1l_2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\\
&+m_2L_1l_2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&-m_2gl_2\sin\left(\theta_2\right)\\
&=-c_2\dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สำหรับ θ_1, θ_2 มีค่าน้อยๆ จะได้

$$\begin{aligned} \sin\theta_1,\ \sin\theta_2 &\approx \theta, \\ \cos\theta_1, \cos\theta_2 &\approx 1, \\ \dot{\theta}_1^2,\ \dot{\theta}_2^2,\ \dot{x}_0\dot{\theta}_1,\ \dot{x}_0\dot{\theta}_2,\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2,\ \theta_1-\theta_2 &\approx 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่เชิงเส้นที่ได้คือ

$$\begin{aligned} \left(m_0+m_1+m_2\right)\ddot{x}_0+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2 &= F-c_0\dot{x}_0 \\ \left(m_1l_1+m_2L_1\right)\ddot{x}_0+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2L_1l_2\ddot{\theta}_2 &= -c_1\dot{\theta}_1+(m_1l_1+m_2L_1)g\theta_1 \\ m_2l_2\ddot{x}_0+m_2L_1l_2\ddot{\theta}_1+\left(m_2l_2^2+J_2\right)\ddot{\theta}_2 &= -c_2\dot{\theta}_2+m_2gl_2\theta_2 \end{aligned}$$

จัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} m_0+m_1+m_2 & m_1l_1+m_2L_1 & m_2l_2 \\ m_1l_1+m_2L_1 & m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1 & m_2L_1l_2 \\ m_2l_2 & m_2L_1l_2 & m_2l_2^2+J_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} F-c_0\dot{x}_0 \\ -c_1\dot{\theta}_1+(m_1l_1+m_2L_1)g\theta_1 \\ -c_2\dot{\theta}_2+m_2gl_2\theta_2 \end{bmatrix}$$

แทนค่าตัวแปร F

$$\begin{bmatrix} m_0+m_1+m_2 & m_1l_1+m_2L_1 & m_2l_2 \\ m_1l_1+m_2L_1 & m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1 & m_2L_1l_2 \\ m_2l_2 & m_2L_1l_2 & m_2l_2^2+J_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_2v-k_3k_1\dot{x}_0-c_0\dot{x}_0 \\ -c_1\dot{\theta}_1+(m_1l_1+m_2L_1)g\theta_1 \\ -c_2\dot{\theta}_2+m_2gl_2\theta_2 \end{bmatrix}$$

แทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆจากตารางที่ 1

$$\begin{bmatrix} 1.6 & 0.1350 & 0.0900 \\ 0.1350 & 0.0372 & 0.0270 \\ 0.0900 & 0.0270 & 0.0387 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 28.3873v-185.1620\dot{x} \\ -0.0011\dot{\theta}_1+1.3244\theta_1 \\ -0.0004\dot{\theta}_2+0.8829\theta_2 \end{bmatrix}$$

เขียนในรูปปริภูมิสถานะโดยกำหนดตัวแปรสถานะดังนี้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$x_1 = x \qquad x_2 = \dot{x}$$
$$x_3 = \theta_1 \qquad x_4 = \dot{\theta}_1$$
$$x_5 = \theta_2 \qquad x_6 = \dot{\theta}_2$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -167.4207 & -4.7217 & 0.0039 & 0.3396 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 660.1577 & 90.9395 & -0.0755 & -34.9756 & 0.0158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -71.2247 & -52.4634 & 0.0436 & 46.4257 & -0.0210 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 52.2389 \\ 0 \\ -205.9837 \\ 0 \\ 22.2237 \end{Bmatrix} v$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ นายฐกัด เบญจเลิศยานนท์

เกิดวันที่ 19 กุมภาพันธ์ 2527

สถานที่เกิด อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต

ประวัติการศึกษา วศ.บ. (วิศวกรรมเครื่องกล) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตำแหน่งปัจจุบัน -

สถานที่ทำงานปัจจุบัน -

ผลงานดีเด่นและ/หรือรางวัลทางวิชาการ -

ทุนการศึกษาที่ได้รับ -

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์