**วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal** 66(703) มกราคม – เมษายน 2564
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

# สูตรจำนวนจุดตรึงของไดกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์ $a^6 \equiv b \pmod{n}$ และการวางนัยทั่วไปบางแบบ

# Formula for Number of Fixed Points of Digraph Arising from The Relation $a^6 \equiv b \pmod{n}$ And Some Generalization

รตินันท์ บุญเคลือบ[1,*] และ วิภาวี คุณานพรัตน์[2]
[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10330
[2]โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร 10330

Ratinan Boonklurb[1,*] and Wipawee Kunanopparat[2]
[1]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330
[2] Triamudomsuksa School, Bangkok 10330

Email: [1]ratinan.b@chula.ac.th [2]pramchanun@gmail.com

วันที่รับบทความ : 28 กุมภาพันธ์ 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 8 เมษายน 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 10 พฤษภาคม 2563

**บทคัดย่อ**

สำหรับจำนวนนับ $n$ ที่ $n \geq 2$ บทความฉบับนี้ให้สูตรจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ $\Gamma(n, 6)$ ที่มีจุดยอดเป็นเซต $V = \{ 0, 1, 2, \ldots, n-1 \}$ และเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง $(a, b) \in E \subseteq V \times V$ ก็ต่อเมื่อ

[*] ผู้เขียนหลัก

$a^6 \equiv b \pmod{n}$ โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามไซโคลโตมิก และขยายผลไปสู่สูตรจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n,k)$ เมื่อ $k$ เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 4$ และ $k-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ
**คำสำคัญ:** ไดกราฟ จุดตรึง พหุนามไซโคลโตมิก

## ABSTRACT

For an integer $n$ such that $n \geq 2$, this article provides a formula for number of fixed points of the digraph $\Gamma(n,6)$ which has the vertex set $V = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ and directed edges $(a,b) \in E \subseteq V \times V$ if and only if $a^6 \equiv b \pmod{n}$ by using the knowledge about the factorization of the cyclotomic polynomial and extend the result to formula for number of fixed points of digraph $\Gamma(n,k)$ where $k$ is an integer such that $k \geq 4$ and $k-1$ is a prime number.
**Keywords:** Digraph, Fixed point, Cyclotomic polynomial

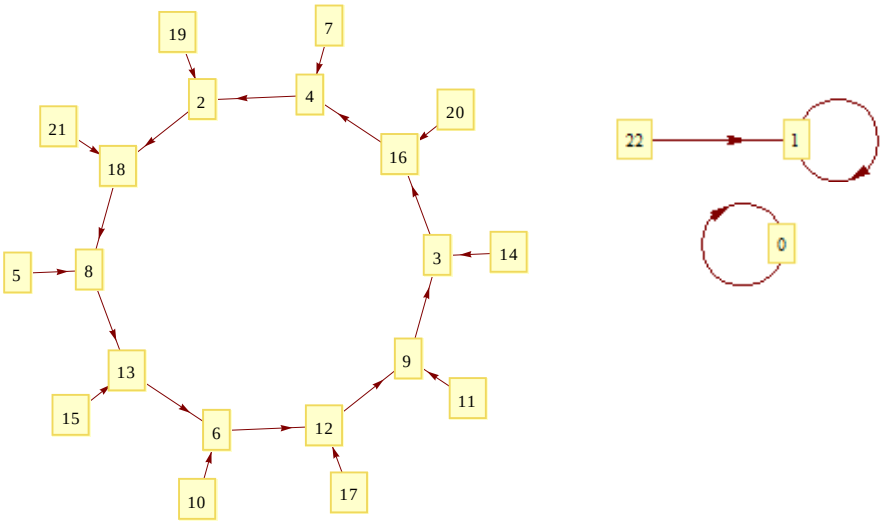
## 1. บทนำ

บทความฉบับนี้พิจารณาให้จำนวนนับสองจำนวนเป็นเสมือนจุดยอด แล้วนำความสัมพันธ์สมภาคระหว่างจำนวนนับสองจำนวนมาสร้างเป็นเสมือนเส้นเชื่อมระบุทิศทางระหว่างจำนวนนับทั้งสอง ซึ่งบรรดาจุดยอดและเส้นเชื่อมระบุทิศทางเหล่านี้ จะเรียกรวมกันว่า กราฟระบุทิศทาง หรือ ไดกราฟ

**บทนิยาม 1.1** [6] *กราฟระบุทิศทาง* หรือ *ไดกราฟ* $G = (V,E)$ ประกอบด้วยเซตจำกัด $V$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกว่า *เซตของจุดยอด* และ $E$ เป็นเซตของคู่อันดับที่เป็นสับเซตของ $V \times V$ โดยเรียก $E$ ว่า *เซตของเส้นเชื่อมระบุทิศทาง*

ทั้งนี้ สำหรับไดกราฟ $G = (V,E)$ ถ้า $(a,b) \in E$ หมายความว่า มีเส้นเชื่อมจากจุดยอด $a$ ไปยังจุดยอด $b$ เรียกจุดยอด $a$ ว่า *จุดเริ่มต้น* และเรียกจุดยอด $b$ ว่า *จุดปลาย*ของเส้นเชื่อมระบุทิศทาง และมักเขียนลูกศรกำกับทิศทางไว้ ในขณะที่ถ้า $(a,a) \in E$ จะหมายถึง มีเส้นเชื่อมม้วนเป็นวงกลับมาที่จุดยอด $a$ โดยเรียกเส้นเชื่อมลักษณะนี้ว่า *วงวน* และเรียกจุดยอด $a$ ว่าเป็น *จุดตรึง*ของไดกราฟ $G$ นอกจากนี้ จุดยอด $v$ ของไดกราฟ $G$ จะเป็น *จุดตรึงเอกเทศ* เมื่อจุดยอด $v$ เป็นจุดตรึงของ $G$ ที่ไม่มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอดอื่นของ $G$ มาเชื่อมกับจุดยอด $v$

**ตัวอย่าง 1.1** ให้ $G = (V, E)$ โดยที่ $V = \{ 0, 1, 2, \dots, 22 \}$ และ $E = \{ (0,0), (1,1), (2,18), (3,16)$ $(4,2), (5,8), (6,12), (7,4), (8,13), (9,3), (10,6), (11,9), (12,9), (13,6), (14,3), (15,13),$ $(16,4), (17,12), (18,8), (19,2), (20,16), (21,18), (22,1) \}$




รูปที่ 1.1 ไดกราฟ $G$ ในตัวอย่างที่ 1.1

สังเกตว่าใน $G$ มี $(0,0), (1,1) \in E$ ดังนั้น $0$ และ $1$ เป็นจุดตรึงของ $G$ ซึ่งในแผนภาพจะแทนด้วยเส้นเชื่อมแสดงทิศทางที่มีลักษณะเป็นวงวนดังรูปที่ 1.1 แต่ $0$ เป็นจุดตรึงเอกเทศ และ $1$ ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศ และมี $(2,18), (18,8), (8,13), (13,6), (6,12), (12,9), (9,3), (3,16), (16,4),$ $(4,2) \in E$ ซึ่งในแผนภาพแทนด้วยเส้นเชื่อมแสดงทิศทางสิบเส้นที่เชื่อมจุดยอด $2, 18, 8, 13, 6, 12,$ $9, 3, 16$ และ $4$ เข้าด้วยกันเป็นวง เรียกเส้นเชื่อมแสดงทิศทางทั้งสิบเส้นที่เชื่อมจุดยอดเหล่านี้เข้าด้วยกันว่า *วง*

ในปี ค.ศ.1992 นักคณิตศาสตร์ชื่อ Szalay [9] ได้สร้างไดกราฟ $\Gamma(n, 2) = (V, E)$ สำหรับจำนวนนับ $n$ ที่ $n \geq 2$ โดยที่ $V = \{ 0, 1, 2, \dots, n-1 \}$ และ $(a, b) \in E$ ก็ต่อเมื่อ $a^2 \equiv b \pmod{n}$ แล้วศึกษาโครงสร้างของ $\Gamma(n, 2)$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n, 2)$ ต่อมา Skowronex-KaziÓw [7] และ Ju และ Wu [3] ได้ศึกษาโครงสร้างและจำนวนจุดตรึงของไดกราฟลักษณะเดียวกับ Szalay [9] คือ $\Gamma(n, 3)$ และ $\Gamma(n, 5)$ โดยเปลี่ยนเงื่อนไขของการมีเส้นเชื่อมระบุทิศทาง $(a, b)$ ในไดกราฟเป็น $a^3 \equiv b \pmod{n}$ และ $a^5 \equiv b \pmod{n}$ ตามลำดับ ในปี ค.ศ.2011 Somer และ Křížek [8] ได้ขยายแนวคิดของ Szalay [9] ศึกษาไดกราฟ $\Gamma(n, k)$ ที่เงื่อนไขการมีเส้นเชื่อมระบุ

ทิศทาง $(a,b)$ ในไดกราฟเป็น $a^k \equiv b \pmod{n}$ เมื่อ $k$ เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 2$ แต่พิสูจน์ได้เพียงขอบเขตล่างของจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ $\Gamma(n,k)$ เท่านั้น เมื่อเร็ว ๆ นี้ รตินันท์ และ ธัญพิชชา [1] ได้ให้สูตรที่เด่นชัดของจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ $\Gamma(n,4)$ โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับส่วนตกค้างกำลังสอง และสัญลักษณ์ของเลอช็องดร์

สังเกตว่าที่ผ่านมา งานวิจัยส่วนหนึ่งมุ่งความสนใจไปที่โครงสร้างและสูตรของจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n,k)$ เมื่อ $k$ เป็นจำนวนเฉพาะ หรือจำนวนในรูปกำลังของสอง ดังนั้นในงานวิจัยนี้ จึงได้สนใจศึกษา $\Gamma(n,6)$ ซึ่ง 6 เป็นจำนวนประกอบที่ไม่ใช่กำลังของสอง และหาสูตรที่เด่นชัดของจำนวนจุดตรึงทั้งหมดของ $\Gamma(n,6)$ โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับรากปฐมฐาน ซึ่งความรู้นี้สามารถขยายไปสู่สูตรของจำนวนจุดตรึงทั้งหมดของ $\Gamma(n,k)$ เมื่อ $k$ เป็นจำนวนนับ ที่ $k \geq 4$ และ $k-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

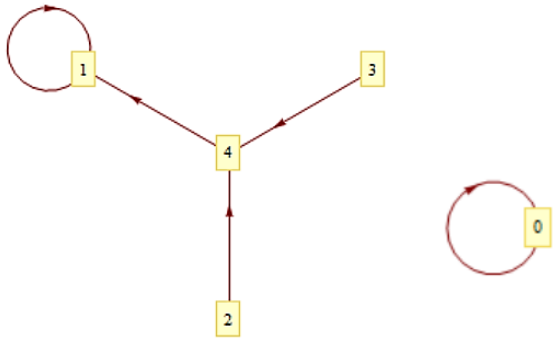
## 2. สูตรสำหรับจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ $\Gamma(n,6)$ ที่เกิดจากความสัมพันธ์ $a^6 \equiv b \pmod{n}$

ให้ $n$ เป็นจำนวนนับ ที่ $n \geq 2$ และ $V = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ นิยามไดกราฟ $\Gamma(n,6) = (V,E)$ โดย $(a,b) \in E$ ก็ต่อเมื่อ $a^6 \equiv b \pmod{n}$

**ตัวอย่าง 2.1**

(i) ให้ $n = 5$

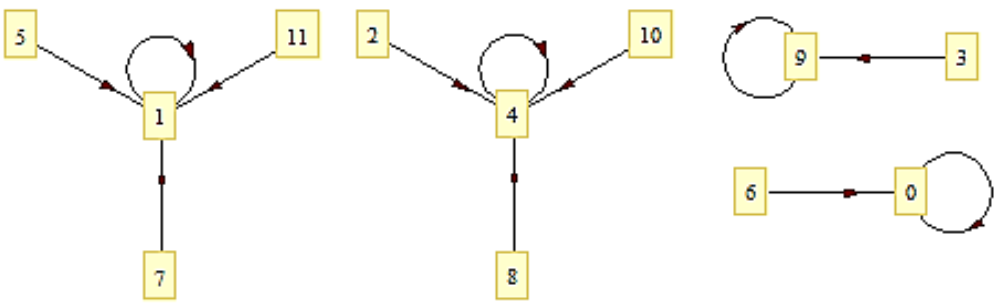
จะได้ว่า $V = \{0,1,2,3,4\}$ เนื่องจาก $0^6 \equiv 0 \pmod{5}$, $1^6 \equiv 1 \pmod{5}$, $2^6 \equiv 4 \pmod{5}$, $3^6 \equiv 4 \pmod{5}$ และ $4^6 \equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $\Gamma(5,6)$ จะมีแผนภาพดังรูปที่ 2.1




รูปที่ 2.1 ไดกราฟ $\Gamma(5,6)$

(ii) ให้ $n = 12$

ด้วยแนวคิดเดียวกันกับ (i) ทำให้ได้ว่า $\Gamma(12,6)$ มีแผนภาพดังรูปที่ 2.2




รูปที่ 2.2 ไดกราฟ $\Gamma(12,6)$

จากตัวอย่าง 2.1 จะเห็นว่า 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศของ $\Gamma(5,6)$ แต่ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศของ $\Gamma(12,6)$ ทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นการบอกเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะรับประกันว่าเมื่อใด 0 จะเป็นจุดตรึงเอกเทศของ $\Gamma(n,6)$ ซึ่งเงื่อนไขและบทพิสูจน์เหมือนกับกรณี $\Gamma(n,4)$ ที่พิสูจน์โดยรตินันท์และธัญพิชชา [1] แต่เพื่อความสมบูรณ์ผู้เขียนขอนำเสนอบทพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้อีกครั้ง

**ทฤษฎีบท 2.1** 0 และ 1 เป็นจุดตรึงของ $\Gamma(n,6)$ ยิ่งไปกว่านั้น 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศของ $\Gamma(n,6)$ ก็ต่อเมื่อ $n$ ปราศจากกำลังสอง นั่นคือ $n$ มีสมบัติว่าสำหรับจำนวนเฉพาะ $p$ ที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ถ้า $p^\alpha \mid n$ แล้ว $\alpha = 1$

**บทพิสูจน์** เนื่องจาก $n \mid (0^6 - 0)$ และ $n \mid (1^6 - 1)$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n$ จะได้ว่า 0 และ 1 เป็นจุดตรึงของ $\Gamma(n,6)$

ต่อมาจะพิสูจน์ว่า 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศของ $\Gamma(n,6)$ ก็ต่อเมื่อ $n$ ปราศจากกำลังสอง

สมมติว่า $n$ ไม่ปราศจากกำลังสอง จะได้ว่า มีจำนวนเฉพาะ $p$ และจำนวนเต็ม $k$ ที่ $n = p^2k$ จะได้ว่า $\left(\frac{n}{p}\right)^6 = n^3k^3 \equiv 0 \pmod{n}$ ดังนั้น $\left(\frac{n}{p}, 0\right) \in E$ นั่นคือ 0 ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศของ $\Gamma(n,6)$

สมมติว่า $n$ ปราศจากกำลังสอง ทำให้ได้ว่า มีจำนวนเฉพาะ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_l$ ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ที่ $n = p_1p_2p_3 \cdots p_l$ ต่อมาสมมติว่า 0 ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศ ฉะนั้นจะมี $k \in V$ และมีจำนวนเต็ม $s$ ที่ $k^6 = p_1p_2p_3 \cdots p_ls$ เนื่องจาก $k$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม $t$ ที่ทำให้

$$k^6 = p_1p_2p_3 \cdots p_l(p_1p_2p_3 \cdots p_l)^5t^6$$

จะได้ว่า $k = p_1p_2p_3 \cdots p_lt \geq n$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง □

**ข้อสังเกต 2.1** เนื่องจาก $(n-1)^6-(n-1)=(n-1)(n^5-5n^4+10n^3-10n^2+5n-2)$ ทำให้ได้ว่า $n$ หาร $(n-1)^6-(n-1)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $n=2$ ดังนั้นสำหรับจำนวนนับ $n$ ที่ $n\geq 3$ จุดยอด $n-1$ ไม่เป็นจุดตรึงของ $\Gamma(n,6)$ ซึ่งเหมือนกับไดกราฟ $\Gamma(n,4)$ ใน [1] แต่แตกต่างจากไดกราฟที่ศึกษาใน [3] และ [7] ที่ $n-1$ เป็นจุดตรึงของไดกราฟเสมอ

ต่อมาในการหาสูตรสำหรับจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n,6)$ จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวนเกี่ยวกับการมีอยู่ของผลเฉลยของสมภาค $f(x)\equiv 0\pmod m$

**ทฤษฎีบทประกอบ 2.2** [5] (ทฤษฎีบทประกอบของเฮนเซิล) ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามในตัวแปร $x$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ $r$ เป็นจำนวนนับ ถ้าจำนวนเต็ม $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน และ $m=m_1m_2m_3\cdots m_r$ แล้ว $f(x)\equiv 0\pmod m$ มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $f(x)\equiv 0\pmod{m_i}$ มีผลเฉลยทุก $i\in\{1,2,3,\ldots,r\}$ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $v(m)$ และ $v(m_i)$ เป็นจำนวนผลเฉลยของ $f(x)\equiv 0\pmod m$ และ $f(x)\equiv 0\pmod{m_i}$ ตามลำดับ แล้ว $v(m)=v(m_1)v(m_2)v(m_3)\cdots v(m_r)$

นอกจากนี้ยังจำเป็นต้องทำความรู้จักกับสัญลักษณ์ การคำนวณ และบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวนเพิ่มเติมดังนี้

**บทนิยาม 2.1** ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ

(i) [2] กำหนดให้ $\mathbb{Z}_p=\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ และสำหรับ $a,b\in\mathbb{Z}_p$ นิยาม

$$a\oplus b=(a+b)(\mathrm{mod}\,p) \text{ และ } a\odot b=(ab)(\mathrm{mod}\,p)$$

ซึ่งต่อไปจะเขียนแทน $a\oplus b$ ด้วย $a+b$ และ $a\odot b$ ด้วย $ab$

(ii) [2] กำหนดสัญลักษณ์ $\mathbb{Z}_p[x]$ เป็นเซตของพหุนามทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นสมาชิกของ $\mathbb{Z}_p$ พร้อมการดำเนินการ $\oplus$ และ $\odot$

(iii) [4] ให้ $n$ เป็นจำนวนนับ สมาชิก $\omega\in\mathbb{Z}_p$ จะเรียกว่าเป็น *รากที่ $n$ ของหนึ่ง* ถ้า $\omega^n\pmod p=1$ และ จะเรียกว่าเป็น *รากปฐมฐานที่ $n$ ของหนึ่ง* ถ้า $\omega^n\pmod p=1$ และ $\omega^m\pmod p\neq 1$ ทุกจำนวนนับ $m$ ที่ $1\leq m<n$

(iv) [4] ให้ $n$ เป็นจำนวนนับ และ $\omega\in\mathbb{Z}_p$ เป็นรากปฐมฐานที่ $n$ ของหนึ่ง นิยาม *พหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ $n$* เขียนแทนด้วย $\Phi_n(x)$ เป็นผลคูณในรูป

$$\Phi_n(x) = \left( \prod_{\substack{k=1 \\ \text{ห.ร.ม.}(k,n)=1}}^{n} (x - \omega^k) \right) \pmod{p}$$

จากบทนิยาม 2.1 (iv) จะเห็นว่า การนิยาม $\Phi_n(x)$ ขึ้นอยู่กับการมีอยู่ของรากปฐมฐานที่ $n$ ของหนึ่งใน $\mathbb{Z}_p$

**ตัวอย่าง 2.2** กำหนดให้ $p = 11$ จะได้ว่า $3^{10} \pmod{11} = 1$ ดังนั้น 3 เป็นรากที่ 10 ของหนึ่ง แต่ $3^5 \pmod{11} = 1$ และทราบว่า $3^1 \pmod{11} = 3,\ 3^2 \pmod{11} = 9,\ 3^3 \pmod{11} = 5$ และ $3^4 \pmod{11} = 4$ ทำให้ได้ว่า 3 ไม่เป็นรากปฐมฐานที่ 10 ของหนึ่ง แต่เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง จึงได้ว่าพหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ 5 คือ

$$\begin{aligned}\Phi_5(x) &= (x-3)(x-3^2)(x-3^3)(x-3^4) \pmod{11} \\ &= (x-3)(x-9)(x-5)(x-4) \pmod{11} \\ &= (x^4 - 21x^3 + 155x^2 - 483x + 540) \pmod{11} \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\end{aligned}$$

นอกจากนี้ยังสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า $10^2 \pmod{11} = 1$ และ $10 \pmod{11} = 10$ ทำให้ได้ว่า 10 เป็นรากปฐมฐานที่ 2 ของหนึ่ง จึงได้ว่าพหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ 2 คือ

$$\Phi_2(x) = (x - 10) \pmod{11} = x + 1$$

ในทางกลับกันเราสามารถตรวจสอบได้ว่าถ้า $a \in \mathbb{Z}_{11}$ แล้ว $a^3 \pmod{11} \neq 1$ และ $a^7 \pmod{11} \neq 1$ นั่นคือจะไม่สามารถสร้าง $\Phi_3(x)$ และ $\Phi_7(x)$ ด้วยบทนิยาม 2.1 (iv) ได้

**ตัวอย่าง 2.3** กำหนดให้ $p = 7$ จะได้ว่า $2^3 \pmod{7} = 1$ และทราบว่า $2^1 \pmod{7} = 2$ และ $2^2 \pmod{7} = 4$ ทำให้ได้ว่า 2 เป็นรากปฐมฐานที่ 3 ของหนึ่ง จึงได้ว่าพหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ 3 คือ $\Phi_3(x) = (x-2)(x-2^2) \pmod{7} = (x^2 - 6x + 8) \pmod{7} = x^2 + x + 1$

จากตัวอย่างทั้งสองนี้ จะเห็นว่าสำหรับจำนวนเฉพาะ $p$ ถ้าสามารถสร้าง $\Phi_q(x)$ เมื่อ $q$ เป็นจำนวนเฉพาะด้วยบทนิยาม 2.1 (iv) ได้แล้ว $\Phi_q(x)$ จะมีลักษณะพิเศษกล่าวคือ

$$\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1$$

ในความเป็นจริงแล้ว $\mathbb{Z}_p$ ในบทนิยาม 2.1 (iii) และ (iv) จะสามารถแทนที่ด้วยฟิลด์ใด ๆ ก็ได้ เช่น เซตของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งไม่มีข้อจำกัดในการสร้าง $\Phi_n(x)$ โดยสำหรับฟิลด์ใด ๆ $\Phi_n(x)$ จะเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มเสมอ [4] และยังสามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า สำหรับ

จำนวนเฉพาะ $q$ ใด ๆ จะได้ว่า $\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1$ ซึ่งทำให้ได้ว่าพหุนามในรูป $\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1$ มองเป็นพหุนามหนึ่งใน $\mathbb{Z}_p[x]$ ได้

ดังนั้นจากตัวอย่าง 2.2 จึงอาจสามารถมองเป็นว่าพหุนาม $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ที่สร้างจากฟิลด์ใด ๆ สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน $\mathbb{Z}_{11}[x]$ ได้ และ $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$ ที่สร้างจากฟิลด์ใด ๆ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน $\mathbb{Z}_{11}[x]$ ได้ แต่สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน $\mathbb{Z}_7[x]$ ได้

ทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทที่รับประกันว่า เมื่อใดที่พหุนามไซโคลโตมิกซึ่งสร้างจากฟิลด์ใด ๆ จะแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน $\mathbb{Z}_p[x]$ ได้บ้าง

**ทฤษฎีบทประกอบ 2.3** [4] พหุนามไซโคลโตมิก $\Phi_n(x)$ สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นอย่างสมบูรณ์ใน $\mathbb{Z}_p[x]$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $p \equiv 1 \pmod{n}$

อย่างไรก็ดี ในหัวข้อที่ 2 ของบทความฉบับนี้ จะนำทฤษฎีบทประกอบ 2.3 ไปใช้ในกรณีที่ $n = 5$ และในหัวข้อที่ 3 จึงจะนำทฤษฎีบทประกอบ 2.3 ไปใช้ในกรณีทั่วไปยิ่งขึ้น

ต่อไปจะเป็นการนำทฤษฎีบทประกอบต่าง ๆ ข้างต้นมาช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักเกี่ยวกับจำนวนจุดตรึงทั้งหมดของ $\Gamma(n, 6)$

**ทฤษฎีบท 2.4** ให้ $s$ และ $n$ เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq 2$ และ $n$ แยกตัวประกอบได้ในรูป

$$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}{p_3}^{\alpha_3}\cdots {p_s}^{\alpha_s}$$

โดย $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_s$ เป็นจำนวนเฉพาะ $\alpha_i$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด ถ้า $\pi(n)$ แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่แตกต่างกันทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i \equiv 1 \pmod{5}$ แล้วจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n, 6)$ คือ $2^s 3^{\pi(n)}$ จุด

**บทพิสูจน์** กำหนดให้ $L(n)$ เป็นจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n, 6)$ ดังนั้น $L(n)$ เป็นจำนวนผลเฉลยใน $V = \{\, 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,\}$ ของสมภาค

$$f(x) = x^6 - x = x(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

<u>กรณี 1</u> $s = 1$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $n = p^\alpha$ เมื่อ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $\alpha$ เป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า $V = \{\, 0, 1, 2, \ldots, p^\alpha - 1 \,\}$

สมมติให้ $x \in V - \{\, 0, 1 \,\}$ เป็นผลเฉลยของ $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$

เนื่องจาก $p \mid p^\alpha$ ทำให้ได้ว่า $p \mid x$ หรือ $p \mid (x-1)$ หรือ $p \mid (x^4+x^3+x^2+x+1)$

กรณี 1.1 $p \mid x$

สมมติว่า $p \mid (x-1)$ หรือ $p \mid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ จะได้ว่า $p \mid 1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $p \nmid (x-1)$ และ $p \nmid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ ทำให้ได้ด้วยว่า $p^\alpha \nmid (x-1)$ และ $p^\alpha \nmid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ และเนื่องจาก $2 \leq x \leq p^\alpha - 1$ ทำให้ได้ว่า $p^\alpha \nmid x$ เช่นกัน ดังนั้นกรณี 1.1 นี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 1.2 $p \mid (x-1)$

สมมติว่า $p \mid x$ จะได้ว่า $p \mid 1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ต่อมา สมมติว่า $p \mid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ เนื่องจาก $p \mid (x-1)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม $t$ ที่ $x = pt+1$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x^4+x^3+x^2+x+1 &= (pt+1)^4+(pt+1)^3+(pt+1)^2+(pt+1)+1 \\ &\equiv 1+1+1+1+1 = 5 \pmod{p} \end{aligned}$$

แต่ $p \mid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ จึงทำให้ $p \mid 5$ ดังนั้น $p = 5$ นั่นคือ $p \mid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ ทำให้เกิดสมภาค $x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{5}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $1$ อย่างไรก็ดีเมื่อคำนวณโดยตรงพบว่า

$$\begin{aligned} 2^4+2^3+2^2+2+1 &= 31 \not\equiv 0 \pmod{5} \\ 3^4+3^3+3^2+3+1 &= 121 \not\equiv 0 \pmod{5} \\ 4^4+4^3+4^2+4+1 &= 341 \not\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ได้ว่า $p \nmid x$ และ $p \nmid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ จึงได้ด้วยว่า $p^\alpha \nmid x$ และ $p^\alpha \nmid (x^4+x^3+x^2+x+1)$ และเนื่องจาก $1 \leq x-1 \leq p^\alpha - 2$ ทำให้ได้ว่า $p^\alpha \nmid x-1$ เช่นกัน ดังนั้นกรณี 1.2 นี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 1.3 $p \mid (x^4+x^3+x^2+x+1)$

นั่นคือสมภาค $x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{p}$ สังเกตว่า $x^4+x^3+x^2+x+1$ คือ $\Phi_5(x)$ และโดยทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จะได้ว่า $\Phi_5(x)$ แยกตัวประกอบได้เป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นอย่างสมบูรณ์ 4 พหุนามได้ใน $\mathbb{Z}_p[x]$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $p \equiv 1 \pmod{5}$

ดังนั้นสมภาคในกรณีย่อยนี้มีผลเฉลย 4 ตัว สมมติว่าเป็น $a$, $b$, $c$ และ $d$ ก็ต่อเมื่อ $p \equiv 1 \pmod{5}$ จากทฤษฎีบท 2.1 และ กรณี 1.1, 1.2 และ 1.3 จะได้ว่า

$$L(n) = \begin{cases} |\{0,1,a,b,c,d\}| = 6 & \text{เมื่อ } p \equiv 1 \pmod{5} \\ |\{0,1\}| = 2 & \text{เมื่อ } p \not\equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

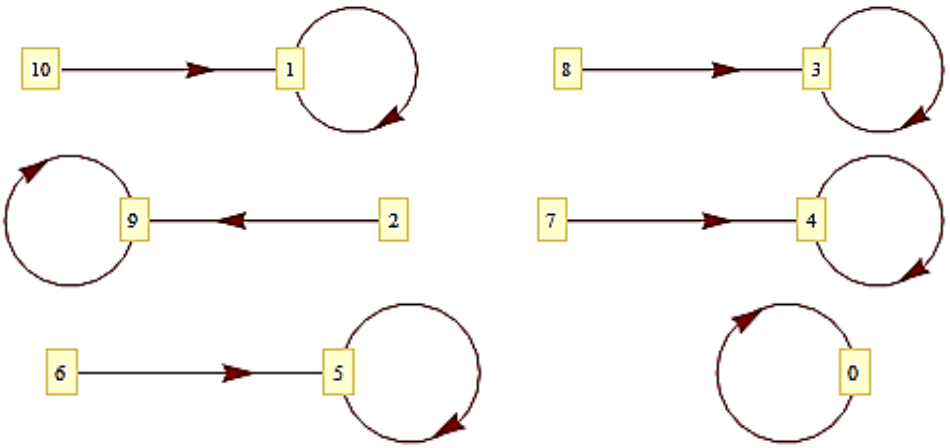
<u>กรณี 2</u> $s \geq 2$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.2 จะได้ว่า

$$L(n) = L({p_1}^{\alpha_1})L({p_2}^{\alpha_2})L({p_3}^{\alpha_3}) \cdots L({p_s}^{\alpha_s})$$

ดังนั้นจากกรณี 1 จะได้ว่า $L(n) = 6^{\pi(n)} \cdot 2^{s-\pi(n)} = 2^s 3^{\pi(n)}$ □

**ตัวอย่าง 2.3** ให้ $n = 11$ หรือ $n = 31$ จะได้ว่า $s = 1$ และ $p_1 = 11 \equiv 1 \pmod 5$ หรือ $p_1 = 31 \equiv 1 \pmod 5$ ดังนั้น $\pi(11) = \pi(31) = 1$ และ $L(11) = 2^1 3^1 = 6$



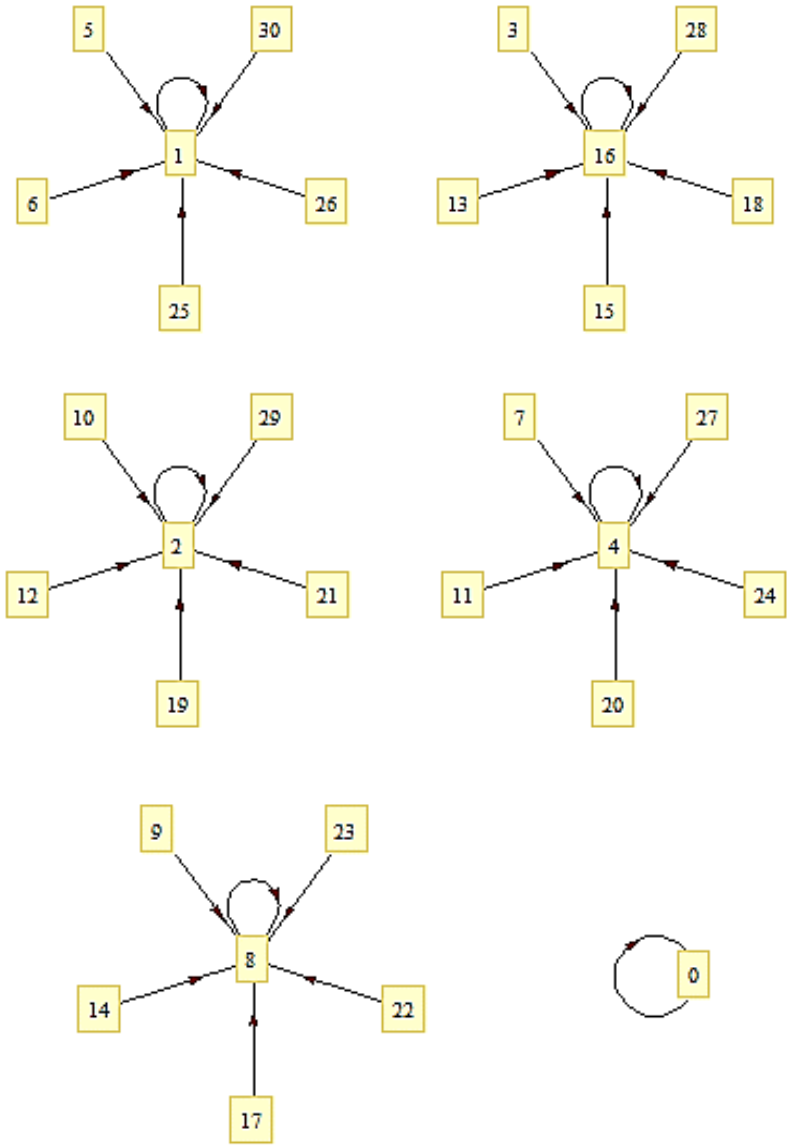

รูปที่ 2.3 ไดกราฟ $\Gamma(11, 6)$

**ข้อสังเกต 2.2** (i) ใน $\mathbb{Z}_{11}$ จากตัวอย่าง 2.2 ทำให้ทราบว่า 3 เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง และสังเกตจากรูปที่ 2.3 ได้ว่า $3^1 \pmod{11} = 3$, $3^2 \pmod{11} = 9$, $3^3 \pmod{11} = 5$ และ $3^4 \pmod{11} = 4$ เป็น 4 จุดตรึงในบรรดา 6 จุดตรึงทั้งหมดของ $\Gamma(11, 6)$

(ii) ในทำนองเดียวกัน ใน $\mathbb{Z}_{31}$ สามารถตรวจสอบได้ว่า 2 เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง และสังเกตจากรูปที่ 2.4 ได้ว่า $2^1 \pmod{31} = 2$, $2^2 \pmod{31} = 4$, $2^3 \pmod{31} = 8$ และ $2^4 \pmod{31} = 16$ เป็น 4 จุดตรึงในบรรดา 6 จุดตรึงทั้งหมดของ $\Gamma(31, 6)$

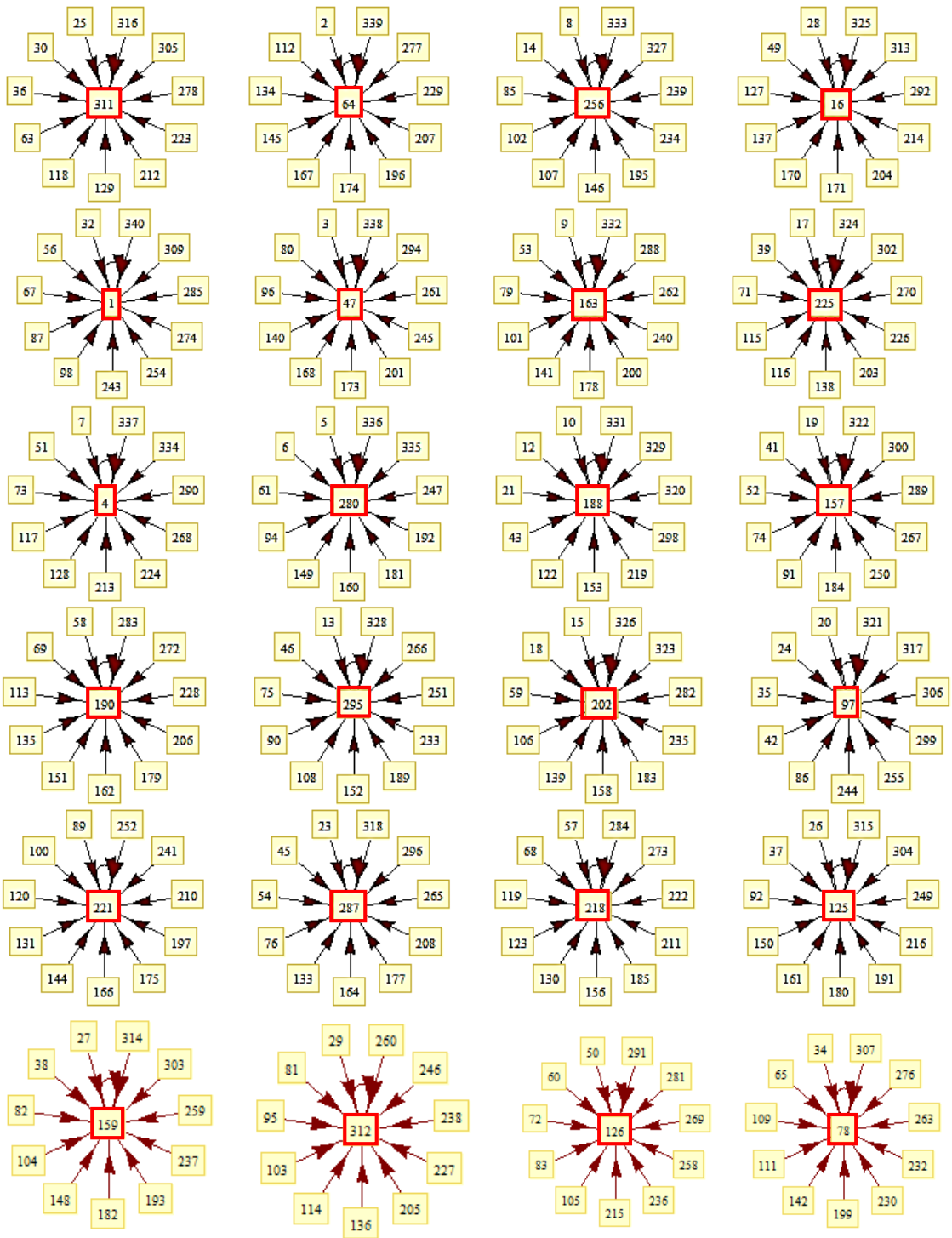
ดังนั้นโดยบทนิยามของรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง บทนิยามของ $\Phi_5(x)$ และข้อสังเกต 2.2 ทำให้ได้บทแทรกดังต่อไปนี้

**บทแทรก 2.5** ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 1 \pmod 5$ และ $\omega$ เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่งใน $\mathbb{Z}_p$ จะได้ว่า $\Gamma(p, 6)$ มีจุดตรึง 6 จุด ได้แก่ $0$, $1$, $\omega \pmod p$, $\omega^2 \pmod p$, $\omega^3 \pmod p$ และ $\omega^4 \pmod p$

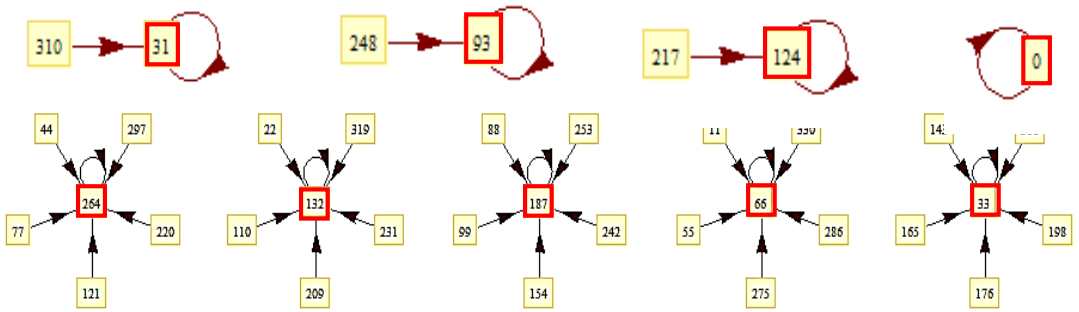



รูปที่ 2.4 ไดกราฟ $\Gamma(31,6)$

**ตัวอย่าง 2.4** ให้ $n = 341$ จะได้ว่า $s = 2,\ p_1 = 11 \equiv 1 \pmod{5}$ และ $p_2 = 31 \equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $\pi(341) = 2$ และ $L(341) = 2^2 3^2 = 36$



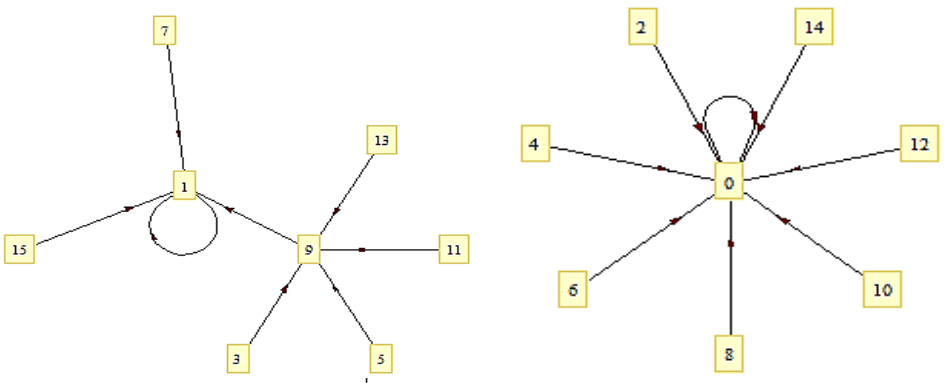

รูปที่ 2.5 ไดกราฟ $\Gamma(341,6)$




รูปที่ 2.5 (ต่อ) ไดกราฟ $\Gamma(341, 6)$

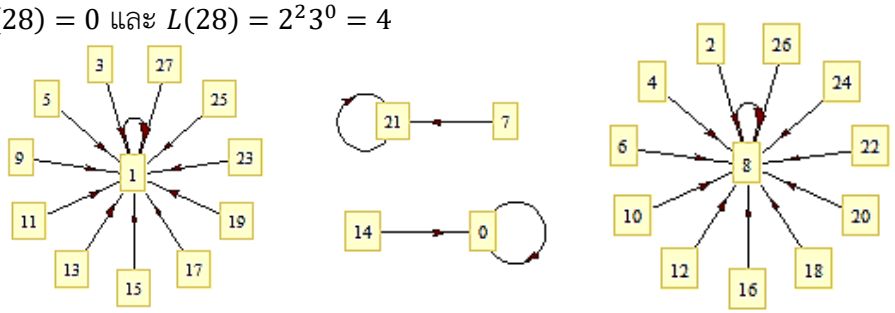
หมายเหตุ เนื่องจากข้อจำกัดของโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ในการสร้างแผนภาพ ในที่นี้ขอใช้กรอบหนาเพื่อเน้นจุดที่มีวงวน

**ตัวอย่าง 2.3** ให้ $n = 16$ จะได้ว่า $s = 1$ และ $p_1 = 2 \not\equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $\pi(16) = 0$ และ $L(16) = 2^1 3^0 = 2$




รูปที่ 2.6 ไดกราฟ $\Gamma(16, 6)$

**ตัวอย่าง 2.4** ให้ $n = 28$ จะได้ว่า $s = 2,\ p_1 = 2 \not\equiv 1 \pmod{5}$ และ $p_2 = 7 \not\equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $\pi(28) = 0$ และ $L(28) = 2^2 3^0 = 4$




รูปที่ 2.7 ไดกราฟ $\Gamma(28, 6)$

## 3. การวางนัยทั่วไป

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2 ว่า Kanoksing [4] สามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $q$ เป็นจำนวนเฉพาะใด ๆ แล้ว สำหรับฟิลด์ใด ๆ

$$\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1$$

และสำหรับจำนวนเต็ม $k$ ที่ $k \geq 4$ สมภาคที่เกี่ยวข้องกับการหาจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n,k)$ คือ

$$x^k - x = x(x-1)\left(x^{k-2} + x^{k-3} + x^{k-4} + \cdots + x + 1\right) \equiv 0 \pmod{n}$$

ซึ่งจะได้ว่า เมื่อ $k-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\Phi_{k-1}(x) = x^{k-2} + x^{k-3} + x^{k-4} + \cdots + x + 1$

ต่อมาเมื่อพิจารณาบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.4 กรณีที่ 1.3 จะพบว่า โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จะได้ว่า $\Phi_{k-1}(x) \equiv 0 \pmod{p}$ จะแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้น $k-2$ ตัว อย่างสมบูรณ์ได้ใน $\mathbb{Z}_p[x]$ และมีผลเฉลย $k-2$ ตัว ก็ต่อเมื่อ $p \equiv 1 \pmod{k-1}$ จึงสามารถวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.4 และบทแทรก 2.5 ได้เป็น

**ทฤษฎีบท 3.1** ให้ $s$ และ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 2$ ซึ่งแยกตัวประกอบได้ในรูป

$$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}{p_3}^{\alpha_3}\cdots{p_s}^{\alpha_s}$$

โดย $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_s$ เป็นจำนวนเฉพาะ $\alpha_i$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด ถ้า $k$ เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 4$ และ $k-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้วจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n,k)$ คือ $k^{\pi(n)}2^{s-\pi(n)}$ จุด เมื่อ $\pi(n)$ แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่แตกต่างกันทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i \equiv 1 \pmod{k-1}$

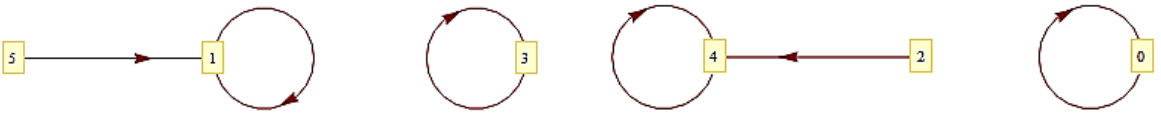
**บทแทรก 3.2** ให้ $k$ เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 4$ และ $k-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ $p \equiv 1 \pmod{k-1}$ ถ้า $\omega$ เป็นรากปฐมฐานที่ $k-1$ ของหนึ่งใน $\mathbb{Z}_p$ จะได้ว่า $\Gamma(p,k)$ มีจุดตรึง $k$ จุด ได้แก่ $0,\ 1,\ \omega \pmod{p},\ \omega^2 \pmod{p},\ \omega^3 \pmod{p},\ \ldots,\ \omega^{k-2} \pmod{p}$

**ตัวอย่าง 3.1** ให้ $k = 4$ จะได้ว่า $k-1 = 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n,4)$ คือ $4^{\pi(n)}2^{s-\pi(n)} = 2^{\pi(n)+s}$ จุด เมื่อ $\pi(n)$ แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i \equiv 1 \pmod{3}$

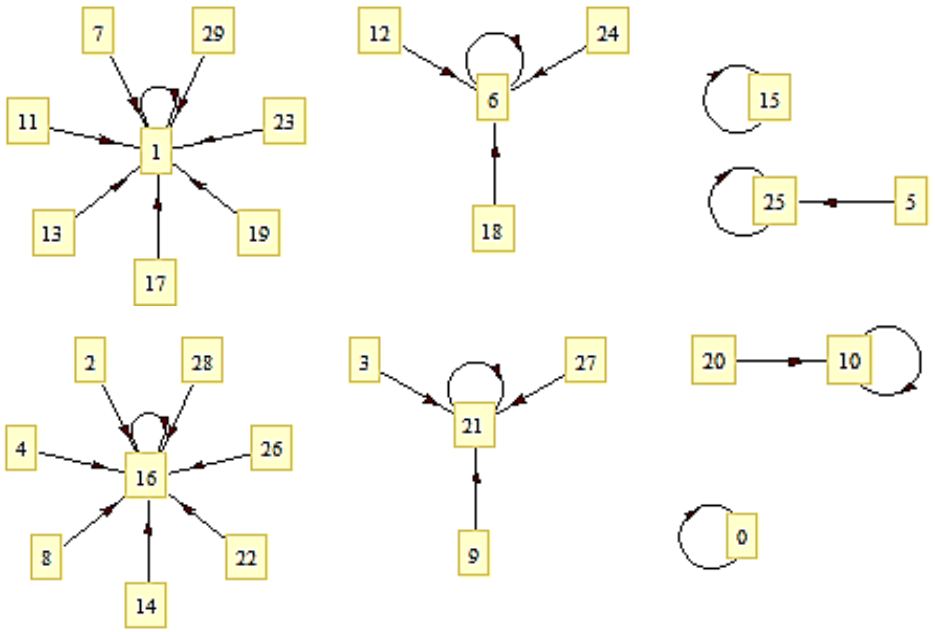
สังเกตว่าสำหรับจำนวนเฉพาะ $p_i$ จะได้ว่า ถ้า $p_i = 2$ แล้ว $p_i \not\equiv 1 \pmod{3}$ และ $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ ก็ต่อเมื่อ $p_i \equiv 1 \pmod{12}$ หรือ $p_i \equiv 7 \pmod{12}$ ทำให้จำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ และจำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่เป็นตัว

ประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i = 2$ หรือ $p_i \equiv 1 \pmod{12}$ หรือ $p_i \equiv 7 \pmod{12}$ มีจำนวนเท่ากัน ซึ่งสูตรจำนวนจุดตรึงในตัวอย่างนี้ตรงกับสูตรจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n,4)$ ที่นำเสนอใน [1]

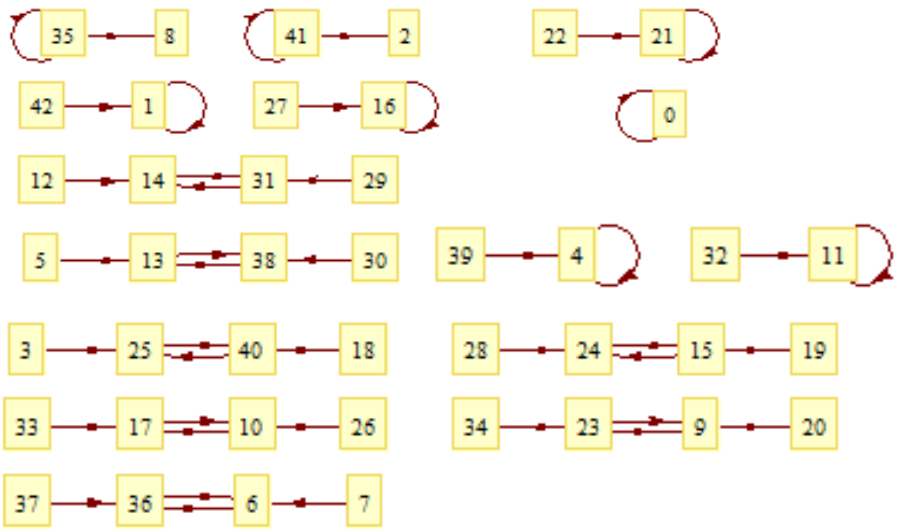
**ตัวอย่าง 3.2** ให้ $k = 8$ จะได้ว่า $k-1 = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n,8)$ คือ $8^{\pi(n)}2^{s-\pi(n)} = 2^{2\pi(n)+s}$ จุด เมื่อ $\pi(n)$ แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i \equiv 1 \pmod{7}$ รูปที่ 3.1 3.2 และ 3.3 เป็นแผนภาพของ $\Gamma(6,8)$, $\Gamma(30,8)$ และ $\Gamma(43,8)$ ซึ่งมีจุดตรึง 4, 8 และ 8 จุด ตามลำดับ สังเกตว่า 4 เป็นรากปฐมฐานที่ 7 ของ 1 ใน $\mathbb{Z}_{43}$ จึงได้ว่า $4 \pmod{43} = 4$, $4^2 \pmod{43} = 16$, $4^3 \pmod{43} = 21$, $4^4 \pmod{43} = 41$, $4^5 \pmod{43} = 35$ และ $4^6 \pmod{43} = 11$ เป็นจุดตรึง 6 จุด ในบรรดา 8 จุดของ $\Gamma(43,8)$




รูปที่ 3.1 ไดกราฟ $\Gamma(6,8)$



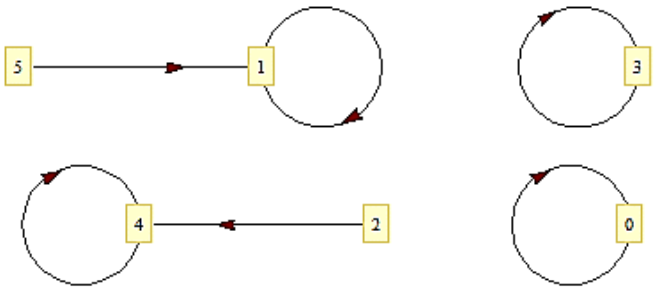

รูปที่ 3.2 ไดกราฟ $\Gamma(30,8)$



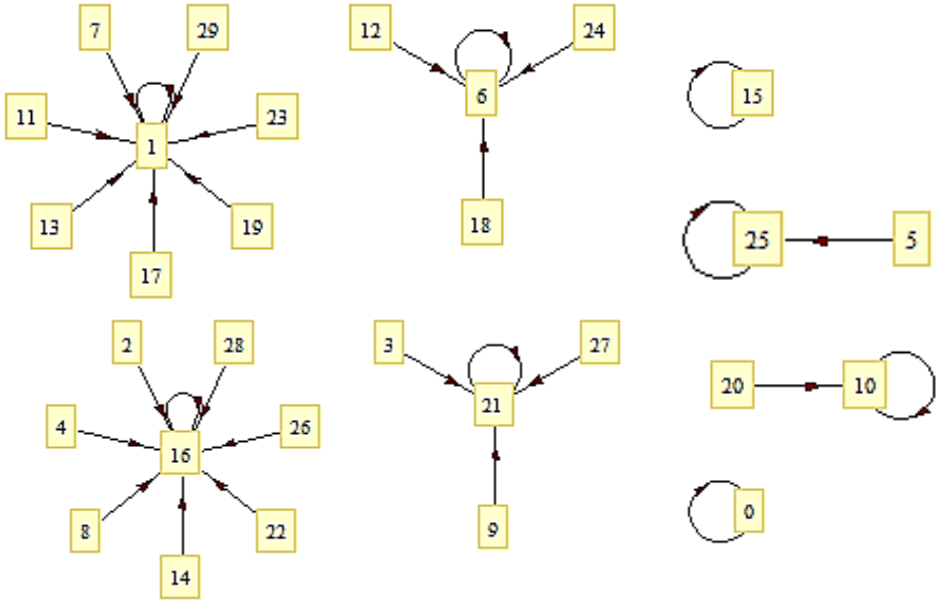

รูปที่ 3.3 ไดกราฟ $\Gamma(43,8)$

**ตัวอย่าง 3.3** ให้ $k=12$ จะได้ว่า $k-1=11$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน $\Gamma(n,12)$ คือ $12^{\pi(n)}2^{s-\pi(n)}=2^{\pi(n)+s}3^{\pi(n)}$ จุด เมื่อ $\pi(n)$ แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ $p_i$ ที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ซึ่ง $p_i\equiv 1 \pmod{11}$ รูปที่ 3.4 3.5 และ 3.6 เป็นแผนภาพของ $\Gamma(6,12)$, $\Gamma(30,12)$ และ $\Gamma(67,12)$ ซึ่งมีจุดตรึง 4, 8 และ 12 จุด ตามลำดับ

สังเกตว่า 9 เป็นรากปฐมฐานที่ 11 ของ 1 ใน $\mathbb{Z}_{67}$ จึงได้ว่า $9 \pmod{67}=9$, $9^2 \pmod{67}=14$, $9^3 \pmod{67}=59$, $9^4 \pmod{67}=62$, $9^5 \pmod{67}=22$, $9^6 \pmod{67}=64$, $9^7 \pmod{67}=40$, $9^8 \pmod{67}=25$, $9^9 \pmod{67}=24$ และ $9^{10} \pmod{67}=15$ เป็นจุดตรึง 10 จุด ในบรรดา 12 จุดของ $\Gamma(67,12)$




รูปที่ 3.4 ไดกราฟ $\Gamma(6,12)$



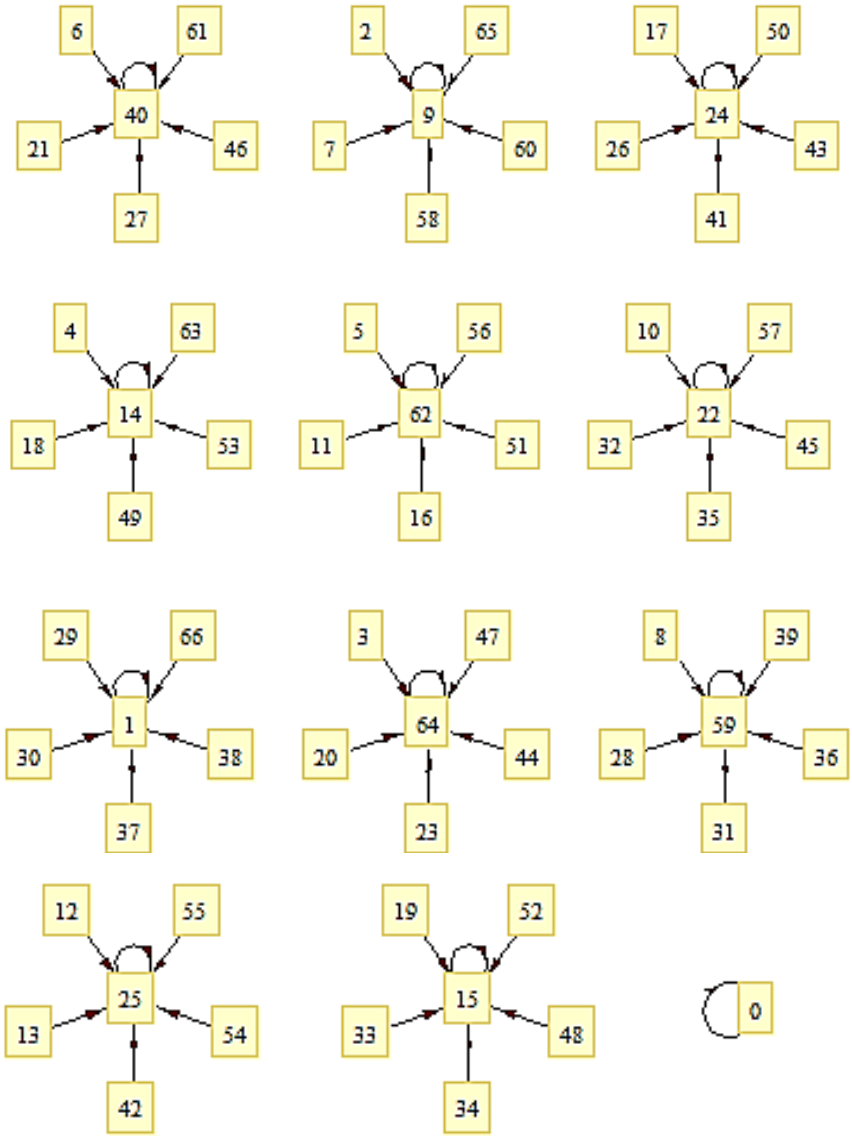

รูปที่ 3.5 ไดกราฟ $\Gamma(30,12)$

ในกรณีที่ $k=3$ จริงอยู่ที่ว่า $k-1=2$ เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ $\Phi_2(x)=x+1$ ซึ่งเป็นพหุนามเชิงเส้นอยู่แล้ว และจำนวนผลเฉลยของสมภาคที่เกี่ยวข้องกับการหาจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n,3)$ ซึ่งคือ $x^3-x=x(x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{n}$ ขึ้นอยู่กับกำลังของ 2 ที่เป็นตัวประกอบของ $n$ ทำให้สูตรของจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n,3)$ แตกต่างจากทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งผู้ที่สนใจสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [6]

จะเห็นว่าการนำความรู้เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามไซโคลโตมิกมาร่วมพิจารณาช่วยให้การหาสูตรจำนวนจุดตรึงของ $\Gamma(n,6)$ ทำได้ง่ายขึ้น และยังขยายผลไปได้ยังกรณีที่ทั่วไปกว่าได้ด้วย สำหรับผู้ที่สนใจอาจศึกษาเพิ่มเติมว่า จุดยอดใดบ้างจะเป็นจุดตรึงของ $\Gamma(n,6)$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนนับที่ $n\geq 2$ จุดยอดเหล่านี้มีความเกี่ยวข้องกับรากปฐมฐานหรือไม่ อย่างไร และสามารถขยายผลนี้ไปยังกรณีที่ทั่วไปกว่าได้หรือไม่

**กิตติกรรมประกาศ**

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงงานคณิตศาสตร์ที่ได้รับการสนับสนุนโดยทุนพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.)




รูปที่ 3.6 ไดกราฟ $\Gamma(67,12)$

## เอกสารอ้างอิง


[1] รตินันท์ บุญเคลือบ และ ธัญพิชชา ยอดแก้ว. (2561). ไดกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์ $a^4 \equiv b \pmod{n}$. *วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์*, 63 (695), น. 9 - 18.

Boonklurb, R. and Yodkeaw, T. (2018). Digraph Arising from The Relation $a^4 \equiv b \pmod{n}$. *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand under The Patronage of His Majesty the King*, 63 (695), p. 9 - 18.

[2] อัจฉรา หาญชูวงศ์. (2542). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Harnchoowong, A. (1999). *Theory of Numbers*. Bangkok: Chulalongkorn Unversity Printery.

[3] Ju, T. and Wu, M. (2014). On Iteration Digraph and Zero-Divisor Graph of Ring $\mathbb{Z}_n$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 64 (139), p. 611 - 628.

[4] Kanoksing, P. (2017). *Structure of The Quotient Ring of Polynomials over Integer Modulo m with The n$^{th}$ Cyclotomic Polynomial*. (Senior Project). Chulalongkorn University, Faculty of Science, Department of Mathematics and Computer Science.

[5] Meemark, Y. (2016). *Theory of Numbers*. Retrieved from http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~myotsana/MATH331NT.pdf.

[6] Rosen, K. H. (1999). *Discrete Mathematics and Its Applications* (4$^{th}$ ed.). McGraw-Hill International Edition.

[7] Skowronex-KaziÓw, J. (2009). Properties of Digraphs Connected with Some Congruence Relations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 59 (134), p. 39 - 49.

[8] Somer, L. and Křížek, M. (2011). The Structure of Digraphs Associated with the Congruence $x^k \equiv y \pmod{n}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 61 (136), p. 337 - 358.

[9] Szalay, L. (1992). A Discrete Iteration in Number Theory. *BDTF Tud. Közl*., 8, p. 71 - 91 (in Hungarian).